

Apêndice J

Estatística Quântica

J.1 Partículas Idênticas

Classicamente, 2 partículas são sempre distinguíveis: podemos seguir suas trajetórias e sempre dizer qual é qual. Quanticamente, duas partículas idênticas, e.g. dois elétrons, são indistinguíveis: se trocarmos dois elétrons de posição, o sistema continua idêntico a antes da troca.

Suponha que a partícula 1 está no estado $\psi_a(x_1)$ e a partícula 2 no estado $\psi_b(x_2)$:

$$\psi_a(x_1) : \text{partícula com número quântico } a, \text{ na posição } x_1 \quad (\text{J.1})$$

$$\psi_b(x_2) : \text{partícula com número quântico } b, \text{ na posição } x_2 \quad (\text{J.2})$$

Se essas 2 partículas não interagem, classicamente o estado do sistema de 2 partículas seria:

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \quad (\text{Partículas Distinguíveis}) \quad (\text{J.3})$$

Neste caso, quando trocamos as partículas de posição, i.e. $x_1 \leftrightarrow x_2$, obtemos um novo estado *distinguível* do anterior:

$$\psi(x_2, x_1) = \psi_a(x_2)\psi_b(x_1) \neq \psi(x_1, x_2) \quad (\text{J.4})$$

Mas como as partículas são idênticas, a mudança $x_1 \leftrightarrow x_2$ deve produzir um estado indistinguível do estado inicial $\psi(x_1, x_2)$, ou seja o novo estado $\psi(x_2, x_1)$ é dado por

$$\psi(x_2, x_1) = c \psi(x_1, x_2), \quad c = \text{const.} \quad (\text{J.5})$$

pois a constante muda apenas a "fase", ou a normalização, da função de onda. Por outro lado, se mudarmos as posições novamente $x_2 \leftrightarrow x_1$, obtemos:

$$\psi(x_1, x_2) = c \psi(x_2, x_1) = c^2 \psi(x_1, x_2), \quad (\text{J.6})$$

ou seja

$$c = \pm 1 \quad (\text{J.7})$$

Portanto, quando mudamos as partículas de posição, a função de onda tem apenas duas opções: 1) permanecer exatamente igual ou 2) mudar de sinal.

Obviamente, a função de onda expressa na Eq. J.3 não se encaixa em nenhum desses casos, já que lá a troca de partículas produz um novo estado, distinguível daquele antes da troca. Portanto, para partículas idênticas, a função de onda do sistema de 2 partículas deve ter uma das duas formas:

$$\psi_S(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)] \quad (\text{Simétrica}) \quad (\text{J.8})$$

$$\psi_A(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)] \quad (\text{Anti-simétrica}) \quad (\text{J.9})$$

Essas duas possibilidades tem as propriedades de que:

$$\psi_S(x_2, x_1) = \psi_S(x_1, x_2) \quad (\text{J.10})$$

$$\psi_A(x_2, x_1) = -\psi_A(x_1, x_2) \quad (\text{J.11})$$

Uma partícula deve escolher de uma vez por todas se terá função de onda simétrica ou anti-simétrica. Suponha que uma dada partícula (e.g. um elétron) tivesse funções de onda tanto ψ_S como ψ_A . Neste caso, ela teria também combinações lineares $\alpha\psi_S + \beta\psi_A$, que não são nem simétricas, nem anti-simétricas, gerando uma contradição. Portanto, se medirmos que uma partícula tem função de onda simétrica, sabemos que esta é uma propriedade intrínseca dela.

J.1.1 Estatística de Spin: Bósons e Férmions

As partículas elementares possuem propriedades intrínsecas, e.g. massa, carga. Uma dessas propriedades é o spin, que é uma espécie de momento angular intrínseco. Verifica-se na natureza que as partículas possuem sempre spin inteiro (0, 1, ...) ou semi-inteiro (1/2, 3/2, ...) em unidades de $\hbar$.

Por outro lado, partículas com funções de onda simétricas ψ_S são chamadas bósons, e partículas com funções de onda anti-simétricas ψ_A são chamadas férmions. Exemplos de bósons incluem o fóton (spin 0), os mésons (spin 0, 1) e os glúons (spin 1). Exemplos de férmions incluem bárions, como prótons e nêutrons e também elétrons (spin 1/2).

Um fato da natureza é que todos os bósons tem spin inteiro, enquanto todos os férmions tem spin semi-inteiro. Esse fato pode ser demonstrado no contexto da Teoria Quântica de Campos, que unifica a Teoria Quântica e a Relatividade Especial. Portanto:

$$\text{Férmions} : \text{ Função de onda anti-simétrica } \psi_A, \text{ spin semi-inteiro } n\hbar/2, \text{ e.g. } \text{eletron} \quad (\text{J.12})$$

$$\text{Bósons} : \text{ Função de onda simétrica } \psi_S, \text{ spin inteiro } n\hbar, \text{ e.g. } \text{foton} \quad (\text{J.13})$$

J.1.2 Princípio de Exclusão de Pauli

Suponha que temos 2 férmions, e.g. dois elétrons, com uma função de onda anti-simétrica:

$$\psi_A(x_1, x_2) \propto \psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_a(x_2)\psi_b(x_1) \quad (\text{J.14})$$

Suponha agora que os 2 férmions estão no mesmo estado quântico, i.e. $a = b$. Neste caso, teríamos:

$$\psi_A(x_1, x_2) \propto \psi_a(x_1)\psi_a(x_2) - \psi_a(x_2)\psi_a(x_1) = 0 \quad (\text{J.15})$$

ou seja, é impossível ter dois férmions com o mesmo estado quântico. Similarmente, suponha que os 2 férmions tem estados quânticos diferentes, mas ocupam posições espaciais muito próximas, i.e. $x_1 \approx x_2$. Neste caso:

$$\psi_A(x_1, x_2) \propto \psi_a(x_1)\psi_b(x_1) - \psi_a(x_1)\psi_b(x_1) = 0 \quad (\text{J.16})$$

ou seja, dois férmions não podem ocupar o mesmo lugar no espaço. Isso determina a posições e os estados de elétrons nos átomos, já que eles não podem ter o mesmo estado quântico.

J.1.3 Spin e Tabela Periódica

A função de onda total é a função de onda espacial vezes a função de onda do spin da partícula. Portanto, se 2 elétrons têm os mesmos números quânticos n , l e m , eles necessariamente devem ter spins diferentes, e.g. $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$. A tabela periódica de elementos químicos é explicada com elétrons ocupando os níveis energéticos disponíveis, respeitando o Princípio de Pauli.

J.1.4 Partículas Clássicas e Quânticas

Considere um gás com apenas 2 partículas A e B, que podem existir em 3 estados 1,2,3.

Estatística Clássica: Neste caso, temos partículas são *distinguíveis* e *qualquer número* de partículas pode estar em qualquer estado. As 9 configurações possíveis são mostradas na Tab. J.1. As partículas satisfazem a *Estatística de Maxwell-Boltzmann* (MB)

1	2	3
AB		
	AB	
		AB
A	B	
B	A	
A		B
B		A
	A	B
	B	A

Tabela J.1: Configurações de 2 partículas A,B em 3 estados, na estatística clássica de Maxwell-Boltzmann.

Estatística de Bósons: Neste caso, as partículas são *idênticas* ($A=B$) e *qualquer número* de partículas pode estar em qualquer estado. As 6 configurações possíveis são mostradas na Tab. J.2. As partículas satisfazem a *Estatística de Bose-Einstein* (BE).

1	2	3
AA		
	AA	
		AA
A	A	
A		A
	A	A

Tabela J.2: Configurações de 2 partículas idênticas em 3 estados, na estatística de Bose-Einstein.

Estatística de Férmions: Neste caso, as partículas são *idênticas* ($A=B$) e pode haver no máximo 1 partícula em cada estado (Princípio de Exclusão). As 3 configurações possíveis são mostradas na Tab. J.3. As partículas satisfazem a *Estatística de Fermi-Dirac* (FD).

1	2	3
A	A	
A		A
	A	A

Tabela J.3: Configurações de 2 partículas idênticas em 3 estados, na estatística de Fermi-Dirac.

Para cada uma destas estatísticas, podemos calcular a razão P , definida:

$$P = \frac{\text{Número de configurações com 2 partículas no mesmo estado}}{\text{Número de configurações com 2 partículas em estados diferentes}} \quad (\text{J.17})$$

Temos:

$$P_{\text{MB}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (\text{J.18})$$

$$P_{\text{BE}} = \frac{3}{3} = 1 \quad (\text{J.19})$$

$$P_{\text{FD}} = \frac{0}{3} = 0 \quad (\text{J.20})$$

Portanto, relativamente à estatística clássica de Maxwell-Boltzmann, podemos concluir:

Bose-Einstein: Tendência das partículas se aglomerarem no mesmo estado (e.g. condensado de Bose-Einstein a baixas temperaturas).

Fermi-Dirac: Tendência das partículas se "repelirem" no mesmo estado, ou ocuparem estados diferentes: princípio de exclusão (e.g. átomos, anãs brancas).

J.2 Estatística Quântica: Ensemble Grand-Canônico

No caso quântico, uma configuração pode ser representada por

$$(N_1, N_2, \dots, N_r, \dots) : \text{configuração} \quad (\text{J.21})$$

onde temos N_r partículas no estado r , com energia ϵ_r cada uma. Gostaríamos de saber o número médio $\bar{N}_r$ de partículas no estado r .

No caso clássico de um gás ideal, os estados eram contínuos e vimos que

$$\bar{N}(v) \propto e^{-\beta m v^2 / 2} \quad \text{ou} \quad \bar{N}(E) \propto e^{-\beta E} \quad (\text{J.22})$$

No caso quântico, precisamos retornar às médias calculadas usando a distribuição grand-canônica:

$$P(E_r, N_r) = C e^{-\beta(E_r - \mu N_r)} \quad (\text{J.23})$$

Com N_r partículas no estado r , cada uma com energia ϵ_r , temos que a energia total E_r no estado r é dada por:

$$E_r = N_r \epsilon_r \quad (\text{J.24})$$

Assim,

$$P(E_r, N_r) = C e^{-\beta(\epsilon_r - \mu)N_r} = C e^{-\beta\epsilon'_r N_r} \quad (\text{J.25})$$

$$\epsilon'_r = \epsilon_r - \mu \quad (\text{J.26})$$

e o número médio no estado r fica

$$\bar{N}_r = \frac{\sum_s N_r e^{-\beta\epsilon'_s N_s}}{\sum_s e^{-\beta\epsilon'_s N_s}} \quad (\text{J.27})$$

onde a soma é feita sobre todas as configurações possíveis do sistema. Temos então

$$\bar{N}_r = \frac{-\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon'_r} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\beta\epsilon'_s N_s}}{\sum_{s=1}^{\infty} e^{-\beta\epsilon'_s N_s}} = -\frac{1}{\beta} \frac{1}{Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial \epsilon'_r} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \epsilon'_r} \quad (\text{J.28})$$

onde a função de grand-partição Z_g é

$$Z_g = \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\beta\epsilon'_s N_s}. \quad (\text{J.29})$$

Com as energias ϵ'_s fixadas pelos estados quânticos, as diferentes configurações são obtidas variando os números $(N_1, N_2, \dots, N_r, \dots)$ de 0 a ∞ e temos, equivalentemente:

$$\bar{N}_r = \frac{\sum_{N_1, N_2, \dots, N_r, \dots} N_r e^{-\beta(\epsilon'_1 N_1 + \epsilon'_2 N_2 + \dots + \epsilon'_r N_r + \dots)}}{\sum_{N_1, N_2, \dots, N_r, \dots} e^{-\beta(\epsilon'_1 N_1 + \epsilon'_2 N_2 + \dots + \epsilon'_r N_r + \dots)}} = \frac{\sum_{N_r} N_r e^{-\beta\epsilon'_r N_r} \sum_{N_s \neq N_r} e^{-\beta(\epsilon'_1 N_1 + \epsilon'_2 N_2 + \dots)}}{\sum_{N_r} e^{-\beta\epsilon'_r N_r} \sum_{N_s \neq N_r} e^{-\beta(\epsilon'_1 N_1 + \epsilon'_2 N_2 + \dots)}} \quad (\text{J.30})$$

O somatório em $N_s \neq N_r$ se cancela, e obtemos

$$\bar{N}_r = \frac{\sum_{N_r=1}^{\infty} N_r e^{-\beta\epsilon'_r N_r}}{\sum_{N_r=1}^{\infty} e^{-\beta\epsilon'_r N_r}} = \frac{-\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon'_r} \sum_{N_r=1}^{\infty} e^{-\beta\epsilon'_r N_r}}{\sum_{N_r=1}^{\infty} e^{-\beta\epsilon'_r N_r}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln S_r}{\partial \epsilon'_r} \quad (\text{J.31})$$

onde a soma S_r é feita apenas no estado r :

$$S_r = \sum_{N_r=1}^{\infty} \left(e^{-\beta\epsilon'_r} \right)^{N_r} \quad (\text{J.32})$$

enquanto a função de partição é feita em todas as configurações:

$$Z_g = \sum_{N_1, N_2, \dots, N_r, \dots} e^{-\beta(\epsilon'_1 N_1 + \epsilon'_2 N_2 + \dots + \epsilon'_r N_r + \dots)} \quad (\text{J.33})$$

J.2.1 Distribuição de Fermi-Dirac

No caso de férmions, $N_r = 0, 1$ apenas e

$$S_r = \sum_{N_r=0,1} \left(e^{-\beta\epsilon'_r} \right)^{N_r} = 1 + e^{-\beta\epsilon'_r} \quad (\text{J.34})$$

Portanto

$$\bar{N}_r = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon'_r} \ln(1 + e^{-\beta \epsilon'_r}) = -\frac{1}{\beta} \frac{-\beta e^{-\beta \epsilon'_r}}{1 + e^{-\beta \epsilon'_r}} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon'_r} + 1} \quad (\text{J.35})$$

ou seja,

$$\boxed{\bar{N}_r = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} + 1}} \quad \text{Fermi-Dirac} \quad (\text{J.36})$$

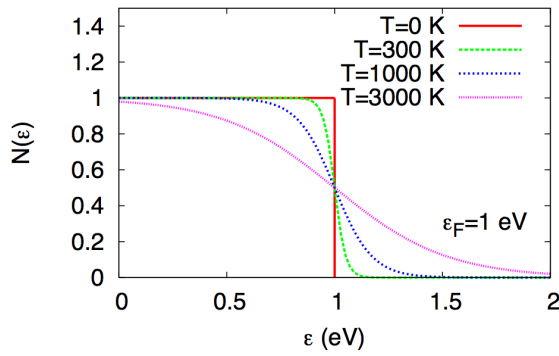


Figura J.1: Distribuição de Fermi-Dirac para diferentes temperaturas. A energia de Fermi neste caso é $\epsilon_F = 1\text{eV}$. No zero absoluto, todos os estados com $\epsilon < \epsilon_F$ estão ocupados, enquanto os estados $\epsilon > \epsilon_F$ estão vazios.

Veamos o que ocorre quando a temperatura de um sistema de Férmions abaixa. Neste caso, $T \rightarrow 0$, i.e. $\beta \rightarrow \infty$ e temos

$$e^{\beta(\epsilon - \mu)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \epsilon < \mu(T=0) \\ \infty & \text{se } \epsilon > \mu(T=0) \end{cases} \quad (\text{J.37})$$

Definimos a *Energia de Fermi* $\epsilon_F = \mu(T=0)$, e temos então que

$$N(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \epsilon_F)} + 1} = \begin{cases} 1 & \text{se } \epsilon < \epsilon_F \\ 0 & \text{se } \epsilon > \epsilon_F \end{cases} \quad (\text{J.38})$$

ou seja, em $T = 0$, todos os estados com $\epsilon < \epsilon_F$ são ocupados, e os estados com $\epsilon > \epsilon_F$ ficam vazios. À medida que T aumenta, os estados com $\epsilon > \epsilon_F$ também vão sendo ocupados.

J.2.2 Distribuição de Bose-Einstein

No caso de bósons, $N_r = 0, 1, \dots, \infty$ e devemos calcular o somatório:

$$S_r = \sum_{N_r=0}^{\infty} \left(e^{-\beta \epsilon'_r} \right)^{N_r} = 1 + e^{-\beta \epsilon'_r} + e^{-2\beta \epsilon'_r} + e^{-3\beta \epsilon'_r} + \dots \quad (\text{J.39})$$

Portanto

$$e^{-\beta \epsilon'_r} S_r = e^{-\beta \epsilon'_r} + e^{-2\beta \epsilon'_r} + e^{-3\beta \epsilon'_r} + \dots \quad (\text{J.40})$$

e subtraindo as duas equações, após cancelamentos, obtemos

$$S_r - e^{-\beta \epsilon'_r} S_r = 1 \rightarrow S_r = \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon'_r}} \quad (\text{J.41})$$

Assim

$$\bar{N}_r = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon'_r} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon'_r})^{-1} = \frac{1}{\beta} \frac{\beta e^{-\beta \epsilon'_r}}{1 - e^{-\beta \epsilon'_r}} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon'_r} - 1} \quad (\text{J.42})$$

ou seja,

$$\boxed{\bar{N}_r = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} - 1}} \quad \text{Bose-Einstein} \quad (\text{J.43})$$

Fótons

No caso particular de fótons, a energia pode variar independente do número de partículas, já que fótons podem ser criados/destruídos sem restrição. Isso implica $\mu = 0$, ou seja obtemos novamente a distribuição de Planck:

$$\boxed{\bar{N}_r = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_r} - 1}} \quad \text{Distribuição de Planck (Fótons)} \quad (\text{J.44})$$

J.2.3 Distribuição de Maxwell-Boltzmann

No caso de partículas distinguíveis, a troca de partículas entre estados distintos gera novas configurações. Entretanto a troca de partículas no mesmo estado não gera uma nova configuração. Assim, para cada 1 configuração $(N_1, N_2, \dots)$ do caso de bósons, temos

$$\frac{N!}{N_1!N_2!\dots} \quad (\text{J.45})$$

configurações no caso clássico, onde $N = \sum_r N_r$ é o numero total de partículas do sistema. Portanto, a função de grand-partição fica

$$\begin{aligned} Z_g &= \sum_{N_1, N_2, \dots, N_r, \dots} \frac{N!}{N_1!N_2!\dots} e^{-\beta(\epsilon'_1 N_1 + \epsilon'_2 N_2 + \dots \epsilon'_r N_r + \dots)} \\ &= \sum_{N_1, N_2, \dots, N_r, \dots} \frac{N!}{N_1!N_2!\dots} (e^{-\beta\epsilon'_1})^{N_1} (e^{-\beta\epsilon'_2})^{N_2} \dots \end{aligned} \quad (\text{J.46})$$

Usando a expansão binomial:

$$(a + b + c + \dots)^N = \sum_{N_1, N_2, \dots, N_r, \dots} \frac{N!}{N_1!N_2!\dots} a^{N_1} b^{N_2} c^{N_3} \dots, \quad \text{onde } \sum_r N_r = N \quad (\text{J.47})$$

temos então

$$Z_g = (e^{-\beta\epsilon'_1} + e^{-\beta\epsilon'_2} + \dots)^N = \left(\sum_r e^{-\beta\epsilon'_r} \right)^N \quad (\text{J.48})$$

Portanto

$$\ln Z_g = N \ln \left(\sum_r e^{-\beta\epsilon'_r} \right) \quad (\text{J.49})$$

e temos

$$\bar{N}_r = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \epsilon'_r} = -\frac{N}{\beta} \frac{-\beta e^{-\beta\epsilon'_r}}{\sum_r e^{-\beta\epsilon'_r}} = N \frac{e^{-\beta\epsilon'_r}}{\sum_r e^{-\beta\epsilon'_r}} \quad (\text{J.50})$$

Inserindo $\epsilon'_r = \epsilon_r - \mu$ e cancelando $e^{-\beta\mu}$ no numerador e denominador, temos

$$\boxed{\bar{N}_r = N \frac{e^{-\beta\epsilon_r}}{\sum_r e^{-\beta\epsilon_r}}} \quad \text{Maxwell-Boltzmann} \quad (\text{J.51})$$

e obviamente

$$\sum_r \bar{N}_r = N \quad (\text{J.52})$$

Ou seja, reobtemos o resultado da estatística clássica, mesmo com estados quânticos.

J.2.4 Limite Clássico

Somando as partículas nos vários estados, obtemos o número total N de partículas

$$N = \sum_r \bar{N}_r = \sum_r \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} \pm 1} \quad (\text{J.53})$$

Mesmo no caso de fótons, em que este número não é fixo, ainda assim ele deve se manter finito. No limite de baixas densidades, temos $N \ll 1$ o que implica que cada $\bar{N}_r \ll 1$, e $e^{\beta\epsilon'_r} \gg 1$.

Já no limite de altas temperaturas, $\beta \rightarrow 0$, e os termos de energias ϵ_r mais altas, i.e. $\bar{N}_r$ com r mais alto, tendem a contribuir para a somatória. Para que N continue sendo finito novamente é preciso que $\bar{N}_r \ll 1$, o que ocorre com $\mu(T)$ negativo o suficiente e implica $e^{\beta\epsilon'_r} \gg 1$.

Portanto em baixas densidades e/ou altas temperaturas, ambas as distribuições quânticas (BE e FD) se aproximam de

$$\bar{N}_r = \frac{1}{e^{\beta\epsilon'_r} \pm 1} \approx e^{-\beta\epsilon'_r} \quad (\text{MB}) \quad (\text{J.54})$$

i.e. as distribuições de BE e de FD se reduzem a distribuição clássica de MB.

J.2.5 Comparação

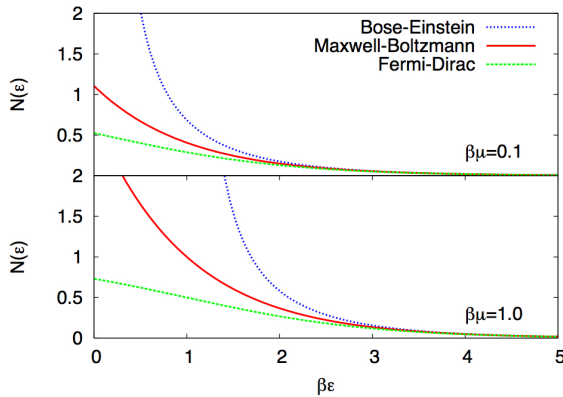


Figura J.2: Comparação entre as distribuições de Maxwell-Boltzmann (clássica), Bose-Einstein (bósons) e Fermi-Dirac (férmions). Para $\beta\epsilon \rightarrow \infty$, as três distribuições coincidem. Para $\beta\epsilon \rightarrow 0$, bosons tendem a se aglomerar no estado fundamental, enquanto fermions devem respeitar o princípio de Exclusão.

Comparamos as 3 distribuições na Fig. J.2. Relativamente à distribuição de Maxwell-Boltzmann, a distribuição de Bose-Einstein esta sempre acima, enquanto a distribuição de Fermi-Dirac esta sempre abaixo.

Como vimos, em altas energias ($\epsilon \rightarrow \infty$) ou altas temperaturas ($\beta \rightarrow 0$) as distribuições de FD e BE se reduzem à de MB, ou seja, as 3 distribuições coincidem.

Já em baixas temperaturas as distribuições se diferenciam muito. A distribuição de BE (e também a de MB) faz com que todas as partículas tendam a ocupar o estado fundamental de mais baixa energia do sistema, fazendo com que $N(\epsilon = 0) \rightarrow \infty$. Já a distribuição de FD deve respeitar o princípio de Exclusão e portanto $N(\epsilon) \leq 1$, fazendo com que os estados sejam mais homogeneamente ocupados.

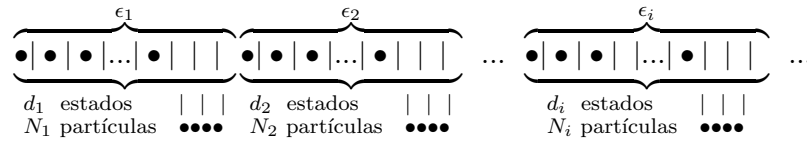
J.3 Estatística Quântica: Ensemble Micro-Canônico

Vamos agora re-obter as distribuições de MB, FD e BE usando o ensemble microcanônico, i.e. explicitamente contando todas as configurações possíveis em cada caso. O estado de equilíbrio é aquele que maximiza o número de configurações (estado mais provável), ou similarmente, que maximiza a entropia do sistema.

J.3.1 Configurações

Suponha que tenhamos estados *degenerados*, i.e. estados distintos mas com a mesma energia. Vimos que isso ocorre, por exemplo, no átomo de Hidrogênio, onde os estados eram caracterizados por 4 números quânticos (n, l, m, m_z) , mas a energia dependia apenas de n . Portanto, havia vários estados do elétron com a mesma energia.

Vamos supor então que temos d_i estados com energia ϵ_i e que vamos distribuir N_i partículas nesses d_i estados:



O caso não-degenerado corresponde a $d_i = 1$. Os números de estados d_i são fixos e determinados pela mecânica quântica do sistema específico que estamos considerando.

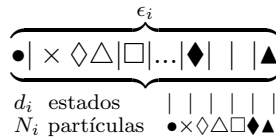
O número de partículas N_i ocupando estes estados no entanto pode variar e definir diferentes configurações do sistema. Estamos interessados em saber o número de configurações Ω possíveis com N_1 partículas com energia ϵ_1 cada, N_2 partículas com energia ϵ_2 e assim por diante, mas com energia total e número total de partículas fixados, i.e.

$$\Omega(N_1, N_2, \dots, N_i, \dots) \quad \text{com} \quad \sum_i N_i = N \quad \text{e} \quad \sum_i N_i \epsilon_i = E \quad (\text{J.55})$$

Vamos considerar as várias estatísticas para calcular o número de configurações acima.

Distinguíveis

Vamos considerar primeiro o caso da estatística clássica, em que as partículas são distinguíveis e pode haver qualquer número de partículas em qualquer estado. Uma configuração típica nos níveis de energia ϵ_i é mostrada abaixo:



- Para preencher os estados de energia ϵ_1 , devemos

i) Escolher N_1 partículas entre as N possíveis. O número de maneiras de fazer isso é

$$\binom{N}{N_1} = \frac{N!}{N_1! (N - N_1)!} \quad (\text{J.56})$$

ii) Distribuir as N_1 partículas entre os d_1 estados. Cada uma das N_1 partículas terá d_1 escolhas, já que elas podem inclusive ocupar os mesmos estados. Portanto o número de maneiras de fazer isso é

$$(d_1)^{N_1} \quad (\text{J.57})$$

Portanto, o número de maneiras de ter N_1 partículas nos d_1 estados de ϵ_1 é:

$$\epsilon_1 : \Omega(N_1) = \frac{N! d_1^{N_1}}{N_1! (N - N_1)!} \quad (\text{J.58})$$

Por exemplo, se $d_1 = 3$ estados e $N_1 = 2$ partículas, as configurações possíveis para ϵ_1 são as 9 já mostradas na Tab J.1, ou similarmente:

$$\begin{array}{ll} \bullet \times | | & : (AB, 0, 0) \\ | \bullet \times | & : (0, AB, 0) \\ | | \bullet \times & : (0, 0, AB) \\ \bullet | \times | & : (A, B, 0) \\ \times | \bullet | & : (B, A, 0) \\ \bullet | | \times & : (A, 0, B) \\ \times | | \bullet & : (B, 0, A) \\ | \bullet | \times & : (0, A, B) \\ | \times | \bullet & : (0, B, A) \end{array}$$

De fato, com $N = 2$, $N_1 = 2$ e $d_1 = 3$, temos $\Omega(N_1) = 2!3^2/2!(0)! = 9$.

- Para os estados de energia ϵ_2 , procedemos da mesma forma, mas como já usamos N_1 partículas, somente $(N - N_1)$ estão disponíveis. Portanto, fazendo $N \rightarrow N - N_1$, temos:

$$\epsilon_2 : \Omega(N_2) = \frac{(N - N_1)! d_2^{N_2}}{N_2! (N - N_1 - N_2)!} \quad (\text{J.59})$$

- Procedemos similarmente para todas as energias ϵ_i . O número total de configurações possíveis é obtido então multiplicando:

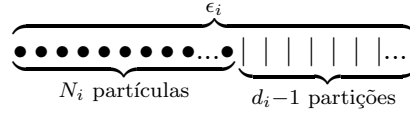
$$\begin{aligned} \Omega(N_1, N_2, \dots) &= \Omega(N_1)\Omega(N_2)\dots \\ &= \frac{N! d_1^{N_1}}{N_1! (N - N_1)!} \frac{(N - N_1)! d_2^{N_2}}{N_2! (N - N_1 - N_2)!} \dots = N! \frac{d_1^{N_1} d_2^{N_2} \dots}{N_1! N_2! \dots} \end{aligned} \quad (\text{J.60})$$

ou seja

$$\boxed{\Omega(N_1, N_2, \dots) = N! \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^{N_n}}{N_n!}} \quad (\text{J.61})$$

Bósons

Para bósons a tarefa é mais fácil, já que as partículas são idênticas. Portanto, não precisamos "escolher" N_i partículas dentre as N disponíveis, já que todas produzirão uma mesma configuração. Isso elimina o passo i) do caso anterior. A única coisa a se determinar é o numero de maneiras de distribuir as N_i partículas idênticas em d_i estados. Podemos pensar que temos N_i bolas representando partículas idênticas e $d_i - 1$ partições que limitam os d_i estados:



Por exemplo, uma configuração típica para bósons é mostrada abaixo:



- O número de configurações possíveis para a energia ϵ_1 é o número de permutações do conjunto de $N_1 + d_1 - 1$ objetos, sendo N_1 idênticos e $d_1 - 1$ idênticos, ou seja:

$$\epsilon_1 : \Omega(N_1) = \frac{(N_1 + d_1 - 1)!}{N_1! (d_1 - 1)!} \quad (\text{J.63})$$

Por exemplo, se $d_1 = 3$ estados ($d_1 - 1 = 2$ particoes) e $N_1 = 2$ partículas, as configurações possíveis para ϵ_1 são as 6 já mostradas na Tab J.2, ou similarmente::

$$\begin{array}{ll} \bullet \bullet | | & : (AA, 0, 0) \\ | \bullet \bullet & : (0, AA, 0) \\ | | \bullet \bullet & : (0, 0, AA) \\ \bullet | \bullet | & : (A, A, 0) \\ \bullet | \bullet & : (A, 0, A) \\ | \bullet \bullet & : (0, A, A) \end{array}$$

De fato $\Omega(N_1) = (2 + 3 - 1)!/2!(3 - 1)! = 4!/2!2! = 6$.

- O mesmo se aplica para os estados de energia ϵ_2 e todas as outras, e o número total de configurações fica:

$$\Omega(N_1, N_2, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(N_n + d_n - 1)!}{N_n! (d_n - 1)!} \quad (\text{J.64})$$

Férmions

Para férmions a situação é parecida com a de bósons, mas as partículas devem satisfazer o princípio de exclusão, i.e. pode haver no máximo uma partícula por estado.

Uma configuração típica para férmions é mostrada abaixo:

$$\begin{array}{c} \overbrace{\bullet | \bullet | \bullet | \bullet | | \dots | \bullet | \bullet}^{\epsilon_i} \\ d_i \text{ estados} \quad | | | \\ N_i \text{ partículas} \quad \bullet \bullet \bullet \end{array} \quad (\text{J.65})$$

- O número de maneiras de preencher os estados de energia ϵ_1 é igual ao número de combinações dos d_1 estados disponíveis em grupos de N_1 estados completos, ou seja:

$$\epsilon_1 : \Omega(N_1) = \binom{d_1}{N_1} = \frac{d_1!}{N_1! (d_1 - N_1)!} \quad (\text{J.66})$$

Por exemplo, se $d_1 = 3$ estados ($d_1 - 1 = 2$ partições) e $N_1 = 2$ partículas, as configurações possíveis para ϵ_1 são as 3 já mostradas na Tab J.3, ou similarmente:

$$\begin{array}{ll} \bullet | \bullet | & : (A, A, 0) \\ \bullet | & | \bullet : (A, 0, A) \\ | \bullet | \bullet & : (0, A, A) \end{array}$$

De fato $\Omega(N_1) = 3!/2!(3-2)! = 3$.

- Para os estados de energia ϵ_2 , procedemos da mesma forma, mas como já usamos N_1 partículas, somente $(N - N_1)$ estão disponíveis. Portanto, fazendo $N \rightarrow N - N_1$, temos:

$$\epsilon_2 : \Omega(N_2) = \frac{(N - N_1)! d_2^{N_2}}{N_2! (N - N_1 - N_2)!} \quad (\text{J.67})$$

- O mesmo se aplica para os estados de energia ϵ_2 e todas as outras, e o número total de configurações fica:

$$\boxed{\Omega(N_1, N_2, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{d_n!}{N_n! (d_n - N_n)!}} \quad (\text{J.68})$$

J.3.2 Distribuição de Equilíbrio

A distribuição de estados mais provável é aquela que contem o maior número de configurações, ou seja é aquela que maximiza a função $\Omega(N_1, N_2, \dots)$, ou similarmente seu logaritmo $\ln \Omega(N_1, N_2, \dots)$ (a entropia do sistema), sujeitos a vínculos de energia e número total de partículas:

$$\sum_n N_n = N, \quad \sum_n N_n \epsilon_n = E \quad (\text{J.69})$$

Esta maximização pode ser feita pelo método de multiplicadores de Lagrange. Maximizar $\ln \Omega(N_1, N_2, \dots)$ sujeito aos vínculos acima é equivalente a maximizar a função $G(N_1, N_2, \dots, \alpha, \beta)$:

$$G(N_1, N_2, \dots) = \ln \Omega(N_1, N_2, \dots) + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \epsilon_n \right] \quad (\text{J.70})$$

onde α e β são multiplicadores de Lagrange. De fato, o máximo de G ocorre quando:

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{\partial G}{\partial \beta} = 0 \quad (\text{J.71})$$

A primeira condição garante que $\ln \Omega$ é máxima e determina a distribuição N_n em que isso ocorre. As outras duas condições garantem que os vínculos são satisfeitos.

J.3.3 Distribuição de Maxwell-Boltzmann

No caso de partículas distinguíveis, temos

$$G = \ln N! + \sum_{n=1}^{\infty} (N_n \ln d_n - \ln N_n!) + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \epsilon_n \right] \quad (\text{J.72})$$

Para $N_n \gg 1$ podemos usar a aproximação de Stirling:

$$\ln N_n! \approx N_n \ln N_n - N_n \quad (N_n \gg 1, \text{ Stirling}) \quad (\text{J.73})$$

obtendo

$$G = \ln N! + \alpha N + \beta E + \sum_{n=1}^{\infty} [N_n \ln d_n - N_n \ln N_n + N_n - \alpha N_n + \beta \epsilon_n N_n] \quad (\text{J.74})$$

Portanto

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln d_n - \ln N_n - 1 + 1 - \alpha - \beta \epsilon_n = 0 \quad (\text{J.75})$$

o que implica

$$\boxed{\bar{N}_n = d_n e^{-(\alpha + \beta \epsilon_n)}} \quad (\text{Maxwell-Boltzmann}) \quad (\text{J.76})$$

ou seja, re-obtemos a distribuição de Maxwell-Boltzmann.

J.3.4 Distribuição de Bose-Einstein

No caso de bósons, temos

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(N_n + d_n - 1) - \ln N_n! - \ln(d_n - 1)!] + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \epsilon_n \right]$$

ou seja

$$\begin{aligned} G \approx & \sum_{n=1}^{\infty} [(N_n + d_n - 1) \ln(N_n + d_n - 1) - (N_n + d_n - 1) - N_n \ln N_n - N_n - \alpha N_n - \beta \epsilon_n N_n] \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(d_n - 1)!] + \alpha N + \beta E \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = \ln(N_n + d_n - 1) - \ln N_n - \alpha - \beta \epsilon_n = 0 \quad (\text{J.77})$$

o que implica

$$\ln \left(1 + \frac{d_n - 1}{N_n} \right) = \alpha + \beta \epsilon_n \quad \rightarrow \quad \frac{d_n - 1}{N_n} = e^{\alpha + \beta \epsilon_n} - 1 \quad (\text{J.78})$$

ou seja

$$\boxed{N_n = \frac{d_n - 1}{e^{\alpha + \beta \epsilon_n} - 1}} \quad (\text{Bose-Einstein}) \quad (\text{J.79})$$

ou seja, re-obtemos a distribuição de Bose-Einstein. Note que a constante $d_n - 1$ pode ser absorvida na normalização da distribuição.

Distribuição de Fótons

No caso de fótons, não existe o vínculo no número de partículas. Portanto, tudo é igual ao caso geral de bósons, mas com $\alpha = 0$:

$$\boxed{N_n \propto \frac{d_n - 1}{e^{\beta \epsilon_n} - 1}} \quad (\text{Bose-Einstein}) \quad (\text{J.80})$$

ou seja, re-obtemos a distribuição de Bose-Einstein. Note que a constante $d_n - 1$ pode ser absorvida na normalização da distribuição.

J.3.5 Distribuição de Fermi-Dirac

No caso de férmions, temos

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln d_n! - \ln N_n! - \ln(d_n - N_n)!] + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \epsilon_n \right]$$

Assumindo $N_n \gg 1$ e também $d_n \gg N_n$, temos

$$\begin{aligned} G &\approx \sum_{n=1}^{\infty} [-N_n \ln N_n - (d_n - N_n) \ln(d_n - N_n) + (d_n - N_n) - N_n - \alpha N_n - \beta \epsilon_n N_n] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [\ln d_n!] + \alpha N + \beta E \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\partial G}{\partial N_n} = -\ln N_n + \ln(d_n - N_n) - \alpha - \beta \epsilon_n = 0 \quad (\text{J.81})$$

o que implica

$$\ln \left(\frac{d_n}{N_n} - 1 \right) = \alpha + \beta \epsilon_n \quad \rightarrow \quad \frac{d_n}{N_n} = e^{\alpha + \beta \epsilon_n} + 1 \quad (\text{J.82})$$

ou seja

$$\boxed{N_n = \frac{d_n}{e^{\alpha + \beta \epsilon_n} + 1}} \quad (\text{Fermi-Dirac}) \quad (\text{J.83})$$

ou seja, re-obtemos a distribuição de Fermi-Dirac. Novamente a constante d_n pode ser absorvida na normalização da distribuição.

J.4 Aplicações

J.4.1 Gás de Bósons

Considere um gás de bósons, e.g. um gás de fótons, mas vamos manter $\mu \neq 0$ para generalidade. Temos

$$\bar{N}_r = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} - 1} \quad (\text{J.84})$$

e o número total de partículas é

$$N = \sum_r \bar{N}_r = \sum_n N(\epsilon_n) \Omega(\epsilon_n) \Delta n \quad (\text{J.85})$$

onde $\Omega(\epsilon_n)$ é o número de estados com energia ϵ_n e $\Delta n \approx 1$. Supondo bósons em uma caixa quadrada de comprimento L , os estados de energia são:

$$\epsilon_n = \frac{h^2 n^2}{8mL^2}, \quad \text{onde} \quad n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \quad (\text{J.86})$$

O número de estados é contado por n , e em um intervalo $\Delta n \approx dn$ fica:

$$\Omega(\epsilon_n) dn = \frac{4\pi n^2}{8} dn = \frac{\pi n^2}{2} dn = \frac{\pi n}{2} (n dn) \quad (\text{J.87})$$

Como

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{h^2 n^2}{8mL^2} & \text{ou} & \quad n = \left(\frac{8mL^2}{h^2} \right)^{1/2} \epsilon^{1/2} \\ \rightarrow d\epsilon &= \frac{h^2}{8mL^2} 2n dn & \text{ou} & \quad n dn = \left(\frac{8mL^2}{h^2} \right) \frac{d\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Portanto

$$\Omega(n) dn = \frac{\pi}{2} \left(\frac{8mL^2}{h^2} \right)^{1/2} \epsilon^{1/2} \left(\frac{8mL^2}{h^2} \right) \frac{d\epsilon}{2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{8mL^2}{h^2} \right)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon = \frac{4\pi L^3}{h^3} (2m^3)^{1/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon$$

e com $V = L^3$, temos

$$\Omega(\epsilon) d\epsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon \quad (\text{J.88})$$

Assim, o número de partículas fica

$$\begin{aligned} N &= \sum_n N(\epsilon_n) \Omega(\epsilon_n) \Delta n \rightarrow \int_0^\infty N(\epsilon) \Omega(\epsilon) d\epsilon \\ &= \frac{4\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon \end{aligned} \quad (\text{J.89})$$

A integral dá

$$N = \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} V e^{\beta\mu} \left(1 + \frac{1}{2^{3/2}} e^{\beta\mu} + \frac{1}{3^{3/2}} e^{2\beta\mu} + \dots \right) \quad (\text{J.90})$$

Para m, T grande, devemos ter $e^{\beta\mu} \rightarrow 0$, pois N é fixo. Isso ocorre se $\mu \rightarrow -\infty$. Neste caso, temos

$$N \approx \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} V e^{\beta\mu} \quad \text{ou} \quad e^{\beta\mu} \approx \frac{N h^3}{(2\pi m k_B T)^{3/2} V} \quad (\text{J.91})$$

Já a energia total é dada por

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty N(\epsilon) \Omega(\epsilon) \epsilon d\epsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon \\ &\approx \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} V \left(\frac{3}{2} k_B T \right) e^{\beta\mu} \left(1 + \frac{1}{2^{5/2}} e^{\beta\mu} + \frac{1}{3^{5/2}} e^{2\beta\mu} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{J.92})$$

Para m, T grandes, temos então

$$\frac{E}{N} \approx \frac{3}{2} k_B T \left(1 + \frac{1}{2^{5/2}} e^{\beta\mu} \right) \left(1 - \frac{1}{2^{3/2}} e^{\beta\mu} \right) = \frac{3}{2} k_B T \left[1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2^{3/2}} - \frac{1}{2^{5/2}} \right)}_{1/2^{2/5}} e^{\beta\mu} \right] \quad (\text{J.93})$$

ou

$$\frac{E}{N} \approx \underbrace{\frac{3}{2} k_B T}_{\text{Clássico}} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{2^{5/2}} \frac{N h^3}{V (2\pi m k_B T)^{3/2}}}_{\text{correção quântica de 1ª ordem}} \right) \quad (\text{J.94})$$

Portanto a energia média de um gás de bósons a altas temperaturas é menor do que a de um gás clássico, já que os bósons tendem a se aglomerar em energias mais baixas, diminuindo a energia média.

Condensado de Bose-Einstein

Para que $N(\epsilon_r) \geq 0$ para todos os estados, devemos ter

$$e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} \geq 1 \rightarrow \mu \leq \epsilon \quad (\text{J.95})$$

Se $\epsilon_{\min} = \epsilon_0 \approx 0$, então

$$\mu \leq 0 \quad (\text{J.96})$$

Mas $\mu = \mu(T)$, e existe uma temperatura crítica T_c na qual $\mu = 0$. Ela é determinada por

$$N = \frac{(2\pi mk_B T_c)^{3/2}}{h^3} V \left(1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \dots \right) \quad (\text{J.97})$$

Pode-se mostrar que para $T < T_c$, as partículas tendem a se aglomerar no estado fundamental ϵ_0 : condensado de Bose-Einstein. Esse efeito foi verificado experimentalmente em 1995 por Cornell, Ketterle e Wieman, que ganharam o prêmio Nobel em 2001.

J.4.2 Gás de Férmions

Considere agora um gás de férmions, e.g. um gás de elétrons livres. De fato, em um condutor metálico, os elétrons nas camadas exteriores (banda de condução) estão fracamente ligados ao núcleo e são aproximadamente livres (elétrons de condução).

Como elétrons tem 2 possibilidades de spin ($\pm \hbar/2$), o número de estados é multiplicado por 2 relativamente ao de bósons:

$$\Omega(\epsilon)d\epsilon = \frac{8\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon \quad (\text{J.98})$$

Assim, o número de partículas fica

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty N(\epsilon) \Omega(\epsilon) d\epsilon \\ &= \frac{8\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta(\epsilon - \epsilon_F)} + 1} d\epsilon \end{aligned} \quad (\text{J.99})$$

Para $T \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$ e

$$N(\epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{se } \epsilon < \epsilon_F \\ 0 & \text{se } \epsilon > \epsilon_F \end{cases} \quad (\text{J.100})$$

Portanto

$$N = \frac{8\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{1/2} d\epsilon = \frac{16\pi V (2m^3)^{1/2}}{3h^3} \epsilon_F^{3/2} \quad (\text{J.101})$$

ou

$$\boxed{\epsilon_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}} \quad (\text{Energia de Fermi}) \quad (\text{J.102})$$

Para a energia, temos

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty N(\epsilon) \Omega(\epsilon) \epsilon d\epsilon \\ &= \frac{8\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{3/2} d\epsilon = \frac{16\pi V (2m^3)^{1/2}}{5h^3} \epsilon_F^{5/2} \end{aligned} \quad (\text{J.103})$$

Portanto,

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{5} \epsilon_F \quad (\text{J.104})$$

ou

$$E = \frac{3}{5} N \left[\frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} \right] \quad (\text{J.105})$$

O gás de férmions exerce uma pressão nas paredes de um recipiente, quando se expande de dV :

$$dE = \underbrace{-\frac{2}{3} \frac{E}{V}}_{-P} dV = -P dV = -dW \quad (\text{J.106})$$

ou seja

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{3} \frac{E}{V} = \frac{2}{3} \frac{3}{5} \frac{N}{V} \left[\frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} \right] \\ \rightarrow P &= \frac{2}{5} \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} \quad (\text{Pressão de Degenerescência}) \end{aligned} \quad (\text{J.107})$$

Anãs Brancas

Estrelas passam a primeira parte de sua existência usando a energia liberada nas reações nucleares no seu interior. Essas reações de fusão nuclear liberam uma quantidade enorme de energia e produzem uma pressão sobre o material estelar para fora da estrela. Esta pressão balanceia a atração gravitacional que tende a fazer o material estelar colapsar para o centro.

À medida que os combustíveis usuais das reações nucleares (hidrogênio, hélio, ...) se esgotam, a estrela passa a fundir e produzir elementos mais pesados. Eventualmente a fusão não é mais favorável energeticamente, pois a energia de ligação por nucleon passa a diminuir nos produtos.

Neste ponto, se a estrela não for muito massiva, ela se expande e perde suas camadas externas, restando apenas um núcleo estelar muito denso. A estrela passa a se chamar uma anã branca. Como não há mais reações nucleares, a anã branca balanceia a gravidade com a pressão de degenerescência dos elétrons, que é muito alta devido à alta densidade.

A estrela pode co-existir desta forma por um período indefinido. Quanto maior a massa da estrela, maior a sua densidade e maior a sua pressão de degenerescência. Entretanto, o aumento da massa também implica aumento da gravidade, e existe uma massa limite (limite de Chandrasekhar) que a pressão de degenerescência consegue suportar.

Eventualmente, a anã branca pode ganhar massa de uma estrela companheira (e.g. um sistema binário), e ultrapassar o limite de Chandrasekhar. Se isso ocorrer, a gravidade ganha da pressão de degenerescência e a estrela começa a colapsar. A sua temperatura então começa a aumentar muito, o que acaba dando início a reações nucleares, que até então eram improváveis. Essas reações são muito violentas e, de fato, fazem a estrela explodir e expelir seu material para o meio inter-estelar próximo à estrela. Essa explosão é chamada supernova do tipo IA.

Em 1998, os astrônomos Riess, Schmidt e Perlmutter usaram medidas de luminosidade e redshift de supernovas IA para mostrar que a expansão do universo está ocorrendo de forma acelerada. Estas importantes medidas deram origem à chamada era da cosmologia de precisão, que busca entender as causas desta aceleração cósmica via medidas astronômicas precisas. Por esse trabalho, Riess, Schmidt e Perlmutter ganharam o prêmio Nobel em 2011.