

# Capítulo 11

## Ondas Eletromagnéticas

### 11.1 Equação de Onda Mecânica: Corda

Considere um pulso de onda que se propaga em uma corda esticada com extremidades fixas. Podemos obter a equação de ondas nesse caso usando a segunda Lei de Newton em um elemento da corda de comprimento  $\Delta x$ , e altura vertical  $u(x, t)$ , conforme a Fig.11.1.

Primeiramente, temos que a força horizontal no elemento de corda é nula, já que este não se movimenta nesta direção. Pela figura, cada lado do elemento tem uma força dada por  $H(x) = T \cos \theta$  e  $H(x + \Delta x) = T \cos \theta'$ . Temos então

$$H(x + \Delta x, t) - H(x, t) = 0 \rightarrow H(x) \text{ const.} \quad (11.1)$$

Já na direção vertical, as forças verticais  $V(x) = T \sin \theta$  e  $V(x + \Delta x) = T \sin \theta'$  se somam para acelerar a corda de acordo com a segunda Lei de Newton

$$\begin{aligned} F_{\text{tot}} &= ma \\ V(x + \Delta x, t) - V(x, t) &= (\lambda \Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} &= \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (11.2)$$

Tomando o limite  $\Delta x \rightarrow 0$ , obtemos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11.3)$$

Note agora que

$$V = T \sin \theta = T \cos \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = H \tan \theta \quad (11.4)$$

Como  $\tan \theta = \partial u / \partial x$ , temos  $V = H \partial u / \partial x$  e

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11.5)$$

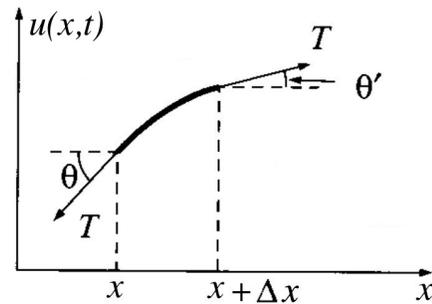


Figura 11.1: Força de tensão sobre um elemento de uma corda oscilante. Na horizontal, a força é nula, pois a corda não se move nessa direção. Na vertical, a força é dada pela segunda Lei de Newton, causando oscilação na corda. (Griffiths)

E como  $H$  não depende de  $x$ , obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{H} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11.6)$$

Vamos checar a unidade da combinação  $\lambda/H$ :

$$\left[ \frac{\lambda}{H} \right] = \frac{[M][L]^{-1}}{[M][L][T]^{-2}} = \frac{1}{[L^2][T]^{-2}} = \frac{1}{[\text{velocidade}]^2} \quad (11.7)$$

Portanto,  $\lambda/H$  tem dimensão de velocidade; como veremos a seguir ela é a velocidade de propagação da onda na direção  $x$ . Denotando então  $v = \lambda/H$ , obtemos finalmente a Equação de Onda em uma corda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{Equação de Ondas na Corda}) \quad (11.8)$$

## 11.2 Equação de Ondas Eletromagnéticas

### 11.2.1 Solução no Vácuo

- No vácuo, i.e. na ausência de cargas ( $\rho = 0$ ) e correntes ( $j = 0$ ), as Eqs. de Maxwell ficam

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (11.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (11.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (11.11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (11.12)$$

- Temos então

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \\ &= -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

e portanto

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (11.13)$$

ou, definindo  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ,

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (11.14)$$

- O mesmo procedimento nas equações para  $\vec{B}$  leva a

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (11.15)$$

i.e., no vácuo os campos  $E$  e  $B$  se propagam satisfazendo a equação de ondas clássica em 3 dimensões com velocidade  $v = c$ .

- Inserindo valores numéricos obtemos

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (11.16)$$

i.e. a velocidade de propagação, que resulta de quantidades puramente eletromagnéticas, é idêntica à velocidade da luz no vácuo.

- Isso quer dizer que a luz é exatamente uma onda eletromagnética se propagando: **unificação do eletromagnetismo e da ótica.**
- Questão:  $c$  é a velocidade da luz com relação a que referencial? A resposta a esta pergunta levou Einstein a desenvolver a Relatividade Especial e, com ela, revolucionar a física clássica no início do século XX.
- Note que a Eq. 11.14 é vetorial e, portanto, cada componente de  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  satisfaz uma equação de onda. Idem para  $\vec{B}$ .
- Por exemplo, se  $E_x = E_x(z, t)$  é função apenas da coordenada  $z$  e do tempo  $t$ , mas não de  $x$  e  $y$ , e  $E_y = E_z = 0$ , temos

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (11.17)$$

### Solução

Pode-se verificar que

$$E_x(z, t) = F(z \pm ct), \quad (11.18)$$

onde  $F$  é uma função qualquer, satisfaz a Eq. de onda unidimensional acima. Definindo  $\delta_{\pm} = z \pm ct$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial \delta_{\pm}} \frac{\partial \delta_{\pm}}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \delta_{\pm}} \\ \rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial \delta_{\pm}} \right) = \frac{\partial}{\partial \delta_{\pm}} \left( \frac{\partial F}{\partial \delta_{\pm}} \right) \frac{\partial \delta_{\pm}}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial \delta_{\pm}^2} \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial \delta_{\pm}} \frac{\partial \delta_{\pm}}{\partial t} = \pm c \frac{\partial F}{\partial \delta_{\pm}} \\ \rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \pm c \frac{\partial F}{\partial \delta_{\pm}} \right) = \frac{\partial}{\partial \delta_{\pm}} \left( \pm c \frac{\partial F}{\partial \delta_{\pm}} \right) \frac{\partial \delta_{\pm}}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \delta_{\pm}^2} \end{aligned}$$

que, portanto, satisfaz a Eq. de ondas.

Para encontrar  $\vec{B} = \vec{B}(z, t)$ , consideremos a Eqs. de Maxwell:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \left( 0, \frac{\partial E_x}{\partial z}, 0 \right) = -\left( \frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \left( -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z}, 0 \right) = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial E_x}{\partial t}, 0, 0 \right) \end{aligned} \quad (11.19)$$

Essas equações implicam

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad (11.20)$$

Portanto  $B_x$  e  $B_z$  são constantes no espaço e no tempo. Como estamos interessados apenas na parte oscilante dos campos, por simplicidade vamos tomar  $B_x = B_z = 0$ . Resta somente a componente  $B_y$ , para a qual temos as equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ -\frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \end{aligned} \quad (11.21)$$

Inserindo, e.g.  $E_x(z - ct)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial t} &= -\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial E_x}{\partial \delta_-} = \frac{\partial(E_x/c)}{\partial \delta_-} (-c) = \frac{\partial(E_x/c)}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial \delta_-} (-c) = \frac{\partial(E_x/c)}{\partial \delta_-} = \frac{\partial(E_x/c)}{\partial z} \end{aligned} \quad (11.22)$$

Essas duas equações implicam, desconsiderando soluções constantes,  $B_y(z, t) = E_x(z, t)/c$ , i.e.

$$\vec{E}(z, t) = F(z - ct)\hat{x} \quad (11.23)$$

$$\vec{B}(z, t) = \frac{F(z - ct)}{c}\hat{y} = \frac{1}{c}\hat{z} \times \vec{E} = \frac{\vec{c}}{c^2} \times \vec{E} \quad (11.24)$$

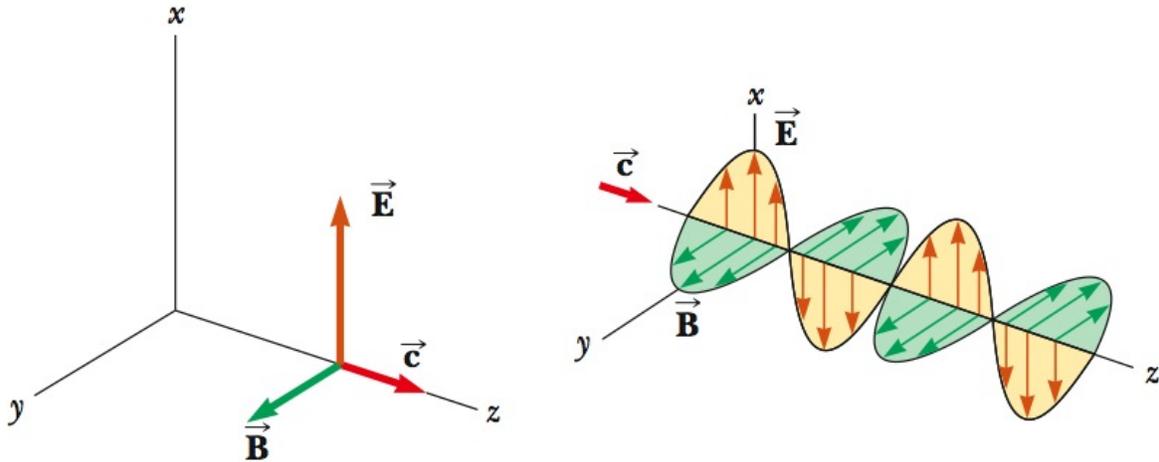


Figura 11.2: Propagação de ondas eletromagnéticas. Os campos  $E$  e  $B$  são perpendiculares entre si e a direção de propagação. (Serway)

Os campos se propagam ortogonais entre si e com a direção de propagação:  $\vec{E} \times \vec{B} \propto \vec{c}$ .

A solução  $F(z - ct)$  representa uma onda "progressiva", i.e. se propagando "para frente". Considere, e.g. a origem  $z = 0$  em  $t = 0$ , que tem altura  $E_x(0, 0) = F(0)$ . Após um tempo  $t = \delta t$ , a coordenada  $z = c\delta t$  terá a mesma altura  $E_x(c\delta t, \delta t) = F(c\delta t - c\delta t) = F(0) = E_x(0, 0)$ . Ou seja, a altura está se propagando no espaço com velocidade  $c$ . Similarmente,  $F(z + ct)$  representa uma onda "regressiva".

### Ondas Planas

As soluções correspondentes a *ondas planas* monocromáticas são dadas por uma forma específica da função  $F$  dada em termos de senos/cossenos:

$$E_x(z, t) = A \cos[k(z \pm ct)] = A \cos(kz \pm \omega t), \quad (11.25)$$

onde  $\omega = kc$ . Definindo  $k = 2\pi/\lambda$  e  $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda,  $T$  o período e  $\nu$  a frequência da onda, temos  $c = \lambda/T = \omega/k$ . Luzes de diferentes cores correspondem a onda de diferentes frequências, formando um espectro eletromagnético ( Fig 11.3 ).

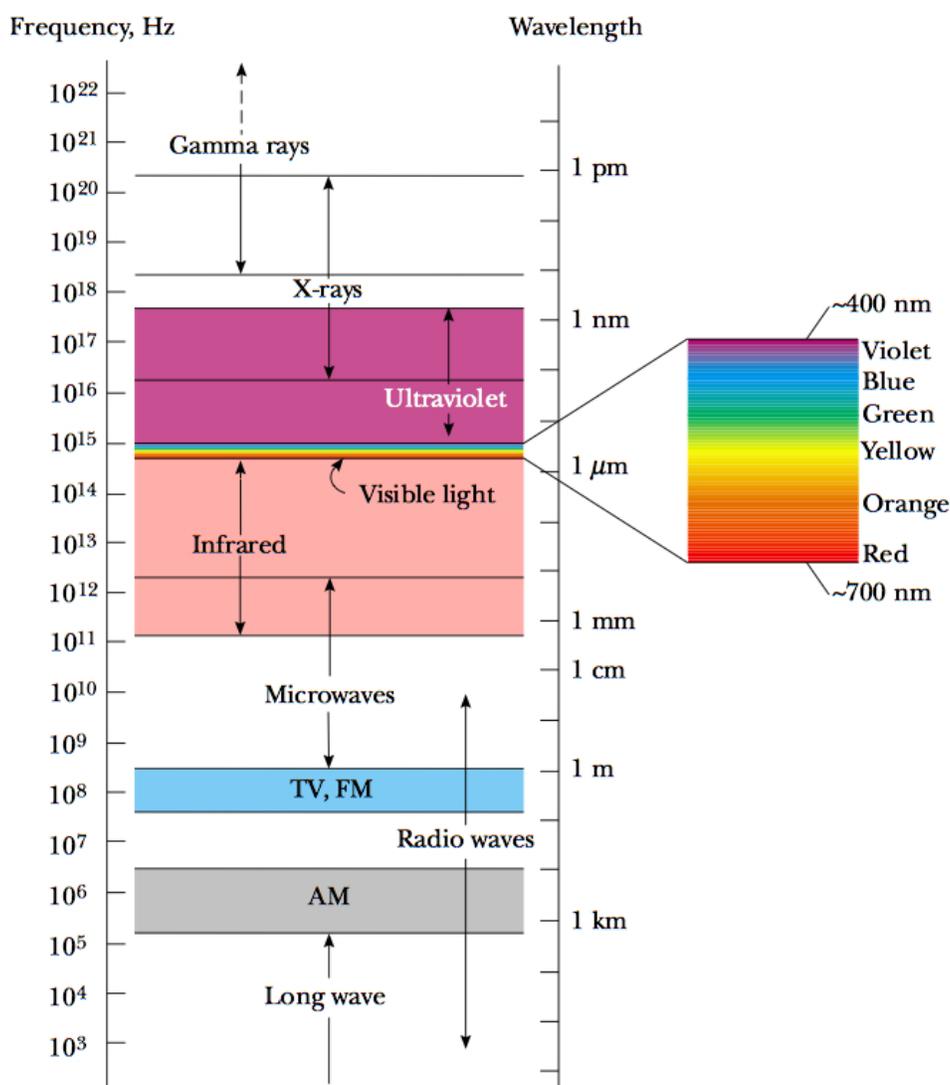


Figura 11.3: Espectro Eletromagnético. (Serway)

### 11.2.2 Solução Geral

Vamos agora considerar o caso geral em que a propagação dos campos ocorre na presença de cargas e correntes. Neste caso, as Equações de Maxwell são

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Usando a definição de potenciais eletromagnéticos,  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  e  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , temos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot \left( -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \phi - \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} \\ &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}\tag{11.26}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\ &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \vec{j} - \vec{\nabla} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{11.27}$$

Essas duas equações implicam portanto

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi + \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} + \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)\end{aligned}\tag{11.28}$$

Escolhendo o calibre de Lorenz, em que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0\tag{11.29}$$

e, usando  $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$ , as equações se tornam

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}\tag{11.30}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}\tag{11.31}$$

i.e. os potenciais se propagam de acordo com equações de onda não-homogêneas.

Vimos que, no vácuo, os próprios campos satisfazem a equação de onda homogênea. Vemos agora, que, no vácuo, os potenciais também satisfazem a equação de onda homogênea.

Aqui não nos preocuparemos em encontrar a solução destas equações, já que estaremos interessados apenas no caso mais simples da solução no vácuo. Para detalhes, ver Apêndice N.

### 11.3 Energia de Ondas Eletromagnéticas

Vimos que a densidade de energia eletromagnética (energia por unidade de volume)  $u_{EB} = u_E + u_B$  é dada por

$$u_{EB} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (11.32)$$

E sua derivada temporal fica (usando  $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$ ):

$$\frac{\partial u_{EB}}{\partial t} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (11.33)$$

Das Eqs. de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (11.34)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (11.35)$$

Multiplicando escalarmente a primeira por  $\vec{E}/\mu_0$  e a segunda por  $\vec{B}/\mu_0$  (para aparecer termos que queremos), temos

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B}}{\mu_0} - \vec{j} \cdot \vec{E} \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\frac{\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E}}{\mu_0} \end{aligned} \quad (11.36)$$

e portanto, a equação de densidade de energia fica

$$\frac{\partial u_{EB}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \left[ \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} \right] \quad (11.37)$$

Agora considere a identidade:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) &= \nabla \cdot (E_y B_z - E_z B_y, E_z B_x - E_x B_z, E_x B_y - E_y B_x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (E_y B_z - E_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y} (E_z B_x - E_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x B_y - E_y B_x) \\ &= B_z \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_y \frac{\partial B_z}{\partial x} - B_y \frac{\partial E_z}{\partial x} - E_z \frac{\partial B_y}{\partial x} \\ &\quad B_x \frac{\partial E_z}{\partial y} + E_z \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_z \frac{\partial E_x}{\partial y} - E_x \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ &\quad B_y \frac{\partial E_x}{\partial z} + E_x \frac{\partial B_y}{\partial z} - B_x \frac{\partial E_y}{\partial z} - E_y \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ &= B_x \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + B_y \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + B_z \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ &\quad - E_x \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - E_y \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) - E_z \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \\ &= B_x (\nabla \times E)_x + B_y (\nabla \times E)_y + B_z (\nabla \times E)_z \\ &\quad - E_x (\nabla \times B)_x - E_y (\nabla \times B)_y - E_z (\nabla \times B)_z \\ &= \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} \end{aligned} \quad (11.38)$$

Portanto,

$$\frac{\partial u_{EB}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (11.39)$$

Definindo o vetor de Poynting  $\vec{S}$ :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (\text{Vetor de Poynting}) \quad (11.40)$$

temos

$$\frac{\partial u_{EB}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \nabla \cdot \vec{S} \quad (11.41)$$

Vamos interpretar o primeiro termo no lado direito. Lembre que a Força de Lorentz sobre uma carga  $q$  é:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (11.42)$$

O trabalho  $W$  feito por essa força altera a energia mecânica da carga de  $\Delta U_{\text{mec}}$ . Portanto o trabalho por unidade de tempo (potência) feito por essa força sobre a carga muda sua energia mecânica de:

$$P = \frac{\partial U_{\text{mec}}}{\partial t} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{v} \cdot \vec{E} \quad (11.43)$$

Assim, o trabalho por unidade de tempo e por unidade de volume, fica (usando  $\rho = q/\Delta \text{vol}$  e  $\vec{j} = \rho\vec{v}$ )

$$\frac{P}{\Delta \text{vol}} = \frac{\partial u_{\text{mec}}}{\partial t} = \frac{q}{\Delta \text{vol}} \vec{v} \cdot \vec{E} = \rho\vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (11.44)$$

Portanto,  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  representa a taxa de variação temporal da densidade de energia mecânica das cargas, ou seja é o trabalho por unidade de tempo e por unidade de volume feito (pelo campo  $\vec{E}$ ) sobre as cargas/correntes em movimento.

Assim, parte da energia eletromagnética é usada para acelerar cargas e correntes e é convertida em energia mecânica (cinética ou potencial) das cargas.

Já o termo  $\nabla \cdot \vec{S}$  representa a fluxo de energia que o campo eletromagnético carrega como energia em si próprio para fora do sistema.

De fato, na ausência de correntes ( $\vec{j} = 0$ ), temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0 \quad (11.45)$$

i.e. toda a variação na densidade de energia eletromagnética do sistema se deve ao divergente de  $\vec{S}$ . Comparando esta equação com a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (11.46)$$

temos:

$$\vec{j} = \rho\vec{v}: \text{ densidade de corrente de cargas (carga por tempo por área)} \quad (11.47)$$

$$\vec{S} = u\vec{c}: \text{ densidade de corrente de energia (energia por tempo por área)} \quad (11.48)$$

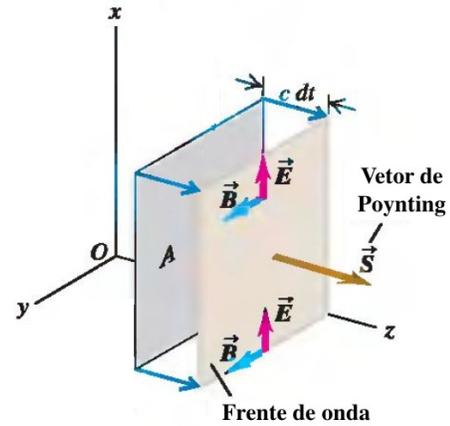


Figura 11.4: Vetor de Poynting  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} / \mu_0$  aponta na direção de propagação, i.e. perpendicular a  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . (Young)

### 11.3.1 Intensidade

O vetor de Poynting  $\vec{S}$ , assim como os campos, pode estar oscilando no tempo. Definimos então a intensidade  $I$  da onda eletromagnética como o valor médio de  $S$ :

$$I = \langle S \rangle : \text{Intensidade (energia média por tempo por área)} \quad (11.49)$$

### 11.3.2 Ondas Planas

No caso geral

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (11.50)$$

Para uma onda plana,  $B = E/c$ , portanto (usando  $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ )

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2c^2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (11.51)$$

ou seja,  $u_E = u_B$  e metade da energia está em cada campo. Temos então

$$u = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} \quad (11.52)$$

Supondo, como anteriormente,  $\vec{E} = E\hat{x}$ ,  $\vec{B} = (E/c)\hat{y}$ , temos (usando  $1/\mu_0 = c^2\epsilon_0$ )

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} \hat{z} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \hat{z} = (\epsilon_0 E^2) c \hat{z} = uc \hat{z} = u\vec{c} \quad (11.53)$$

E a intensidade  $I$  fica

$$I = \langle S \rangle = \langle uc \rangle = c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle \quad (11.54)$$

Para um campo senoidal  $E = E_0 \sin(kz - \omega t)$ , temos  $\langle E^2 \rangle = E_0^2 \langle \sin^2(kz - \omega t) \rangle$ . Temos

$$\langle \sin^2(kz - \omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \sin^2(kz - \omega t) = \frac{1}{2}, \quad (11.55)$$

onde  $T = 2\pi/\omega$  (ver Apêndice O). Assim, obtemos

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad (11.56)$$

## 11.4 Momento de Ondas Eletromagnéticas

Considere novamente a Força de Lorentz sobre uma carga  $q$ :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (11.57)$$

A força por unidade de volume  $f$  em uma região fica

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\Delta \text{vol}} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad (11.58)$$

Usando a Lei de Ampere para eliminar  $\vec{j}$ , temos

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \left( \frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B} \quad (11.59)$$

Por outro lado, temos a identidade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \end{aligned} \quad (11.60)$$

onde usamos a Lei de Faraday na segunda linha. Portanto

$$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) + \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \quad (11.61)$$

Portanto, a força por unidade de volume fica

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu_0} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \quad (11.62)$$

Finalmente, usando  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ , e também  $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$  e o fato de que  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  pode ser inserido sem alterar a equação, temos

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \rho\vec{E} - \left( \frac{\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})}{\mu_0} + \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) \\ &= \left[ \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{\vec{B}(\nabla \cdot \vec{B})}{\mu_0} - \left( \frac{\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})}{\mu_0} + \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \right) \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{S}}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (11.63)$$

Agora note que força é a derivada temporal do momento. Pode-se mostrar que o termo entre colchetes pode ser escrito como um *divergente generalizado* e representa o momento por unidade de volume que sai do sistema de cargas/campos, similarmente ao que o vetor  $\vec{S}$  fazia com a energia.

Vamos calcular por exemplo a componente  $z$  dos termos com  $\vec{E}$ :

$$\begin{aligned} & \left[ (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \right]_z \\ &= \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) E_z - E_x \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + E_y \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial(E_x E_z)}{\partial x} + \frac{\partial(E_y E_z)}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial(E_x^2 + E_y^2 - E_z^2)}{\partial z} \\ &= \nabla \cdot \left( E_x E_z, E_y E_z, \frac{-(E_x^2 + E_y^2 - E_z^2)}{2} \right) \\ &= -\nabla \cdot \left( -E_x E_z, -E_y E_z, \frac{(E^2 - 2E_z^2)}{2} \right) \end{aligned} \quad (11.64)$$

O mesmo se aplica aos termos com  $\vec{B}$ , portanto a componente  $z$  do colchete da Eq. 11.63 fica:

$$[\dots]_z = -\nabla \cdot \left( -\epsilon_0 E_x E_z - \frac{1}{\mu_0} B_x B_z, -\epsilon_0 E_y E_z - \frac{1}{\mu_0} B_y B_z, \frac{\epsilon_0 (E^2 - 2E_z^2)}{2} + \frac{(B^2 - 2B_z^2)}{2\mu_0} \right) \quad (11.65)$$

Vamos considerar o caso da onda com  $\vec{E} = E\hat{x}$  (ou seja  $E_y = E_z = 0$ ), e  $\vec{B} = E/c\hat{y}$  (ou seja  $B_x = B_z = 0$ ). Portanto o vetor de Pointing é  $\vec{S} = \epsilon_0 E^2 c\hat{z} = \epsilon_0 E^2 \vec{c}$ , e

$$\begin{aligned} [\dots]_z &= -\nabla \cdot \left( 0, 0, \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \\ &= -\nabla \cdot (0, 0, \epsilon_0 E^2) \\ &= -\nabla \cdot (\epsilon_0 E^2 \hat{z}) = -\nabla \cdot \left( \frac{\epsilon_0 E^2 c}{c^2} c\hat{z} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{S}{c^2} \vec{c} \right) \end{aligned} \quad (11.66)$$

Assim, a componente  $z$  da Eq. 11.63 fica:

$$f_z = -\nabla \cdot \left( \frac{S}{c^2} \vec{c} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S}{c^2} \right). \quad (11.67)$$

O lado esquerdo desta equação representa a variação do momento das cargas na direção  $z$ :

$$f_z = \frac{\partial p_{\text{carga}}}{\partial t} \quad (11.68)$$

Portanto

$$\frac{\partial p_{\text{carga}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S}{c^2} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{S}{c^2} \vec{c} \right) \quad (11.69)$$

Assim, o segundo termo na Eq. 11.69 deve representar a força por unidade de volume dos próprios campos eletromagnéticos. Temos então vetorialmente:

$$\vec{f}_{EM} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{S}}{c^2} \right) = \frac{\partial \vec{p}_{EM}}{\partial t} \quad (11.70)$$

onde  $\vec{p}_{EM}$  é o momento por unidade de volume dos campos eletromagnéticos. Portanto

$$\vec{p}_{EM} = \frac{\vec{S}}{c^2}. \quad (11.71)$$

Assim, a Eq. 11.69 fica finalmente

$$\frac{\partial (p_{\text{carga}} + p_{EM})}{\partial t} = -\nabla \cdot (p_{EM} \vec{c}) \quad (11.72)$$

Como  $\vec{S} = (u_{EM}c)\hat{c}$ , temos

$$\vec{p}_{EM} = \frac{u_{EM}}{c} \hat{c} \quad (11.73)$$

Multiplicando pelo volume que estamos considerando, as densidades de momento e energia passam a ser o momento  $P_{EM}$  e energia  $U_{EM}$  totais no volume, e temos:

$$\vec{P}_{EM} = \frac{U_{EM}}{c} \hat{c} \quad \text{ou} \quad U = Pc \quad \text{para campos EM} \quad (11.74)$$

Nota: No contexto de relatividade especial, a energia de uma partícula qualquer é dada por

$$U = \sqrt{(Pc)^2 + (mc^2)^2} \quad (11.75)$$

Quando a partícula está parada ( $P = 0$ ), temos a fórmula de Einstein  $U = mc^2$ .

Quando a partícula não tem massa, caso dos fótons de luz,  $U = Pc$ , como acima para a radiação.

### 11.4.1 Pressão de Radiação

Suponha que a radiação eletromagnética seja *absorvida* por uma superfície de área  $A$ , e que esta absorção ocorra em um tempo  $\Delta t$ , no qual a onda percorre a distância  $c\Delta t$  e transfere seu momento linear à superfície, exercendo sobre esta uma força e, portanto, uma pressão. A variação de momento da onda neste tempo é dada por:

$$\begin{aligned}\Delta P_{EM} &= \langle p_{EM} \rangle \Delta \text{vol} = \frac{\langle S \rangle}{c^2} (Ac\Delta t) \\ &= \frac{I}{c} A \Delta t\end{aligned}\quad (11.76)$$

Portanto, a radiação exerce sobre a superfície uma força

$$F_{EM} = \frac{\Delta P_{EM}}{\Delta t} = \frac{I}{c} A \quad (11.77)$$

e uma pressão  $P = F_{EM}/A$

$$P = \frac{I}{c} \quad \text{Pressão de Radiação (absorção)} \quad (11.78)$$

Quando a onda é *refletida* pela superfície, ao invés de absorvida, a variação no momento da onda é 2 vezes o momento inicial, i.e.  $\Delta P_{EM} = 2\langle p_{EM} \rangle \Delta \text{vol}$ , e portanto

$$P = \frac{2I}{c} \quad \text{Pressão de Radiação (reflexão)} \quad (11.79)$$

Existe uma maneira *eurística* de entender como a radiação faz uma força sobre a superfície. Considere uma carga positiva na superfície. O campo elétrico  $\vec{E}$  fará com que esta carga tenda a se mover na direção de  $\vec{E}$ . Mas, assim que a carga tiver uma velocidade nesta direção, ela sofrerá uma força magnética devido a  $\vec{B}$  na direção e sentido de  $\vec{c}$ , i.e. na direção de propagação da onda. No caso de cargas negativas, a carga se move no sentido oposto a  $\vec{E}$ , mas novamente a força magnética aponta no sentido de  $\vec{c}$ . Portanto, todas as cargas da superfície sofrem força na direção de propagação e, desta forma, a radiação "empurra" a superfície.

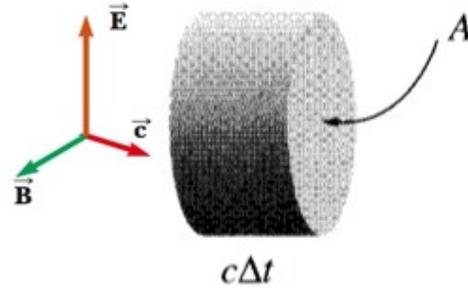


Figura 11.5: Onda eletromagnética é absorvida por uma superfície de área  $A$  em um tempo  $\Delta t$ , transferindo a esta seu momento linear e exercendo uma pressão de radiação. (Adaptado de Griffiths e Serway)