

Apêndice A

Integral $\int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Vamos obter a primitiva da integral

$$\int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\text{A.1})$$

Fazemos a seguinte mudança de variável: $y \rightarrow a$ onde $a = \sqrt{x^2+y^2} + y$. Assim temos

$$\rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = (a-y) \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{da}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{a}{(a-y)}$$

$$\rightarrow dy = \frac{(a-y)}{a} da \quad (\text{A.3})$$

Portanto

$$\int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int \frac{1}{(a-y)} \frac{(a-y)}{a} da = \log a = \log(\sqrt{x^2+y^2} + y) \quad (\text{A.4})$$

Vamos agora derivar a resposta para checar que o integrando é obtido:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log(\sqrt{x^2+y^2} + y) &= \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2} + y)} \left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 \right] \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2} + y)} \left[\frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \checkmark \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Portanto

$$\int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \log(\sqrt{x^2+y^2} + y) \quad (\text{A.6})$$