

## Capítulo 12

# Formulação Covariante do Eletromagnetismo

O objetivo deste capítulo é expressar as equações do **Eletromagnetismo** em forma manifestamente covariante, i.e. invariante por transformações de Lorentz e, portanto, consistente com o princípio de invariância da **Relatividade Especial**.

### 12.1 Equações Eletromagnéticas

Vamos primeiro fazer uma breve revisão das equações eletromagnéticas.

#### 12.1.1 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell descrevem a produção e propagação de campos E&M. Na forma diferencial são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Lei de Gauss}) \quad (12.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Inexistência de Monopólos Magnéticos}) \quad (12.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de indução de Faraday}) \quad (12.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Ampere}) \quad (12.4)$$

onde  $\rho$  é a densidade de carga elétrica,  $\vec{j}$  é a densidade de corrente elétrica.

#### 12.1.2 Conservação de Carga

Tomando o divergente da Lei de Ampere:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} \\ &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\rho/\epsilon_0)}{\partial t} \\ &= \mu_0 \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (12.5)$$

Portanto, cargas são conservadas pela equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (12.6)$$

### 12.1.3 Potenciais Eletromagnéticos

É conveniente definir potenciais eletromagnéticos pelas Eqs. de Maxwell sem fontes. Primeiramente, como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (12.7)$$

Usando essa expressão na Lei de Faraday, temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (12.8)$$

e o termo entre parênteses deve ser o gradiente de um campo escalar  $\phi$ .

O potencial elétrico  $\phi$  e o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  são portanto definidos por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (12.9)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (12.10)$$

### Transformação de Calibre: Invariância

Se  $\phi$  e  $\vec{A}$  são soluções das Eqs. de Maxwell, os potenciais  $\phi'$  e  $\vec{A}'$  definidos por

$$\phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (12.11)$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \quad (12.12)$$

para uma função  $f(x, t)$  qualquer também são, pois

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi + \nabla \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial(\vec{\nabla} f)}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \quad (12.13)$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{B}$$

Portanto, temos a liberdade de escolher a função  $f$  convenientemente sem alterar os campos. A escolha de  $f$  implica a determinação de um calibre. O calibre usado nas soluções de ondas eletromagnéticas é o calibre de Lorenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{Calibre de Lorenz}) \quad (12.14)$$

### 12.1.4 Ondas Eletromagnéticas

Inserindo os potenciais nas Eqs. de Maxwell, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left( -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \phi - \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12.15)$$

e

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\ &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (12.16)$$

$$= \mu_0 \vec{j} - \vec{\nabla} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (12.17)$$

Essas duas equações implicam:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12.18)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (12.19)$$

Escolhendo o calibre de Lorenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (12.20)$$

as equações se tornam

$$\square^2 \phi = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12.21)$$

$$\square^2 \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (12.22)$$

i.e., os potenciais se propagam de acordo com a equação de ondas clássica não-homogêneas com velocidade constante e igual à velocidade da luz  $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$ . **Unificação: E&M ↔ Óptica.**

### 12.1.5 Força de Lorentz

Dados os campos E&M, partículas sofrem forças E&M dadas por:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (12.23)$$

## 12.2 Relatividade Especial

As equações de ondas E&M tem uma velocidade de propagação *constante*. Questões:

- 1: Com relação a que referencial se mede  $c$ ?
- 2: Como explicar o desaparecimento de forças magnéticas em um sistema de referência que se move com a carga?

Essas questões motivaram o desenvolvimento da relatividade especial, que soluciona esses problemas e muda a concepção clássica de espaço e tempo, requerendo apenas dois postulados (na verdade apenas um):

**Postulado 1:** As leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

**Postulado 2:** A velocidade da luz  $c$  é a mesma em todos os referenciais inerciais.

A constância de  $c$  segue do postulado 1, pois o E&M é um conjunto de leis da Física onde  $c=\text{const.}$

### 12.2.1 Coordenadas e métrica

Definindo coordenadas contravariantes

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (12.24)$$

O elemento de linha  $ds$

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu \end{aligned} \quad (12.25)$$

define a métrica  $n_{\mu\nu}$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.26)$$

Coordenadas covariantes  $x_\mu$  são definidas

$$x_\mu = n_{\mu\nu} x^\nu = (-ct, x, y, z) \quad (12.27)$$

Similarmente,

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu, \quad \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (12.28)$$

### 12.2.2 Transformações de Lorentz

Considere um referencial  $K$  em repouso e outro  $K'$  que se move com relação a  $K$  com velocidade  $v$  na direção  $x$ . Para ambos  $c$  é mesma, portanto considerando a trajetória de um raio de luz

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = s'^2 \quad (12.29)$$

A transformação de Lorentz relaciona coordenadas  $x^\mu$  e  $x'^\mu$ , mantendo  $s^2$  invariante (e, no caso da luz, nulo).

Considerando-se e.g. uma partícula em repouso em  $K$ , mostra-se que a transformação é dada por

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1) \quad (12.30)$$

$$x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad (12.31)$$

$$x^{2'} = x^2 \quad (12.32)$$

$$x^{3'} = x^3 \quad (12.33)$$

onde

$$\beta = \frac{v}{c} < 1 \quad (12.34)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \quad (12.35)$$

ou

$$x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x^{\nu} \quad (12.36)$$

com

$$\Lambda_{\nu}^{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.37)$$

Note que  $\det \Lambda_{\nu}^{\mu'} = \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = (1 - \beta^2) \gamma^2 = 1$ .

### 12.2.3 Escalares, Quadri-vetores, Tensores

Um escalar  $S$ , é definido por ser invariante sob uma transformação de Lorentz:

$$S' = S \quad (12.38)$$

Um quadri-vetor contravariante  $V^{\mu}$  é definido pela propriedade de se transformar exatamente como as coordenadas  $x^{\mu}$  sob uma transformação de Lorentz

$$V'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} V^{\nu} \quad (12.39)$$

Um tensor de rank 2 (matrix),  $T^{\mu\nu}$  é definido por se transformar

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu'} \Lambda_{\beta}^{\nu'} T^{\alpha\beta} \quad (12.40)$$

Tensores de mais altos ranks similarmente.

### Exemplos

A velocidade da luz  $c$  e a carga  $q$  de partículas são escalares.

O tempo próprio  $\tau$  é definido em um referencial  $K'$  onde  $dt' = d\tau$  e  $dx' = 0$ . No referencial  $K$ , tem-se  $dx = vdt$  e pela invariância do elemento de linha

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 dt^2 (1 - \beta^2) = -c^2 d\tau^2 = ds'^2 \quad (12.41)$$

Portanto,  $d\tau = dt/\gamma$  é um escalar (invariante) de Lorentz.

Como  $dx^{\mu}$  é um quadri-vetor e  $d\tau$  é um escalar, a quadri-velocidade  $U^{\mu}$  definida

$$U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \left( \frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau} \right) = \left( \frac{cdt}{d\tau}, \gamma \frac{dx}{dt} \right) = (\gamma c, \gamma v) = \gamma(c, v) \quad (12.42)$$

também é um quadrivetor, bem como o quadri-momento  $P^{\mu} = mU^{\mu} = (E/c, \vec{p})$  e a quadriforça  $F^{\mu} = dP^{\mu}/d\tau$ .

Produto de dois quadrivetores  $A^\mu B^\nu$  é um tensor de rank 2.

Contração de um tensor de rank 3, e.g.  $T_\nu^{\mu\nu}$ , é um quadrivetor.

A derivada com respeito à coordenada contravariante é um quadrivetor covariante

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad (12.43)$$

enquanto o d'Alambertiano é um escalar

$$\square^2 = \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (12.44)$$

### 12.3 Covariância Relativística do Eletromagnetismo

Pelo postulado da Relatividade Especial, as equações do E&M devem ter a mesma forma (serem invariantes) sob transformações de Lorentz. Portanto devem ser escritas em forma tensorial, já que tensores, por definição, se transformam com as regras específicas mencionadas nas seções anteriores. Desta forma, a validade das equações em um referencial implicam a validade das mesmas equações em referenciais obtidos por transformações de Lorentz, pois a forma das equações se mantém.

A velocidade da luz  $c$ , por hipótese, é *escalar* (invariante) de Lorentz. É um fato empírico que a carga  $q$  de uma partícula também é, i.e. ela não muda com o movimento relativo.

Se  $\rho$  é a densidade de carga, temos  $dq = \rho d^3x$  é um invariante de Lorentz. Mas o volume  $dx^0 d^3x$  é um invariante, pois o Jacobiano da transformação de  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  é  $\det \Lambda_\nu^\mu = 1$ . Portanto,  $\rho$  deve se transformar como a componente 0 de um quadrivetor  $j^\mu$ . Definindo essa quadri-corrente:

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}) \quad (12.45)$$

Temos que a equação escalar

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (12.46)$$

implica a conservação da carga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (12.47)$$

Definindo o quadri-potencial

$$A^\alpha = (\phi/c, \vec{A}), \quad (12.48)$$

e usando o fato de que o d'Alambertiano  $\square^2$  é um escalar, podemos escrever a equação covariante (quadri-vetorial)

$$\square^2 A^\alpha = -\mu_0 j^\alpha \quad (12.49)$$

que implica as equações de onda obtidas anteriormente:

$$\square^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12.50)$$

$$\square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (12.51)$$

enquanto a equação escalar

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (12.52)$$

descreve o calibre de Lorenz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (12.53)$$

Sabemos que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  tem 6 componentes no total, e pela relação com os potenciais, eles devem ser derivadas primeiras de  $A^\alpha$ . Como um tensor de rank 2 anti-simétrico tem exatamente 6 componentes independentes, podemos definir o tensor de campo  $F^{\mu\nu}$ :

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \quad (12.54)$$

Avaliação explícita das componentes 01 por exemplo nos dá

$$F^{01} = \frac{\partial A^1}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_1} = \frac{\partial A_x}{\partial(-ct)} - \frac{\partial(\phi/c)}{\partial x} = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \right)_x = \frac{E_x}{c} \quad (12.55)$$

Procedendo, podemos obter todas as componentes de  $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (12.56)$$

ou

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} F^{\alpha\gamma} \eta_{\gamma\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (12.57)$$

As Eqs. de Maxwell com fontes podem então ser escritas na forma invariante como

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu \quad (12.58)$$

e delas segue também a conservação da carga que já vimos, pois  $F^{\mu\nu}$  é anti-simétrico:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial F^{\nu\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu \partial x^\nu} (F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu}) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (12.59)$$

Já as Eqs. de Maxwell sem fonte podem ser escritas como

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (12.60)$$

Com e.g.  $\mu = 0$ ,  $\nu = 1$ ,  $\sigma = 2$  temos:

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} = \frac{-\partial(E_x/c)}{\partial y} + \frac{\partial(-E_y/c)}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial(ct)} = \left( -\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_z = 0 \quad (12.61)$$

e similarmente para todas as outras componentes obtemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (12.62)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (12.63)$$

Finalmente, definindo a quadri-força

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} \quad (12.64)$$

para o caso E&M com a combinação

$$F^\mu = qF^{\mu\nu}U_\nu \quad (12.65)$$

segue que a força de Lorentz é obtida:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (12.66)$$

Note que, sendo  $F^{\mu\nu}$  um tensor de rank 2, ele se transforma

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu F^{\alpha\beta} \quad (12.67)$$

e campos elétricos e/ou magnéticos podem surgir em um referencial mesmo sem existir em outro. Por isso o termo campo eletromagnético: eles não só se propagam juntos numa onda, mas são diferentes "projeções" de um mesmo ente físico. Similar à uma função de onda quântica  $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$  que é uma projeção de um estado quântico  $|\psi\rangle$  abstrato em uma representação específica na base  $|x\rangle$  de autovetores do operador posição X.