Apêndice M

Propriedades de Ondas Eletromagnéticas no Vácuo

Neste apêndice, vamos ilustrar algumas propriedades mais gerais das ondas eletromagnéticas no vácuo. Vimos que as Equações de Maxwell no vácuo implicam as equações de evolução ondulatória para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{M.1}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{M.2}$$

M.1 Solução Geral no Vácuo

No caso unidimensional em que o campo E apontava na direção x e se propagava na direção z, havíamos achado a solução como qualquer função $F(z - ct)$. No caso tridimensional, temos que a solução geral para o campo $\vec{E}$ será um vetor $\vec{F}(\vec{x} - \vec{c}t)$. Para construir uma quantidade escalar como argumento de $\vec{F}$, pode-se fazer o produto escalar com um vetor de onda $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = k\hat{c}$, que representará a direção de propagação da onda:

$$\vec{E} = \vec{E}[\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{c}t)] \tag{M.3}$$

Os campos podem ser escritos como:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) = (E_x, E_y, E_z) \tag{M.4}$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) = (B_x, B_y, B_z) \tag{M.5}$$

onde $w = \vec{k} \cdot \vec{c} = kc$. Usando a notação $\delta = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$, podemos facilmente notar que os campos acima de fato satisfazem as Eqs. de onda:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} &= \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \delta^2} k_x^2 + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \delta^2} k_y^2 + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \delta^2} k_z^2 = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \delta^2} k^2 \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \delta^2}\omega^2 \end{aligned} \tag{M.6}$$

Como $\omega = kc$, a Eq. de onda é satisfeita.

M.2 Direções Relativas de $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{c}$

Temos agora da Lei de Gauss no vácuo:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial E_x}{\partial\delta}\frac{\partial\delta}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial\delta}\frac{\partial\delta}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial\delta}\frac{\partial\delta}{\partial z}=0 \tag{M.7}$$

Usando $\partial\delta/\partial x=k_x$ etc., integrando a equação resultante em δ e desprezando constantes de integração, temos:

$$k_xE_x+k_yE_y+k_zE_z=0 \qquad\rightarrow\qquad \boxed{\vec{k}\cdot\vec{E}=0} \tag{M.8}$$

Portanto, a direção de *polarização* do campo $\vec{E}$ é necessariamente perpendicular à direção de propagação da onda. Se, por exemplo, o vetor $\vec{E}$ apontar na direção x, ele só pode se propagar nas direções y ou z.

Como $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, o mesmo vale para o campo magnético, que também é perpendicular à direção de propagação:

$$\boxed{\vec{k}\cdot\vec{B}=0} \tag{M.9}$$

Portanto, ambos os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são normais à direção de propagação e, definem assim um plano perpendicular a $\vec{k}$.

Vamos agora considerar a Lei de Faraday:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z},\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x},\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\\
&= \left(\frac{\partial E_z}{\partial\delta}k_y-\frac{\partial E_y}{\partial\delta}k_z,\frac{\partial E_x}{\partial\delta}k_z-\frac{\partial E_z}{\partial\delta}k_x,\frac{\partial E_y}{\partial\delta}k_x-\frac{\partial E_x}{\partial\delta}k_y\right)\\
&= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial\delta}(-\omega)\\
&= \left(\frac{\partial B_x}{\partial\delta}\omega,\frac{\partial B_y}{\partial\delta}\omega,\frac{\partial B_z}{\partial\delta}\omega\right)
\end{aligned} \tag{M.10}$$

Integrando componente a componente em δ na segunda e quarta linhas, e ignorando as constantes de integração:

$$\omega B_x=E_zk_y-E_yk_z \tag{M.11}$$
$$\omega B_y=E_xk_z-E_zk_x \tag{M.12}$$
$$\omega B_z=E_yk_x-E_xk_y \tag{M.13}$$

Usando estas componentes de $\vec{B}$, temos:

$$\begin{aligned}
\omega\vec{E}\cdot\vec{B} &= (E_x,E_y,E_z)\cdot(\omega B_x,\omega B_y,\omega B_z)=E_x(E_zk_y-E_yk_z)+E_y(E_xk_z-E_zk_x)+E_z(E_yk_x-E_xk_y)\\
&= E_xE_zk_y-E_xE_yk_z+E_yE_xk_z-E_yE_zk_x+E_zE_yk_x-E_zE_xk_y=0
\end{aligned} \tag{M.14}$$

Portanto, $\boxed{\vec{E}\cdot\vec{B}=0}$ e $\vec{E}$ e $\vec{B}$ também são perpendiculares entre si e, como vimos anteriormente, com a direção de propagação $\vec{k}=k\hat{c}$.

Por fim, as Eqs. M.13 implicam que $\omega\vec{B}=\vec{k}\times\vec{E}$ ou como $c=\omega/k$, temos $\boxed{c\vec{B}=\hat{c}\times\vec{E}}$. Como os 3 vetores são perpendiculares entre si, temos que $\boxed{B=E/c}$.

M.2.1 Módulo de $\vec{B}$

Podemos obter o módulo de $\vec{B}$ de outra forma:

$$\begin{aligned}
\omega^2 B^2 &= \omega^2 B_x^2 + \omega^2 B_y^2 + \omega^2 B_z^2 \\
&= (E_z k_y - E_y k_z)^2 + (E_x k_z - E_z k_x)^2 + (E_y k_x - E_x k_y)^2 \\
&= E_x^2(k_y^2 + k_z^2) + E_y^2(k_x^2 + k_z^2) + E_z^2(k_x^2 + k_y^2) - 2E_x k_x E_y k_y - 2E_y k_y E_z k_z - 2E_z k_z E_x k_x
\end{aligned}$$

Usando $E_x k_x = -E_y k_y - E_z k_z$, temos:

$$\begin{aligned}
\omega^2 B^2 &= E_x^2(k_y^2 + k_z^2) + E_y^2(k_x^2 + k_z^2) + E_z^2(k_x^2 + k_y^2) \\
&\quad + 2E_y^2 k_y^2 + 2E_y k_y E_z k_z - 2E_y k_y E_z k_z + 2E_z k_z E_y k_y + 2E_z^2 k_z^2 \\
&= E_x^2(k_y^2 + k_z^2) + E_y^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + E_z^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + \underbrace{E_y^2 k_y^2 + 2E_z k_z E_y k_y + E_z^2 k_z^2}_{(E_y k_y + E_z k_z)^2 = E_x^2 k_x^2} \\
&= (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \\
&= k^2 E^2 \quad \rightarrow \quad B = \frac{k}{\omega} E \quad \text{ou} \quad \boxed{B = \frac{E}{c}}
\end{aligned} \tag{M.15}$$

M.2.2 Vetor de Poynting

Como $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{c}$, estes 3 vetores formam então um triedro. Além disto $\vec{B} = (\hat{c} \times \vec{E})/c$, o que define as direções relativas. Vamos examinar por meio das componentes o vetor $\vec{E} \times \vec{B}$, que já sabemos ser proporcional a $\vec{k}$:

$$\omega \vec{E} \times \vec{B} = (E_x, E_y, E_z) \times (E_z k_y - E_y k_z, E_x k_z - E_z k_x, E_y k_x - E_x k_y) \tag{M.16}$$

Vamos calcular a componente x do produto vetorial:

$$\begin{aligned}
\omega \vec{E} \times \vec{B}|_x &= E_y(E_y k_x - E_x k_y) - E_z(E_x k_z - E_z k_x) \\
&= E_y^2 k_x - E_x E_y k_y - E_x E_z k_z + E_z^2 kx \\
&= (E_y^2 + E_z^2)k_x + E_x(\underbrace{-E_y k_y - E_z k_x}_{E_x k_x}) = E^2 k_x
\end{aligned} \tag{M.17}$$

Similarmente para as componentes y e z, portanto:

$$\omega \vec{E} \times \vec{B} = (E^2 k_x, E^2 k_y, E^2 k_z) = E^2(k_x, k_y, k_z) = E^2 \vec{k} \tag{M.18}$$

Assim

$$\boxed{\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{\omega} \vec{k} = \frac{E^2}{c} \hat{c}} \tag{M.19}$$

Note que

$$|\vec{E} \times \vec{B}| = EB = E^2/c \quad \rightarrow \quad B = E/c \quad \text{como antes.} \tag{M.20}$$

Por fim, definimos $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \hat{c} = \frac{E^2}{\mu_0 c^2} \vec{c} = \epsilon_0 E^2 \vec{c} = u\vec{c}. \tag{M.21}$$