Apêndice C

Gradiente de $f(r)$

Suponha uma função f que dependa apenas da magnitude do vetor radial $\vec{r} = (x, y, z)$, ou seja da coordenada radial r em coordenadas esféricas, i.e. $f = f(r)$. Temos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{C.1}$$

O gradiente de f em coordenadas cartesianas é

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \tag{C.2}$$

Temos por exemplo que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial r} \tag{C.3}$$

Similarmente,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial r} \tag{C.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{\partial f}{\partial r} \tag{C.5}$$

Assim,

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{z}{r}\frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \tag{C.6}$$

Portanto, como $\hat{r} = \vec{r}/r$:

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} \tag{C.7}$$