Apêndice L

Função de Green

L.1 Função de Green em 3 dimensões

Suponha que uma equação diferencial com um operador diferencial linear $\mathbf{L}$ seja dada por

$$\mathbf{L}[\phi(\vec{x})] = \rho(\vec{x}) \tag{L.1}$$

onde $\rho(\vec{x})$ é uma função conhecida, e $\phi(\vec{x})$ é a função que gostaríamos de achar como solução desta equação diferencial. Note que a Eq. de Poisson é um caso particular para o operador Laplaciano, ou seja $\mathbf{L} = \nabla^2$.

Vamos supor que sabemos a solução da equação no caso em que $\rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$, e vamos denotar essa solução como a função de Green $G(\vec{x})$, ou seja:

$$\mathbf{L}[G(\vec{x})] = \delta(\vec{x}) \tag{L.2}$$

A função de Green pode então ser usada para construir uma solução particular para a Eq. L.1. De fato, das propriedades da função delta, podemos escrever a Eq. L.1 como:

$$\mathbf{L}[\phi(\vec{x})] = \rho(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x'})\delta(\vec{x} - \vec{x'})dV' \tag{L.3}$$

Usando a Eq. L.2, e a propriedade linear do operador $\mathbf{L}$ que atua apenas na variável $\vec{x}$, e não em $\vec{x'}$, temos:

$$\mathbf{L}[\phi(\vec{x})] = \int \rho(\vec{x'})\delta(\vec{x} - \vec{x'})dV' = \int \rho(\vec{x'})\mathbf{L}[G(\vec{x} - \vec{x'})]dV' = \mathbf{L}\left[\int \rho(\vec{x'})G(\vec{x} - \vec{x'})dV'\right] \tag{L.4}$$

Segue que os argumentos de $\mathbf{L}$ no primeiro e último termos devem ser iguais, a menos de uma função $F(\vec{x})$ que satisfaz a versão homogênea da equação original, i.e. para a qual $\mathbf{L}[F(\vec{x})] = 0$. Desta forma:

$$\phi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x'})G(\vec{x} - \vec{x'})dV' + F(\vec{x}) \tag{L.5}$$

L.2 Função de Green em 4 dimensões

Podemos generalizar as expressões em 3 dimensões para o caso em que incluimos o tempo t. Suponha então que o operador diferencial linear agora possa incluir derivadas espaciais e temporais:

$$\mathbf{L}[\phi(\vec{x}, t)] = \rho(\vec{x}, t) \tag{L.6}$$

A Eq. de Ondas é um caso particular para o operador D'Alambertiano, ou seja

$$\mathbf{L} = \Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{L.7}$$

Neste caso a função de Green $G(\vec{x},t)$ é definida por:

$$\mathbf{L}[G(\vec{x},t)] = \delta(\vec{x})\delta(t) \tag{L.8}$$

E a solução da equação diferencial fica

$$\phi(\vec{x},t) = \int d^3x' \int dt' \ \rho(\vec{x'},t')G(\vec{x}-\vec{x'},t-t') \ \ + \ \ F(\vec{x},t) \tag{L.9}$$

onde $\mathbf{L}[F(\vec{x},t)] = 0$

L.3 Laplaciano

Comparando as Eqs. I.5 e L.5, temos que a função de Green do operador Laplaciano é dada por $G(\vec{x}-\vec{x'}) = -1/4\pi|\vec{x}-\vec{x'}|$, ou similarmente

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi r} \tag{L.10}$$

Vamos supor que não soubéssemos disto e quiséssemos achar a função de Green diretamente de sua definição, ou seja

$$\nabla^2 G(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \tag{L.11}$$

L.3.1 Método 1

Primeiro vamos integrar esta equação em uma esfera centrada na origem, e usar o Teorema de Gauss, obtendo:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}G dV &= \int_V \delta(\vec{x})dV \\ \oint_S \vec{\nabla}G\cdot d\vec{S} &= 1 \end{aligned} \tag{L.12}$$

Como no lado esquerdo estamos integrando na superfície de uma esfera centrada na origem, temos $d\vec{S} = r^2 d\Omega\hat{r}$. Desta forma, apenas a componente radial de $\vec{\nabla}G$ contribuirá para a integral. Temos:

$$\oint_S \vec{\nabla}G\cdot d\vec{S} = \oint \frac{dG}{dr}\hat{r}\cdot(r^2 d\Omega\hat{r}) = r^2\oint\frac{dG}{dr}d\Omega \tag{L.13}$$

Note agora que na Eq. L.11, a função $\delta(\vec{x})$ atua apenas na origem $\vec{x}=0$, e portanto impõe simetria esférica com respeito à origem do lado direito da equação. Assim, para que o lado esquerdo tenha a mesma simetria, é preciso que $G(\vec{x}) = G(r)$, caso contrário as derivadas de ∇^2 atuariam em θ e ϕ, quebrando a simetria esférica do lado esquerdo. Desta forma dG/dr também é função apenas de r e pode sair da integral no ângulo sólido (em θ e ϕ):

$$\oint_S \vec{\nabla} G \cdot d\vec{S} = r^2 \frac{dG}{dr} \underbrace{\int\int \sin\theta d\theta d\phi}_{=4\pi} = 1 \tag{L.14}$$

Assim,

$$r^2 \frac{dG}{dr} = \frac{1}{4\pi} \quad \rightarrow \quad \frac{dG}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2} \tag{L.15}$$

Por fim, integrando, e ignorando a constante de integração, temos:

$$G(\vec{x}) = G(r) = -\frac{1}{4\pi r} \tag{L.16}$$

L.3.2 Método 2

Uma outra possibilidade é usar Transformadas de Fourier (TF). A transformada de uma função $\phi(\vec{x})$ e sua inversa são dadas por

$$\mathcal{F}\left[\phi(\vec{x})\right] = \tilde{\phi}(\vec{k}) \;=\; \int d^3x \phi(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{L.17}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\phi(\vec{k})\right] = \phi(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \tilde{\phi}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{L.18}$$

Tomando a TF da Eq. L.11, temos

$$-k^2 \tilde{G}(\vec{k}) = 1 \quad \text{ou} \quad \tilde{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{k^2} \tag{L.19}$$

Tomando a TF inversa deste resultado, temos

$$\begin{aligned}
G(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \tilde{G}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} dk\; k^2\; \frac{e^{ikr\cos\theta}}{k^2} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}(2\pi)\int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta e^{ikr\cos\theta} \qquad \text{(Tome } u = \cos\theta,\; du = -\sin\theta d\theta\text{)} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} dk \int_{-1}^{1} du\; e^{ikru} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} dk \underbrace{\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr}}_{\frac{2\sin(kr)}{kr}} \\
&= = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} dk \frac{\sin(kr)}{kr} = -\frac{1}{2\pi^2 r}\underbrace{\int_0^{\infty} dy \frac{\sin y}{y}}_{\pi/2} = -\frac{1}{4\pi r}
\end{aligned} \tag{L.20}$$

L.4 D'Alambertiano

Agora gostaríamos de encontrar a função de Green $G(\vec{x}, t)$ do operador d'Alambertiano $\Box^2$:

$$\Box^2 G(\vec{x}, t) = \nabla^2 G(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = \delta(\vec{x})\delta(t) \tag{L.21}$$

L.4.1 Método 1

(ver Jackson 6.4)

A Transformada de Fourier (TF) da componente *temporal* de uma função $\phi(\vec{x},t)$, e sua inversa são dadas por (note que a coordenada espacial $\vec{x}$ não é transformada aqui, veja Método 2 abaixo):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\phi(\vec{x},t)\right] = \tilde{\phi}(\vec{x},\omega) &= \int dt\ \phi(\vec{x},t)e^{-i\omega t}\,, && \text{(L.22)} \\ \mathcal{F}^{-1}\left[\phi(\vec{x},\omega)\right] = \phi(\vec{x},t) &= \frac{1}{2\pi}\int d\omega\ \tilde{\phi}(\vec{x},\omega)e^{i\omega t}\,. && \text{(L.23)} \end{aligned}$$

A idéia deste método é considerar a equação original:

$$\nabla^2\phi(\vec{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\vec{x},t)}{\partial t^2} = \rho(\vec{x},t)\,, \tag{L.24}$$

e tomar a TF temporal desta equação para obter:

$$\nabla^2\tilde{\phi}(\vec{x},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\phi}(\vec{x},\omega) = \tilde{\rho}(\vec{x},\omega)\,. \tag{L.25}$$

Note que a transformada temporal substitui a incoveniente dependência temporal da equação diferencial original, tornando-a um conjunto de equações diferenciais apenas com derivadas espaciais (uma equação para cada valor de frequência ω).

Para cada valor fixo de ω, podemos então buscar a função de Green $G_\omega(\vec{x})$ da Eq. L.25:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)G_\omega(\vec{x},\vec{x'}) = \delta(\vec{x}-\vec{x'})\,. \tag{L.26}$$

Como no lado direito a função δ depende apenas da coordenada $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x'}$ e tem simetria esférica em torno de $\vec{r} = 0$, a função de Green também deve depender apenas de $r = |\vec{r}|$, i.e. $G_\omega(\vec{x},\vec{x'}) = G_\omega(r)$. Em coordenadas esféricas, portanto, o Laplaciano ∇^2 atua apenas na coordenada r:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[rG_\omega(r)\right] + \frac{\omega^2}{c^2}G_\omega(r) = \delta(\vec{r})\,. \tag{L.27}$$

Em qualquer ponto com $r \neq 0$, a função $\delta(\vec{r})$ se anula, e temos que $rG_\omega(r)$ satisfaz

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[rG_\omega(r)\right] + \frac{\omega^2}{c^2}\left[rG_\omega(r)\right] = 0\,, \tag{L.28}$$

cujas soluções são dadas por

$$rG_\omega^\pm(r) = Ae^{\pm i\omega r/c}\,. \tag{L.29}$$

Como para $\omega = 0$, devemos recuperar a Função de Green da Eq. de Poisson, temos $A = -1/4\pi$ e

$$G_\omega^\pm(r) = -\frac{e^{\pm i\omega r/c}}{4\pi r} \tag{L.30}$$

Desta forma, a solução da Eq. L.25 fica

$$\tilde{\phi}^\pm(\vec{x},\omega) = \int d^3x' G_\omega^\pm(\vec{x}-\vec{x'})\tilde{\rho}(\vec{x'},\omega) = -\int d^3x' \frac{e^{\pm i\omega r/c}}{4\pi r}\int dt'\ \rho(\vec{x},t')e^{-i\omega t'} \tag{L.31}$$

Por fim, $\phi(\vec{x},t)$ é obtido via transformada inversa:

$$\begin{aligned}
\phi^{\pm}(\vec{x},t) &= \frac{1}{2\pi}\int d\omega\ \tilde{\phi}^{\pm}(\vec{x},\omega)e^{i\omega t} = -\frac{1}{2\pi}\int d\omega\int d^3x'\frac{e^{\pm i\omega r/c}}{4\pi r}\int dt'\ \rho(\vec{x},t')e^{-i\omega t'}e^{i\omega t} \\
&= -\int dt'\int d^3x'\frac{\rho(\vec{x'},t')}{4\pi r}\underbrace{\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{i\omega(\pm r/c+t-t')}}_{\delta(\pm r/c+t-t')} = \int dt'\int d^3x'\rho(\vec{x'},t')\left[-\frac{\delta(\pm r/c+t-t')}{4\pi r}\right]
\end{aligned}$$

Da Eq. L.9, como $\delta(ay)=\delta(y)/a$ e $\delta(-y)=\delta(y)$, identificamos:

$$G^{\pm}(\vec{x}-\vec{x'},t-t') = -\frac{\delta(\pm r/c+t-t')}{4\pi r} = -\frac{c}{4\pi r}\delta(\pm r+c(t-t')) = -\frac{c}{4\pi r}\delta(\mp r-c(t-t')) \quad \text{(L.32)}$$

Para a solução $G^{(-)}$, temos

$$G^{(-)}(\vec{x}-\vec{x'},t-t') = -\frac{c}{4\pi r}\delta(r-c(t-t')) = -\frac{c}{4\pi|\vec{x}-\vec{x'}|}\delta(|\vec{x}-\vec{x'}|-c(t-t'))\,. \quad \text{(L.33)}$$

L.4.2 Método 2

(ver Jackson 12.11)

Outra forma de obter a função de Green é usar Transformadas de Fourier (TF) em 4 dimensões. Neste caso, transformada de uma função $\phi(\vec{x})$ e sua inversa são dadas por

$$\mathcal{F}\left[\phi(\vec{x},t)\right] = \tilde{\phi}(\vec{k},\omega) = \int d^3x\int dt\ \phi(\vec{x},t)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega t)} \quad \text{(L.34)}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\phi(\vec{k},\omega)\right] = \phi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int d\omega\ \tilde{\phi}(\vec{k},\omega)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega t)} \quad \text{(L.35)}$$

Tomando a TF da Eq. L.21, temos

$$\left(-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{G}(\vec{k},\omega) = 1 \quad \text{(L.36)}$$

ou multiplicando por c^2:

$$\tilde{G}(\vec{k},\omega) = \frac{c^2}{\omega^2-(kc)^2} \quad \text{(L.37)}$$

Assim, tomando a TF inversa, temos

$$\begin{aligned}
G(\vec{x},t) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int d\omega\ \tilde{G}(\vec{k},\omega)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega t)} \\
&= \frac{c^2}{(2\pi)^4}\int d^3k\int d\omega\ \frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega t)}}{\omega^2-(kc)^2} \\
&= \frac{c^2}{(2\pi)^4}\int d^3k\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\underbrace{\int d\omega\ \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2-(kc)^2}}_{I} \quad \text{(L.38)}
\end{aligned}$$

Vamos calcular a integral I:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - (kc)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - kc)(\omega + kc)} \tag{L.39}$$

Esta integral tem polos em $w = \pm kc$. Podemos tomar $z = w + i\epsilon$, com $\epsilon > 0$, e considerar a integral no plano complexo, agora com os polos deslocados. Considerando um circuito fechado formado pelo semi-circulo positivo $\mathcal{C}$ de raio R e a reta $\mathcal{R}$ indo de $\omega = -R$ até $\omega = +R$:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}\cup\mathcal{R}} dz \; \frac{e^{izt}}{(z-kc)(z+kc)} &= \int_{\mathcal{R}(z=\omega)} dz \; \frac{e^{izt}}{(z-kc)(z+kc)} + \int_{\mathcal{C}} dz \; \frac{e^{izt}}{(z-kc)(z+kc)} \\ &= \int_{-R}^{R} d\omega \; \frac{e^{i\omega t}}{(\omega-kc)(\omega+kc)} + \int_{\mathcal{C}} dz \; \frac{e^{izt}}{(z-kc)(z+kc)} \end{aligned} \tag{L.40}$$

Para a integral em $\mathcal{C}$, temos $izt = i(\omega + i\epsilon)t = i\omega t - \epsilon t$, e assim $e^{izt} = e^{i\omega t} e^{-\epsilon t}$. Como estamos tomando $\epsilon > 0$, é preciso que $t > 0$ para que esta integral convirja mesmo quanto $t \to \infty$.

De fato, quando $R \to \infty$, a integral em $\mathcal{C}$ vai a zero, já que seu integrando vai a zero como $1/R^2$. Assim, quando $R \to \infty$, temos

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \frac{e^{i\omega t}}{(\omega-kc)(\omega+kc)} = \oint_{\mathcal{C}\cup\mathcal{R}} dz \; \frac{e^{izt}}{(z-kc)(z+kc)} = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(z_+, z_-) \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{iz_+ t}}{z_+ + kc} + \frac{e^{iz_- t}}{z_- - kc} \right) \end{aligned} \tag{L.41}$$

Como $z_+ = kc$ e $z_- = -kc$, temos

$$I = 2\pi i \left(\frac{e^{ikct}}{2kc} + \frac{e^{-ikct}}{-2kc} \right) = -\frac{2\pi}{kc} \left(\frac{e^{ikct} - e^{-ikct}}{2i} \right) = -2\pi \frac{\sin(kct)}{kc} \tag{L.42}$$

Portanto, a funçõ de Green na Eq. L.38 , fica:

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, t) &= \frac{c^2}{(2\pi)^4} \int d^3k \; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} (-2\pi) \frac{\sin(kct)}{kc} = -\frac{c}{(2\pi)^3} \int d^3k \; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \; \frac{\sin(kct)}{k} \\ &= -\frac{c}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk \; k^2 \; \frac{\sin(kct)}{k} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \; e^{ikr\cos\theta} \\ &= -\frac{c}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dk \; k \; \sin(kct) \int_{-1}^{1} du \; e^{ikru} \\ &= -\frac{c}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dk \; k \; \sin(kct) \; \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \\ &= -\frac{c}{(2\pi)^2 r} \int_0^{\infty} dk \; \frac{e^{ikct} - e^{-ikct}}{2i} \; \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{i} \\ &= \frac{c}{2(2\pi)^2 r} \int_0^{\infty} dk \; e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)} - e^{-ik(r-ct)} + e^{-ik(r+ct)} \end{aligned} \tag{L.43}$$

Notando agora que (com $k' = -k$)

$$\int_0^{\infty} dk \; e^{-ik(r\pm ct)} = -\int_0^{-\infty} dk' e^{ik'(r\pm ct)} = \int_{-\infty}^{0} dk e^{ik(r\pm ct)} \tag{L.44}$$

temos então

$$
\begin{aligned}
G(\vec{x},t) &= \frac{c}{2(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)} \\
&= \frac{c}{4\pi r}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ik(r+ct)} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ik(r-ct)}\right] \\
&= \frac{c}{4\pi r}\left[\delta(r+ct) - \delta(r-ct)\right] \qquad \text{(L.45)}
\end{aligned}
$$

A segunda função delta representa a solução retardada, que é de interesse ao nosso problema. Portanto:

$$
G(\vec{x},t) = -\frac{c}{4\pi r}\delta(r-ct) = -\frac{1}{4\pi r}\delta(r/c - t) \qquad \text{(L.46)}
$$

Portanto a função de Green do D'Alambertiano é parecida com a do Laplaciano, com a diferença de a dependência temporal carregar a função delta que impõe que o tempo de interesse será $t = r/c$.