Apêndice J

Magnetostática e Calibre de Coulomb

Na magnetostática, assumimos que as variações temporais de $\vec{E}$ são desprezíveis, ou seja:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0\,. \tag{J.1}$$

Da Lei de Gauss, isto implica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \rightarrow \qquad \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{J.2}$$

Mas da conservação de cargas, isto quer dizer que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \tag{J.3}$$

Portanto, as correntes são *estacionárias*. Isto quer dizer que as correntes são apenas de tal forma que não há variações temporais de densidade, nem divergentes de corrente. Ou seja para cada carga que entra em um volume em um intervalo de tempo, uma mesma carga deixa o volume no mesmo intervalo de tempo.

Assim, as equações básicas para $\vec{B}$ são (com $\partial E/\partial t = 0$):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{J.4}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{J.5}$$

A primeira equação implica que $\exists\, \vec{A}$, tal que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Inserindo isto na Lei de Ampere, obtemos:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \tag{J.6}$$

Vamos trabalhar no calibre de Coulomb, em que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Note que se o campo $\vec{A}$ não satisfaz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, é sempre possível fazer uma mudança de calibre $\vec{A} \rightarrow \vec{A}'$ que mantém o mesmo campo magnético, mas tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$. De fato, com a mudança de calibre:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \tag{J.7}$$

temos obviamente o mesmo campo $\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \overbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f}^{=0} = \vec{B}$. Além disso:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 f \tag{J.8}$$

Como por hipótese $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$, e $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \neq 0$, temos que a função f satisfaz a Eq. de Poisson:

$$\nabla^2 f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \tag{J.9}$$

cuja solução, segundo o Apêndice I, é:

$$f(\vec{x}) = \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x'}) d^3x'}{4\pi |\vec{x} - \vec{x'}|} \tag{J.10}$$

Portanto, no calibre de Coulomb, temos:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \tag{J.11}$$

que também é uma Eq. de Poisson, e cuja solução é

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{x'}) d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \tag{J.12}$$

Dada a solução acima para $\vec{A}$, achamos o campo via $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|} d^3x' = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \right) d^3x' \tag{J.13}$$

Como $\vec{\nabla} \times (\alpha \vec{A}) = \vec{\nabla}\alpha \times \vec{A} + \alpha \vec{\nabla} \times \vec{A}$, e $\vec{\nabla}$ age apenas em $\vec{x}$ mas não em $\vec{x'}$, temos

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \right) \times \vec{j}(\vec{x'}) d^3x' \tag{J.14}$$

Como $\vec{\nabla}(1/|\vec{x} - \vec{x}'|) = -(\vec{x} - \vec{x'})/|\vec{x} - \vec{x'}|^3$, temos

$$\vec{B} = -\int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|^3} \times \vec{j}(\vec{x'}) d^3x' = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{x'}) \times \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|^3} d^3x'$$

Suponha que a corrente se propaga em uma linha com vetor comprimento diferencial $d\vec{l} \propto \vec{j}$. Temos que a corrente $i = dq/dt$, a densidade de corrente $j = di/dA = d^2q/dAdt$ e o elemento de volume $dV = dAdl$. Portanto, $jdV = d^2q/dAdt \times dAdl = idl$, ou vetorialmente

$$\vec{j} dV = i d\vec{l} \tag{J.15}$$

Definindo $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x'}$ e $r = |\vec{r}|$, temos então

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{x'}) \times \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|^3} d^3x' = \frac{\mu_0 i}{4\pi} d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \end{aligned} \tag{J.16}$$

que reconhecemos como a Lei de Biot-Savart (Seção 7.1).

Por outro lado, tomando $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ na Eq. J.13, temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|} d^3x' \tag{J.17}$$

Usando $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$ e $\vec{\nabla}\cdot(\alpha\vec{F}) = \vec{\nabla}\alpha\cdot\vec{F} + \alpha\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$, temos

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} \;=\; \vec{\nabla}\int \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}(\vec{x'})\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x'}|}\right)d^3x' - \int \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}(\vec{x'})\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x'}|}\right)d^3x' \tag{J.18}$$

Usando $\vec{\nabla}(1/|\vec{x}-\vec{x'}|) = -\vec{\nabla}'(1/|\vec{x}-\vec{x'}|)$ e $\nabla^2(1/|\vec{x}-\vec{x'}| = -4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})$, temos

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} \;=\; -\vec{\nabla}\int \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}(\vec{x'})\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x'}|}\right)d^3x' - \underbrace{\int \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}(\vec{x'})\left(-4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\right)d^3x'}_{-\mu_0\vec{j}(\vec{x})} \tag{J.19}$$

Usando novamente $\vec{\nabla}\cdot(\alpha\vec{F}) = \vec{\nabla}\alpha\cdot\vec{F} + \alpha\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$, temos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{B} &= -\vec{\nabla}\left[\int \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{j}(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|}\right)d^3x' - \int \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|}\right)d^3x'\right] + \mu_0\vec{j}(\vec{x}) \\
&= -\vec{\nabla}\left[\oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|}d^2x' - \int \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|}\right)d^3x'\right] + \mu_0\vec{j}(\vec{x})
\end{aligned} \tag{J.20}$$

Como $j(r)$ é zero fora do volume, a integral de superfície $dS = d^2x'$ se anula e temos

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} \;=\; \vec{\nabla}\int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}(\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|}d^3x' + \mu_0\vec{j}(\vec{x}) \tag{J.21}$$

Por fim, na magnetostática, as correntes são estacionárias e $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$, de forma que o primeiro termo também é nulo. Portanto:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} \;=\; \mu_0\vec{j} \tag{J.22}$$