

Apêndice I

Solução da Equação de Poisson

Na eletrostática, as cargas estão paradas, de modo que temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{I.1})$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad (\text{I.2})$$

onde ϕ é o potencial escalar elétrico. Combinando estas equações, temos:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Equação de Poisson}) \quad (\text{I.3})$$

A solução da Eq. de Poisson estabelece a relação entre $\phi(\vec{x})$ e $\rho(\vec{x})$. Em princípio a solução pode ser dada pelo método da função de Green (ver Apêndice L). Mas podemos obter a resposta de forma mais simples e intuitiva, usando o princípio da superposição e o conceito de potencial para cargas pontuais que vimos no Cap. 3. Foram inclusive essas idéias que usamos para obter o potencial de diferentes distribuições de carga naquele capítulo.

Dada uma origem arbitrária do sistema de coordenadas, suponha que uma distribuição de cargas com densidade volumétrica $\rho(\vec{x}')$ no ponto $\vec{x}'$ genérico produza um potencial $\phi(\vec{x})$ em um ponto fixo $\vec{x}$. Um volume infinitesimal $dV' = d^3x'$ em torno do ponto $\vec{x}'$ contém a carga infinitesimal $dq' = \rho(\vec{x}')dV'$. Como trata-se de uma carga infinitesimal, ela pode ser tratada como uma carga *pontual*, que produz o seguinte potencial $d\phi(\vec{x})$ em $\vec{x}$:

$$d\phi(\vec{x}) = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\rho(\vec{x}')d^3x'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{I.4})$$

Portanto, para obter o potencial total em $\vec{x}$, basta somar (integrar) todas as contribuições de todos os pontos $\vec{x}'$ para os quais $\rho(\vec{x}') \neq 0$. Portanto $\phi(\vec{x}) = \int d\phi(\vec{x})$, ou seja:

$$\phi(\vec{x}) = \int d\phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')d^3x'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{I.5})$$

Esta é, portanto, a solução da Eq. de Poisson.