

# Capítulo 7

## Lei de Ampere

No capítulo anterior, estudamos como cargas em movimento (correntes elétricas) sofrem forças magnéticas, quando na presença de campos magnéticos. Neste capítulo, consideramos como estas correntes *produzem* campos magnéticos.

### 7.1 Lei de Biot-Savart

- A Lei de Biot-Savart determina o campo magnético  $d\vec{B}$  gerado em um ponto  $P$  a uma distância  $r$  de um elemento de comprimento  $d\vec{s}$  em um fio por onde se passa uma corrente  $i$ :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.1)$$

- Permeabilidade do vácuo:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}$ .

Note que

- $d\vec{B}$  é  $\perp$  a  $d\vec{s}$  e a  $\vec{r}$ . Direção pela regra da mão direita:
  - Coloque polegar na direção da corrente.
  - Os outros dedos se curvam na direção do campo.
  - $\vec{B}$  é gerado *circulando* a corrente.
- $dB \propto i, ds$  e  $\sin \theta$ .
- $dB \propto 1/r^2$ , como na Lei de Coulomb
- Para campo gerado por todo o fio, deve-se integrar a Lei de Biot-Savart.

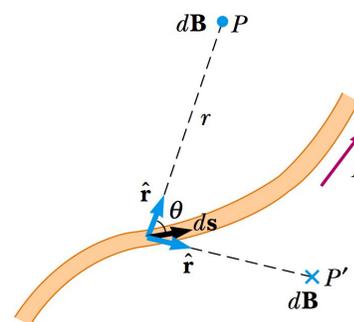


Figura 7.1: Lei de Biot-Savart para o campo magnético. (Serway)

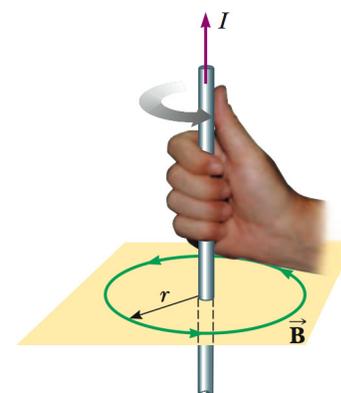


Figura 7.2: Regra da mão-direita. (Serway)

## 7.2 Exemplos

### 7.2.1 Fio Reto

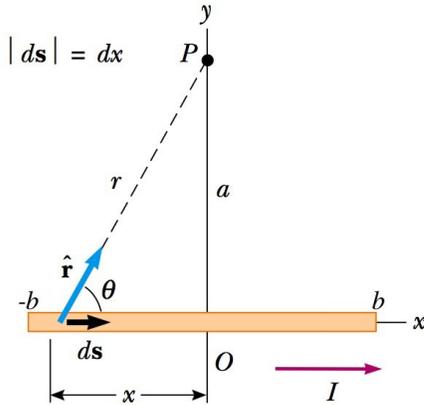


Figura 7.3: Campo devido a um fio reto. (Serway)

Considere um fio reto de corrente, como na Fig. 7.3 A contribuição devido a um elemento  $ds$  do fio é mostrada na figura. Todos os elementos  $d\vec{B}$  do fio apontam para fora da página, na direção  $\hat{z}$ . Para a magnitude precisamos calcular:

$$d\vec{s} \times \hat{r} = (dx \sin \theta) \hat{z} \quad (7.2)$$

A Lei de Biot-Savart nos dá

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2} \quad (7.3)$$

Usando  $r^2 = x^2 + a^2$  e  $\sin \theta = a/\sqrt{x^2 + a^2}$ , temos

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{adx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (7.4)$$

Usando o resultado da Eq. 1.15, temos

$$\begin{aligned} B &= \int dB = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \left[ \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \right]_{-b}^b \\ \rightarrow B &= \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[ \frac{2b}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

Para um fio infinito  $b \rightarrow \infty$ , e temos

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \quad (7.6)$$

### 7.2.2 Fio Curvado

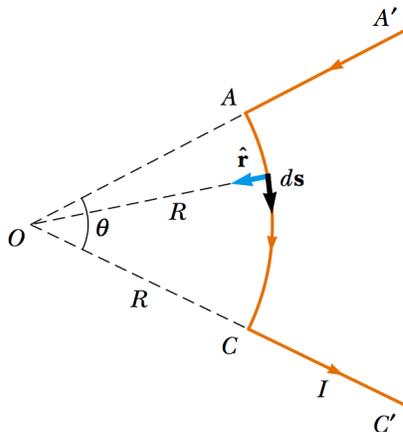


Figura 7.4: Campo devido a um fio curvo. (Serway)

Considere um fio curvo de corrente, como na Fig. 7.4 A contribuição do campo no ponto  $O$  devido a um elemento  $ds$  do fio é mostrada na figura. Os elementos  $AA'$  e  $CC'$  não contribuem, pois neles  $d\vec{s} \parallel \hat{r}$ .

Em todos os pontos de  $AC$ , temos  $d\vec{s} \perp \hat{r}$ , portanto  $|d\vec{s} \times \hat{r}| = ds$ . A direção do campo em  $O$  é entrando na página. Pela lei de Biot-Savart temos:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{R^2} \quad (7.7)$$

que podemos facilmente integrar e obter o campo total:

$$\begin{aligned} B &= \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \int ds = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} (\theta R) \\ \rightarrow B &= \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \theta \end{aligned} \quad (7.8)$$

Se tivermos uma espira completa,  $\theta = 2\pi$  e obtemos

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad (7.9)$$

### 7.2.3 Espira Circular

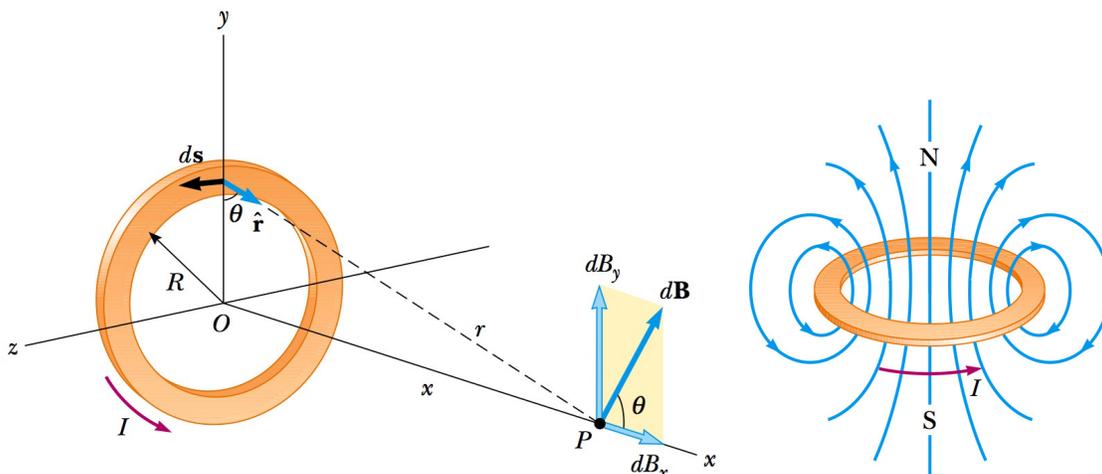


Figura 7.5: Campo devido a uma espira circular. (Serway)

Considere uma espira circular de corrente, como na Fig. 7.5. A contribuição do campo no ponto  $P$  no eixo  $x$  da espira devido a um elemento  $ds$  do fio é mostrada na figura.

Temos  $d\vec{s} \perp \hat{r}$  para todos os pontos do fio (note entretanto ângulo  $\theta$  entre  $\hat{r}$  e o eixo  $y$ ), portanto  $|d\vec{s} \times \hat{r}| = ds$ . Temos

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{x^2 + R^2} \quad (7.10)$$

Componentes de  $d\vec{B}$ :  $dB_x$  ao longo do eixo e  $dB_y = dB_z$  na direção perpendicular.

Somando contribuições  $B_{\perp} = 0$  por cancelamentos. Calculamos então  $B_x$ , integrando  $dB_x = dB \cos \theta$ , onde  $\cos \theta = R/\sqrt{x^2 + R^2}$ :

$$\begin{aligned} B_x &= \oint dB \cos \theta = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (x^2 + R^2)^{3/2}} \oint ds = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (x^2 + R^2)^{3/2}} (2\pi R) \\ \rightarrow B_x &= \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (7.11) \end{aligned}$$

Em  $x = 0$ , reobtemos o resultado anterior:

$$B_x = B = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad (7.12)$$

enquanto para  $x \gg R$ , lembrando do momento magnético  $\mu = i(\pi R^2)$ , temos:

$$B \approx \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3} \quad (7.13)$$

ou vetorialmente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{x^3} \quad (7.14)$$

similar ao campo distante de um dipolo elétrico  $\vec{E} = \vec{p}/4\pi\epsilon_0 x^3$ .

### 7.2.4 Força entre correntes paralelas

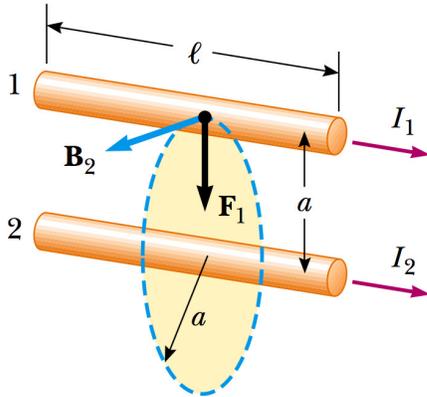


Figura 7.6: Força entre dois fios paralelos de corrente. (Serway)

Considere 2 fios paralelos de comprimento  $l$  com correntes  $i_1$  e  $i_2$  separados de uma distância  $a$ .

Vamos calcular a força magnética  $F_1$  no fio 1 devido ao campo magnético  $\vec{B}_2$  do fio 2. Como  $\vec{B}_2$  é perpendicular ao comprimento  $\vec{l}$  do fio, temos

$$F_1 = i_1 l B_2 \sin 90^\circ = i_1 l \frac{\mu_0 i_2}{2\pi a} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi a} \quad (7.15)$$

$F_1$  é simétrico sob  $1 \rightarrow 2$ . Portanto  $F_2 = F_1$ .

A direção de  $F_2$  é oposta a  $F_1$ , c.f. a 3ª lei de Newton.

Correntes na mesma direção: fios se atraem.

Correntes opostas: fios se repelem.

## 7.3 Lei de Ampere

A Lei de Ampere relaciona a corrente (constante) que atravessa um circuito  $C$  com a circulação sobre este circuito do campo  $B$  criado pela corrente:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{in}} \quad (\text{Lei de Ampere}) \quad (7.16)$$

A corrente na Lei de Ampere é a corrente total (soma de correntes positivas e negativas dependendo da direção), que atravessam o circuito. Correntes "fora" do circuito não contribuem.

A Lei de Ampere é uma das Equações de Maxwell e portanto uma lei fundamental do eletromagnetismo. Podemos trivialmente verificar que a Lei de Ampere vale para um fio infinito de corrente, em que  $B = \mu_0 i / 2\pi r$  a uma distância  $r$  do fio. Neste caso temos, para um circuito  $C$  circular ao fio, onde sabemos que  $B$  tem o mesmo valor, e aponta na direção de  $d\vec{l}$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = \left( \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \right) (2\pi r) = \mu_0 i \quad (7.17)$$

Sendo uma lei fundamental, a Lei de Ampere vale não apenas neste caso, mas sempre.

## 7.4 Exemplos

### 7.4.1 Fio com corrente

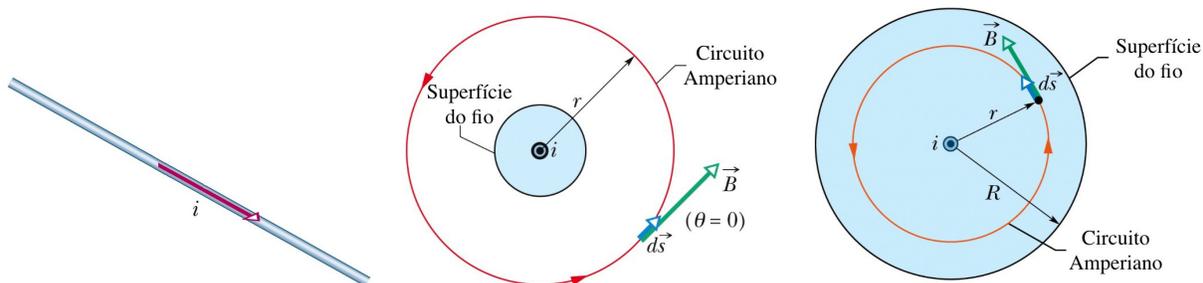


Figura 7.7: Campo fora e dentro de um fio, gerado por sua corrente. (Halliday)

Considere um fio reto com raio  $R$  com corrente uniformemente distribuída em seu interior, como na Fig. 7.7, para o qual desejamos saber o campo  $B$  tanto dentro quanto fora do fio.

Usando a Lei de Ampere com um circuito Amperiano fora do fio, temos

$$\begin{aligned}\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \oint B dl = B \oint dl = B(2\pi r) = \mu_0 i \\ \rightarrow B &= \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\end{aligned}\quad (7.18)$$

Similarmente, usando um circuito dentro do fio e incluindo somente a corrente  $i'$  interna a  $r$ :

$$\begin{aligned}\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= B(2\pi r) = \mu_0 i' = \mu_0 i \frac{r^2}{R^2} \\ \rightarrow B &= \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r\end{aligned}\quad (7.19)$$

### 7.4.2 Exercício: Fio com corrente e cavidade

Considere um fio cilíndrico, como anteriormente, mas com uma cavidade cilíndrica como mostrado na Fig. 7.8. Mostre que o campo magnético  $B$  em um ponto  $P$  genérico dentro da cavidade é constante. Essa é uma maneira de obter uma região com campo magnético constante.

*Sugestão:*

Considere primeiro o fio cilíndrico sem a cavidade e expresse a resposta em termos de  $r$  e  $\hat{\theta}$ . Considere então um fio com densidade de corrente no sentido oposto na posição da cavidade; expresse esta resposta em termos de  $r$  e  $\hat{\theta}$ . Por fim, use o princípio da superposição para a corrente total no fio.

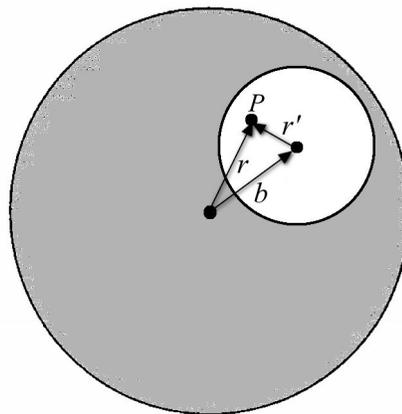


Figura 7.8: Fio cilíndrico com uma cavidade cilíndrica em uma região qualquer.

## 7.4.3 Solenóide

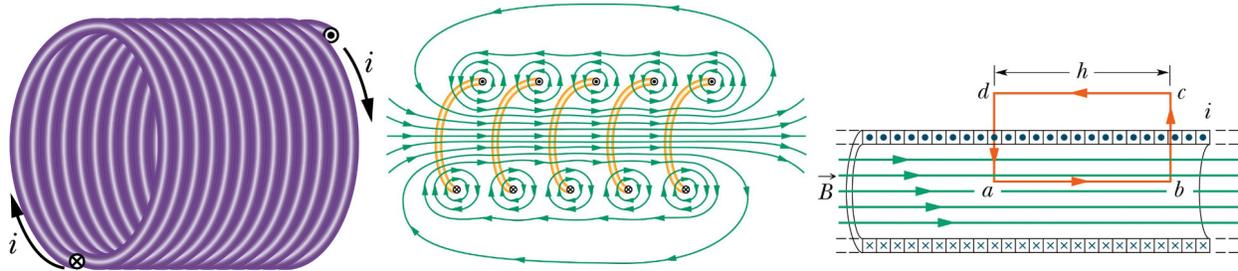


Figura 7.9: Campo em um solenóide. (Halliday)

Considere um solenóide, como na Fig. 7.9, para o qual desejamos saber o campo  $B$  em seu interior.

O solenóide é basicamente uma soma de espiras empilhadas.

No seu interior, os campos se somam e o campo total é aproximadamente constante e uniforme.

No seu exterior, os campos se cancelam, e o campo é aproximadamente nulo.

Solenóide ideal: o comprimento é infinito e uma densidade de espiras infinita.

Considere o circuito  $abcd$  mostrado, que contém  $N$  espiras com suas correntes atravessando o circuito. Usando a Lei de Ampere, temos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{in} \quad (7.20)$$

Temos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (7.21)$$

Destas, somente a primeira produz valor não nulo e igual a  $Bh$ . A segunda e quarta são nulas pois o  $\vec{B} \perp d\vec{l}$  e na terceira  $B = 0$ . Além disso, definindo

$$n = \frac{N}{h}: \text{ número de espiras por unidade de comprimento} \quad (7.22)$$

temos  $i_{in} = Ni = nhi$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{in} \rightarrow Bh = \mu_0 in h \quad (7.23)$$

$$\rightarrow B = \mu_0 in \quad (\text{Solenóide ideal}) \quad (7.24)$$

## 7.4.4 Toróide

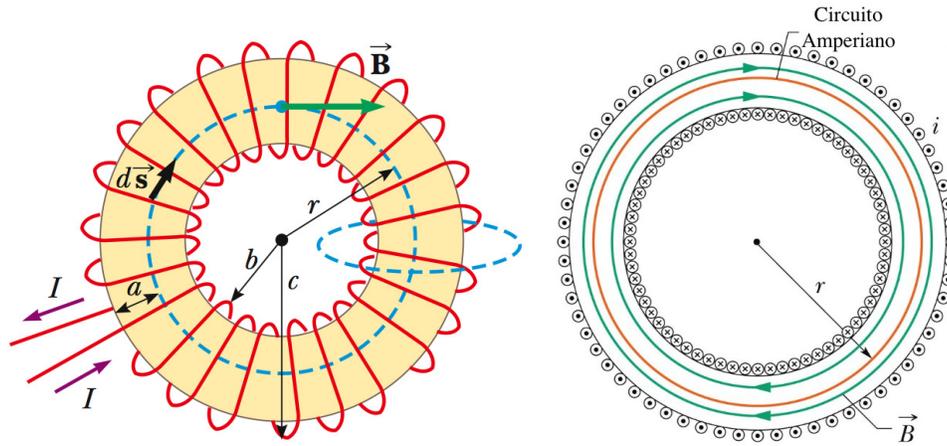


Figura 7.10: Campo em um toróide. (Halliday)

Considere um toróide com raio  $r$ , como na Fig. 7.10, para o qual desejamos saber o campo  $B$  em seu interior.

O toróide é basicamente um solenóide curvado e com as extremidades identificadas.

Usando a Lei de Ampere, temos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{in} \rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 N i \quad (7.25)$$

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \quad (\text{Toróide}) \quad (7.26)$$

## 7.5 Magnetismo na Matéria

Vamos agora investigar o que ocorre com campos magnéticos na presença de um meio material.

## 7.5.1 Momento de Dipolo Magnético e Momento Angular

- Os átomos e íons podem possuir momento de dipolo magnético  $\vec{\mu}$ , normalmente relacionado a um momento angular do átomo.
- Considere um elétron de massa  $m$  e carga  $-e$  orbitando um núcleo atômico em uma trajetória circular e raio  $r$ . O momento angular  $L$  é dado por

$$L = mvr \quad (7.27)$$

- Por outro lado, a corrente associada do movimento do elétron, bem como o momento de dipolo magnético ficam

$$\begin{aligned} i &= \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} \\ \mu &= iA = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right) \pi r^2 = \frac{evr}{2} \end{aligned} \quad (7.28)$$

- Usando então  $vr = L/m$ , obtemos

$$\mu = \frac{e}{2m}L \quad (7.29)$$

ou, vetorialmente, como a carga do elétron é negativa,

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L} \quad (7.30)$$

- Na mecânica quântica, verifica-se que o momento angular dos átomos é quantizado, de modo que a trajetória corresponda a um número inteiro de comprimentos de onda associado ao elétron. Esta é a base do modelo do átomo de Bohr, que leva à quantização dos níveis de energia.
- Os elétrons e átomos também possuem *spin*, que também está relacionado a um momento de dipolo magnético.

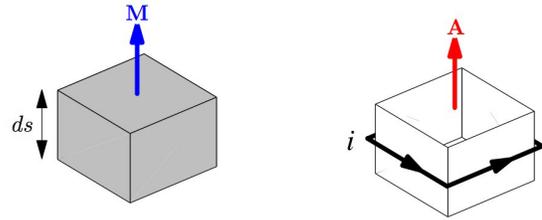
### 7.5.2 Diamagnetismo e Paramagnetismo

- Na maior parte dos materiais, os momentos magnéticos dos átomos se cancelam devido a orientações aleatórias.
- Quando um campo magnético é aplicado, um alinhamento resultante destes dipolos magnéticos ocorre e o meio se torna magnetizado.
- Lembre que a polarização *elétrica* sempre aponta na direção do campo externo  $E$ .
- Em se tratando de um campo magnético externo, no entanto, alguns materiais têm seus dipolos magnéticos alinhados na direção de  $B$  (*paramagnéticos*), enquanto outros se alinham na direção oposta a  $B$  (*diamagnéticos*).
- O paramagnetismo se dá devido ao fato de que os momentos de dipolo magnético sofrem um torque e tendem a se alinhar com o campo externo.
- Alguns materiais mantêm um momento de dipolo magnético mesmo após a retirada do campo externo. Estes são ditos *ferromagnéticos*. São usados e.g. como ímãs. Nestes materiais, a magnetização depende de toda a história do material, e não apenas no campo externo momentâneo.
- O diamagnetismo é causado pela indução de Faraday, um efeito que estudaremos no próximo capítulo. Basicamente, a variação do campo magnético externo  $B_{orig}$  (enquanto ele é criado) gera uma voltagem  $V$  que causa uma corrente induzida  $i_{ind}$ , cujo campo induzido  $B_{ind}$  se opõe ao campo original  $B_{orig}$ . Portanto, o dipolo magnético  $\mu_{ind}$  se alinha na direção oposta ao campo original  $B_{orig}$ . Esse efeito, embora sempre presente, em geral é mais fraco do que o paramagnetismo, quando ambos ocorrem.

### 7.5.3 Magnetização

- Magnetização:  $\vec{M}$  = momento de dipolo magnético  $\vec{\mu}$  por unidade de volume  $v$

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}}{\Delta v} \quad (7.31)$$



- Considere a magnetização em um elemento infinitesimal de volume  $\Delta v = A ds$ , a que "associamos" uma corrente  $i$ . Temos

Figura 7.11: Magnetização em um elemento de volume  $\Delta v = A ds$  ao redor do qual passa uma corrente  $i$ .

$$M = \frac{\mu}{\Delta v} = \frac{iA}{A ds} = \frac{i}{ds} \quad (7.32)$$

- Portanto, a corrente no circuito do elemento fica

$$i = M ds \quad (7.33)$$

- Considere agora uma fatia de altura  $ds$  composta por varios elementos de circuito como esse, representando e.g. o momento de dipolo de uma camada de átomos:

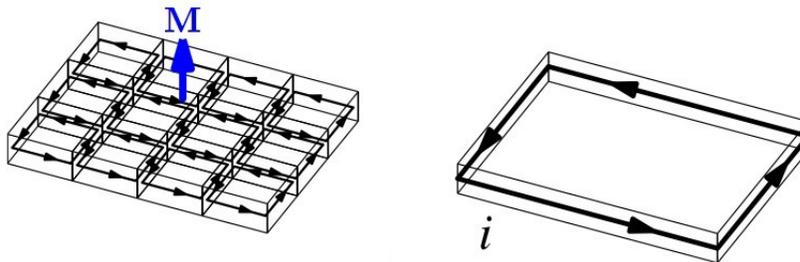


Figura 7.12: Magnetização de vários elementos de volume  $\Delta v = A ds$ . Para magnetização constante, as correntes internas se cancelam, sobrando apenas uma corrente total circulante. Essa corrente  $i_m$ , embora não necessariamente real, é chamada de corrente de magnetização.

- As correntes internas se cancelam, enquanto as externas se mantêm formando uma "corrente" de magnetização  $i_M$ .

- Considere novamente 1 elemento, com a corrente de magnetização mostrada entrando na página.

- No circuito mostrado, para o qual temos

$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{s} = M ds = i \quad (7.34)$$

pois  $\vec{M} = 0$  fora dos elementos e  $\vec{M} \perp d\vec{s}$  nas bordas de cima e de baixo.

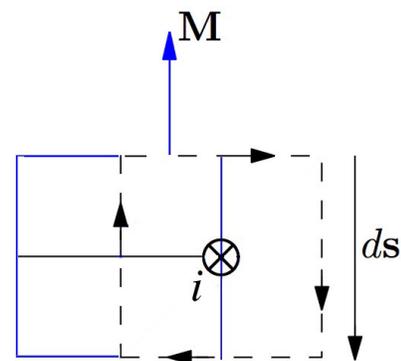


Figura 7.13: A circulação de  $M$  no circuito é igual a corrente de magnetização.

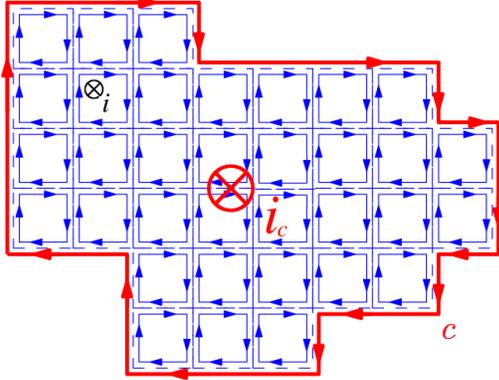


Figura 7.14: A circulação de  $M$  em um circuito qualquer pode ser obtida como a soma sobre vários elementos, pois as contribuições internas se cancelam.

- Para obter a circulação em um circuito qualquer, basta considerá-lo como a soma de vários elementos, pois as contribuições internas se cancelam, sobrando apenas as bordas.
- Portanto para um circuito  $c$  qualquer, com magnetização constante, temos que a corrente de magnetização fica

$$\begin{aligned} i_M &= \sum \left[ \oint_{\text{elementos}} \vec{M} \cdot d\vec{s} \right] \\ &= \oint_c \vec{M} \cdot d\vec{s} \end{aligned} \quad (7.35)$$

### 7.5.4 Lei de Ampere

Considere uma região do espaço onde há correntes livres  $i_l$  e correntes de magnetização  $i_M$ . A Lei de Ampere leva em conta todas as correntes, e nos dá

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{tot} = \mu_0 (i_l + i_M) \quad (7.36)$$

Usando  $i_M = \oint \vec{M} \cdot d\vec{s}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{s} &= i_l + \oint \vec{M} \cdot d\vec{s} \\ \rightarrow \oint \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{s} &= i_l \end{aligned} \quad (7.37)$$

Definimos o vetor  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{ou} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (7.38)$$

para o qual a Lei de Ampere fica

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i_l \quad (7.39)$$

i.e.  $\vec{H}$  é determinado apenas pelas correntes livres. Para materiais lineares, temos

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H} \quad (7.40)$$

onde  $\chi_M$ : susceptibilidade magnética. Neste caso temos

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_M \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_M) \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (7.41)$$

onde  $\mu$ : permeabilidade magnética. Finalmente

$$\kappa_M = \mu / \mu_0 = (1 + \chi_M) \quad \text{é a permeabilidade relativa} \quad (7.42)$$

E a Lei de Ampere também pode ser escrita como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu i_l. \quad (7.43)$$