

Apêndice K

Laplaciano de $1/r$

Vamos calcular o Laplaciano da função $1/r$, onde $r = |\vec{x}|$. Notando que:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (\text{K.1})$$

precisamos primeiro calcular o gradiente de $1/r$. Para todos os pontos em que $r \neq 0$, temos:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \hat{r} = - \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = - \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{K.2})$$

Agora vamos calcular o divergente deste resultado, usando $\vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{V}) = \alpha \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{V}$:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = - \frac{1}{r^3} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}}_{=3} - \underbrace{\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^3} \right)}_{=-3r^{-4}} \underbrace{\hat{r} \cdot \vec{r}}_{=r} = - \frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^4} r = 0 \quad (\text{K.3})$$

Portanto $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$, para todo ponto $\vec{x} \neq \vec{0}$. Todo efeito desta função, se houver, virá de seu comportamento em $r = 0$. Para avaliar este efeito, vamos integrar o Laplaciano em um volume V envolto por uma superfície fechada orientada S , que *inclui* a origem. Note que para volumes que não incluem a origem, já sabemos que o integrando é identicamente nulo, e, portanto, também o é a sua integral. Assim, usando o Teorema de Gauss (divergente):

$$\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) dV = - \oint_S \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \cdot d\vec{S} = - \oint_S \frac{rdS \cos \theta}{r^3} \quad (\text{K.4})$$

onde θ é o ângulo entre \vec{r} e $d\vec{S}$ e a área dS delimita um ângulo sólido $d\Omega$ a partir da origem. Mas $dS_{\odot} = dS \cos \theta$ é a área – delimitada no mesmo ângulo sólido – de uma esfera de raio r centrada na origem, ou seja $dS_{\odot} = r^2 d\Omega$. Portanto, integrando sobre toda a superfície:

$$\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV = - \oint_S \frac{rdS_{\odot}}{r^3} = - \oint_S \frac{rr^2 d\Omega}{r^3} = - \oint_S d\Omega = -4\pi \quad (\text{K.5})$$

Desta forma, temos:

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \quad \text{para todo } r \neq 0 \quad (\text{K.6})$$

$$\int_V -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV = 1 \quad \text{para todo } V \text{ incluindo a origem.} \quad (\text{K.7})$$

Estas credenciais portanto nos permitem identificar a função delta de Dirac tridimensional:

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \delta^3(\vec{x}) \quad (\text{K.8})$$

ou

$$\boxed{\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -4\pi \delta^3(\vec{x})} \quad (\text{K.9})$$

Vamos imaginar uma carga pontual q na origem. Multiplicando a equação acima por q/ϵ_0 , temos :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{q\vec{r}}{4\pi_0 r^3} \right) = \frac{q\delta^3(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (\text{K.10})$$

Notamos que o termo entre parênteses é o campo elétrico da carga pontual dado pela Lei de Coulomb. Comparando esta equação com a Lei de Gauss na forma diferencial, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, segue que a densidade de uma carga pontual em $r = 0$ é dada por:

$$\rho(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x}) \quad (\text{Densidade de carga pontual}) \quad (\text{K.11})$$

De fato, ao integrar esta densidade em todo volume, obtemos a carga pontual:

$$\int \rho(\vec{x}) dV = q \underbrace{\int \delta^3(\vec{x}) dV}_{=1} = q \quad (\text{K.12})$$