# Capítulo 10

# Equações de Maxwell

## 10.1 Fluxo Magnético

- Lei de Gauss: relaciona fluxo elétrico com carga elétrica.
- O equivalente para campos magnéticos também é uma equação fundamental do eletromagnetismo:

$$\Phi_B^S = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{Lei de Gauss, Magnetismo} \tag{10.1}$$

- Expressa a inexistência de cargas magnéticas, também chamadas monopolos magnéticos.
- Campos elétricos são gerados pela simples presença de cargas elétricas, ou pela variação temporal de campos magnéticos. Já os campos magnéticos podem ser produzidos por correntes, i.e. cargas em *movimento*, ou, como veremos adiante, por variação temporal do campo elétrico.
- Apenas configurações *dipolares*, como e.g. ímas com polos norte e sul, podem gerar campos magnéticos. Tais configurações surgem de movimentos internos de cargas dentro dos corpos magnéticos.
- Paul Dirac mostrou que, se monopolos magnéticos existissem, isso explicaria a quantização da carga elétrica. Infelizmente, cargas magnéticas nunca foram observados.

## 10.2 Corrente de Deslocamento: Lei de Ampere-Maxwell

Considere um capacitor de placas paralelas sendo carregado. Pela Lei de Gauss, a carga em um determinado instante é dada por

$$q = \epsilon_0 \Phi_E^S \tag{10.2}$$

onde $\Phi_E^S$ é o fluxo por uma superfície $S$ que contém $q$. A corrente no circuito associado é

$$i = \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E^S}{dt} \tag{10.3}$$

Entretanto, entre as placas, não há movimento de cargas e não há, portanto, corrente de *condução*.

Para impor uma ”continuidade”da corrente, Maxwell propôs a idéia de uma corrente de *deslocamento* $i_d$ entre as placas igual à corrente de condução no circuito:

$$i_d = i = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E^S}{dt} \tag{10.4}$$

O nome não é apropriado, pois não há movimento de cargas que crie corrente entre as placas. A idéia, no entanto, é que a variação temporal do fluxo elétrico faz o papel de uma corrente imaginária entre as placas.

Em outras palavras, da mesma forma que no circuito existe um campo elétrico empurrando as cargas e criando a corrente de condução, entre as placas também existe um campo elétrico; ele simplesmente não tem cargas para criar uma corrente de condução, mas ele está associado a uma corrente de deslocamento.

De fato, entre as placas do capacitor $E = \sigma/\epsilon_0$ e o fluxo na superfície $S$ de área $A$ do capacitor é $\Phi_E^S = EA = \sigma A/\epsilon_0 = q/\epsilon_0$. Portanto, pela Eq. 10.4, $i_d$ fica

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E^S}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{\epsilon_0}\right) = \frac{dq}{dt} = i \tag{10.5}$$

Maxwell propôs então que esta corrente de deslocamento deve ser adicionada à corrente de condução na Lei de Ampere

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \;\; = \;\; \mu_0(i_{\text{cond}} + i_d) \tag{10.6}$$

ou seja

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \;\; = \;\; \mu_0 i_{\text{cond}} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E^S}{dt} \quad \text{(Lei de Ampere – Maxwell)} \tag{10.7}$$

Note que, com essa adição, se estabelece uma simetria com a Lei de Faraday: da mesma forma que a variação do fluxo magnético gera um campo elétrico, agora vemos que a variação do fluxo elétrico gera um campo magnético.

De fato, a Lei de Ampere não faria sentido sem o termo extra de Maxwell. Uma maneira simples de ver isso é imaginar uma superfície aberta $S_1$ definindo uma curva $C$, atravessada pela corrente de condução, como na Fig 10.1. Pode-se usar a Lei de Ampere para obter o campo magnético circulante nesse caminho. Entretanto, se mantivermos a curva $C$ mas deformarmos a superfície de tal forma que ela passe entre as placas do capacitor e nunca seja atravessada pela corrente (e.g. a superfície $S_2$), a Lei de Ampere original diria que a circulação do campo em $C$ é nula. Obviamente, o campo magnético real não pode depender da configuração de uma superfície imaginária (Feynman). Isso indica que algo está faltando na equação original: a corrente de deslocamento de Maxwell.

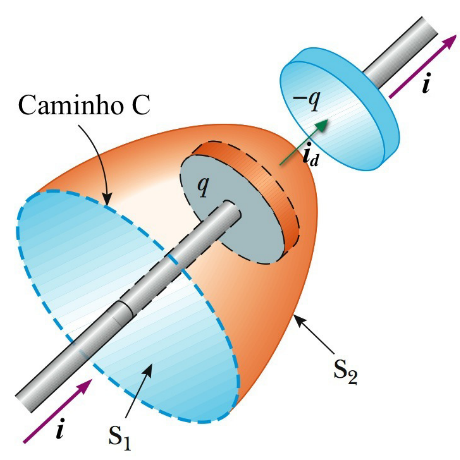


Figura 10.1: Corrente de deslocamento em um capacitor de placas paralelas e carga $q$. O campo magnético no caminho $C$ não depende da superfície Amperiana escolhida, o que implica a necessidade da corrente de deslocamento entre as placas. (Serway)

## 10.3 Equações de Maxwell: Forma Integral

As equações de Maxwell descrevem como cargas e correntes dão origem a campos elétricos e magnéticos. Essas equações são dadas, em sua forma integral, por

$$\Phi_E^S \equiv \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \quad \text{(Lei de Gauss)} \tag{10.8}$$

$$\Phi_B^S \equiv \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{(Lei de Gauss, Magnetismo)} \tag{10.9}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B^C}{dt} \quad \text{(Lei de Faraday)} \tag{10.10}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{in}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E^C}{dt} \quad \text{(Lei de Ampere)} \tag{10.11}$$

onde:
$S$ é uma superfície fechada,
$d\vec{S}$ é um vetor perpendicular a $S$;
$C$ é uma curva fechada,
$d\vec{l}$ é um vetor paralelo (tangencial) a $C$;
$\vec{E}$ é o campo elétrico;
$\vec{B}$ é o campo magnético;
$\Phi_E^S$ é o fluxo elétrico que atravessa $S$;
$\Phi_B^S$ é o fluxo magnético que atravessa $S$;
$q_{\text{in}}$ é a carga elétrica dentro de $S$;
$i_{\text{in}} = dq/dt$ é a corrente elétrica que atravessa $C$;
$\Phi_E^C$ é o fluxo elétrico na superfície *aberta* apoiada em $C$;
$\Phi_B^C$ é o fluxo magnético na superfície *aberta* apoiada em $C$;
$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ $\text{C}^2/\text{Nm}^2$ é a permissividade elétrica no vácuo;
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} = 1.26 \times 10^{-6}$ T.m/A é a permeabilidade magnética no vácuo.

- Lei de Gauss: indica como cargas elétricas criam campos elétricos; note que somente as cargas dentro da superfície Gaussiana contribuem para o fluxo elétrico.

- Lei de Gauss do magnetismo: formaliza a inexistência de monopólos magnéticos (cargas magnéticas).

- Lei de indução de Faraday: indica que um fluxo magnético variável pode induzir a formação de um campo elétrico circulante e, por conseguinte, uma diferença de potencial e uma corrente elétrica. O sinal negativo garante que a corrente induzida produz um campo magnético que se opõe a variação que lhe deu origem (Lei de Lenz). Caso contrário, o feedback positivo seria incompatível com conservação de energia.

- A Lei de Ampere descreve duas maneiras de gerar um campo magnético circulante:

  i) através de correntes elétricas,

  ii) por variação temporal do fluxo elétrico.

- Por outro lado, cargas testes $q$ com velocidade $v$ na presença destes campos sofrem forças eletromagnéticas, descritas pela força de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{10.12}$$

- Juntas, essas equações descrevem todos os fenômenos eletromagnéticos conhecidos.

## 10.4 Operadores Diferenciais

Definindo um operador diferencial $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{10.13}$$

visualizado como um vetor comum, e usando operações de cálculo vetorial, como produto escalar e produto vetorial, podemos definir operadores convenientes para cálculos eletromagnéticos.

### 10.4.1 Gradiente

Seja $\phi$ um campo escalar. Seu gradiente é um vetor, denotado por $\vec{\nabla}\phi$, e definido por

$$\vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \tag{10.14}$$

### 10.4.2 Divergente

Seja $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ um campo vetorial. Seu divergente é um escalar, denotado por $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ e definido por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{10.15}$$

### 10.4.3 Rotacional

Seja $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ um campo vetorial. Seu rotacional é um vetor, denotado por $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ e definido por

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \tag{10.16}$$

### 10.4.4 Laplaciano

Seja $\phi$ um campo escalar. Seu Laplaciano é um escalar, denotado por $\nabla^2\phi$ e definido como $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi$, i.e. o divergente do gradiente de $\phi$:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tag{10.17}$$

Pode-se ainda definir o Laplaciano de um vetor $\vec{E}$ como um vetor cujas componentes são Laplacianos das componentes de $\vec{E}$:

$$\nabla^2 \vec{E} = \left(\nabla^2 E_x, \nabla^2 E_y, \nabla^2 E_z\right) \tag{10.18}$$

### 10.4.5 Relações entre Operadores

**Exercício 1**

Mostre que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \tag{10.19}$$
$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0 \tag{10.20}$$

para quaisquer $\phi$ e $\vec{A}$.

*Solução*:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{10.21}$$

E

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) &= \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}\right) \\
&= \vec{0}
\end{aligned} \tag{10.22}$$

Essas relações implicam:

i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \;\Rightarrow\; \exists\ \vec{A} \;:\; \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

ii) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \;\Rightarrow\; \exists\ \phi \;:\; \vec{E} = \vec{\nabla}\phi$

**Exercício 2**

Mostre que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \tag{10.23}$$

*Solução*:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Para e.g. a componente $x$ do operador, temos

$$\begin{aligned}
\left[\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right]_x &= \frac{\partial(\vec{\nabla}\times A)_z}{\partial y} - \frac{\partial(\vec{\nabla}\times A)_y}{\partial z} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial x} \underbrace{-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}}_{\nabla^2 A_x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}} - \nabla^2 A_x \\
&= \vec{\nabla}_x(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2 A_x \qquad (10.24)
\end{aligned}$$

Mostrando-se similarmente para as componentes $y$ e $z$, chega-se à expressão vetorial.

## 10.5 Fluxo e Circulação

Vamos calcular fluxo e circulação de elementos infinitesimais e mostrar que divergente é fluxo por unidade de volume e rotacional é circulação por unidade de área.

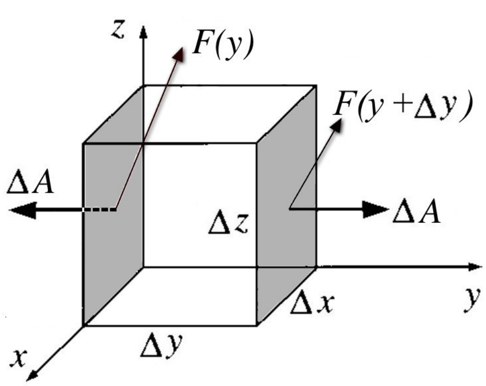


Figura 10.2: Fluxo de $\vec{F}(x,y,z)$ em um cubo infinitesimal. Os elementos de area mostrados tem magnitude $\Delta A = \Delta x\Delta z$, mas apontam em sentidos opostos em $y$ e em $y+\Delta y$. (Adaptado de Griffiths)

Considere o fluxo de um campo $\vec{F}(x,y,z)$ através de um elemento de volume infinitesimal em $(x,y,z)$ e lados $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. A contribuição das duas faces cinzas perpendiculares ao eixo $y$, mostradas na Fig. 10.2, é

$$\begin{aligned}
\Phi_F^y &= \int \vec{F}\cdot d\vec{A} \\
&= F_y(x, y+\Delta y, z)\Delta x\Delta z - F_y(x,y,z)\Delta x\Delta z
\end{aligned}$$

Usando a aproximação em primeira ordem

$$F_y(x, y+\Delta y, z) = F_y(x,y,z) + \frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta y$$

essa contribuição fica

$$\Phi_F^y = \frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$

O fluxo total sobre o cubo fica então

$$\begin{aligned}
\Phi_F^S &= \Phi_E^x + \Phi_E^y + \Phi_E^z \\
&= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z \\
&= (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\ \Delta v \qquad (10.25)
\end{aligned}$$

onde $\Delta v = \Delta x\Delta y\Delta z$ é o volume do cubo. Assim, vemos que o divergente pode ser interpretado como o fluxo por unidade de volume.

Considere a circulação de um campo $\vec{F}(x,y,z)$ através de um circuito infinitesimal em $(x,y,z)$ no plano $(y,z)$ e com lados/projeções $(\Delta y, \Delta z)$. A contribuição dos dois comprimentos verticais mostrados na Fig. 10.3 é dada por

$$\begin{aligned} C_F^y &= \int \vec{F}\cdot d\vec{l} \\ &= F_z(x,y+\Delta y,z)\Delta z - F_z(x,y,z)\Delta z \end{aligned}$$

e, similarmente, a dos dois comprimentos horizontais

$$C_F^z = F_y(x,y,z)\Delta y - F_y(x,y,z+\Delta z)\Delta y$$

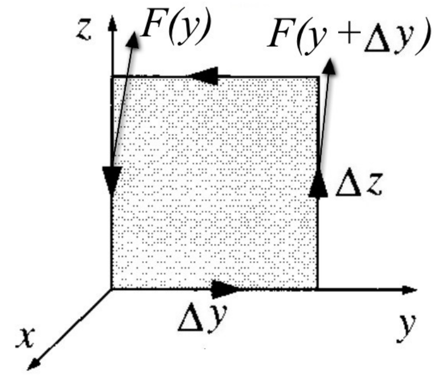


Figura 10.3: Circulação de $\vec{F}(x,y,z)$ em um circuito infinitesimal. (Adaptado de Griffiths)

Usando as expansões em primeira ordem, temos

$$\begin{aligned} C_F^y &= \frac{\partial F_z}{\partial y}\Delta y \Delta z \\ C_F^z &= -\frac{\partial F_y}{\partial z}\Delta z \Delta y \end{aligned}$$

A circulação total é dada então por :

$$\begin{aligned} C_F^{y,z} &= C_F^y + C_F^z = \frac{\partial F_z}{\partial y}\Delta y\Delta z - \frac{\partial F_y}{\partial z}\Delta y \Delta z \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\Delta y \Delta z \\ &= \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)_x \Delta a_x \end{aligned} \tag{10.26}$$

onde $\Delta a_x = \Delta y \Delta z$, e a componente $x$ na verdade significa a componente perpendicular ao plano do circuito $(y,z)$. Generalizando para circuitos em direções quaisquer temos

$$C_F = \; = \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\Delta\vec{a} \tag{10.27}$$

Portanto, o rotacional é a circulação por unidade de area.

## 10.6 Teoremas do Cálculo Vetorial

### 10.6.1 Teorema Fundamental do Cálculo

O principal resultado do cálculo *unidimensional* é o *Teorema Fundamental do Cálculo*, que diz que a integral da derivada de uma função $f(x)$ é simplesmente a diferença da própria função calculada nos limites de integração

$$\int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = f(b) - f(a) \quad \text{(Teorema Fundamental)} \tag{10.28}$$

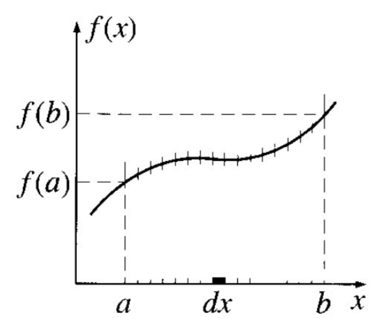


Figura 10.4: Teorema fundamental do cálculo unidimensional. (Griffiths)

i.e. a integral *desfaz* a derivada da função, deixando apenas o efeito dos pontos limites da função no intervalo considerado.

Pensando na integral como o limite da soma de intervalos infinitesimais, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{df}{dx}dx &= \sum_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta x = \sum_{i=1}^{N}\frac{(f_{i+1}-f_i)}{\Delta x_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{N}(f_{i+1}-f_i)\\ &= (f_2-f_1)+(f_3-f_2)+(f_4-f_3)+...+f_{N-1}-f_{N-2}+f_N-f_{N-1}\\ &= -f_1+f_N = f(b)-f(a) \end{aligned} \quad (10.29)$$

### 10.6.2 Teorema Fundamental Multidimensional

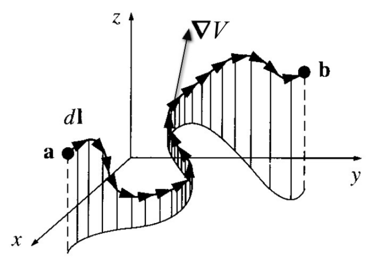


Figura 10.5: Teorema fundamental multidimensional. A integral de um gradiente em um caminho. (Griffiths)

O Teorema Fundamental pode ser facilmente estendido para a integral em um caminho de um gradiente:

$$\int_a^b \vec{\nabla}V\cdot d\vec{l} = V(b)-V(a) \quad \text{(Gradiente)} \quad (10.30)$$

Esse resultado pode ser mostrado de forma similar ao Teorema Fundamental unidimensional usando o fato de que

$$dV = \vec{\nabla}V\cdot d\vec{l} \quad (10.31)$$

Novamente, somente os valores nas bordas sobrevivem aos cancelamentos internos na integração.

### 10.6.3 Teorema de Gauss

Esses resultados podem ser generalizados para integrais de superfície e de volume pelos teoremas de Stokes e Gauss, respectivamente.

O Teorema de Gauss diz que a integral tripla do divergente de $\vec{E}$ no volume $V$ definido pela superfície $S$ é a integral de superfície de $\vec{E}$ na superfície $S$:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\ dV = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \quad \text{(Teorema de Gauss)} \quad (10.32)$$

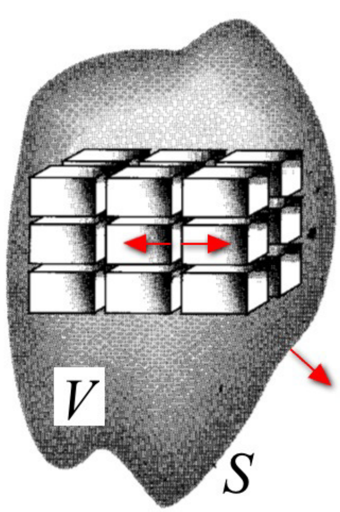


Figura 10.6: Teorema de Gauss. Um volume qualquer preenchido com cubos. Após cancelamentos internos, somente a contribuição do fluxo na superfície externa sobrevive. (Griffiths)

Para mostrar o teorema de Gauss, nós imaginamos o volume arbitrário subdividido em cubos infinitesimais, como na Fig 10.6. A integral no volume é obtida somando as contribuições dos vários cubos, cada uma das quais é dada pela Eq. 10.25:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\ dV = \sum_{\Delta v\to 0}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\ \Delta v_{\text{cubo}} = \sum \Phi_E^{\text{cubos}} \quad (10.33)$$

Na soma dos fluxos nos cubos, as contribuições de superfícies internas se cancelam, pois vem sempre em pares de sinais opostos. Sobra apenas a contribuição das faces externas:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\ dV = \sum \Phi_E^{\text{cubos}} = \sum\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

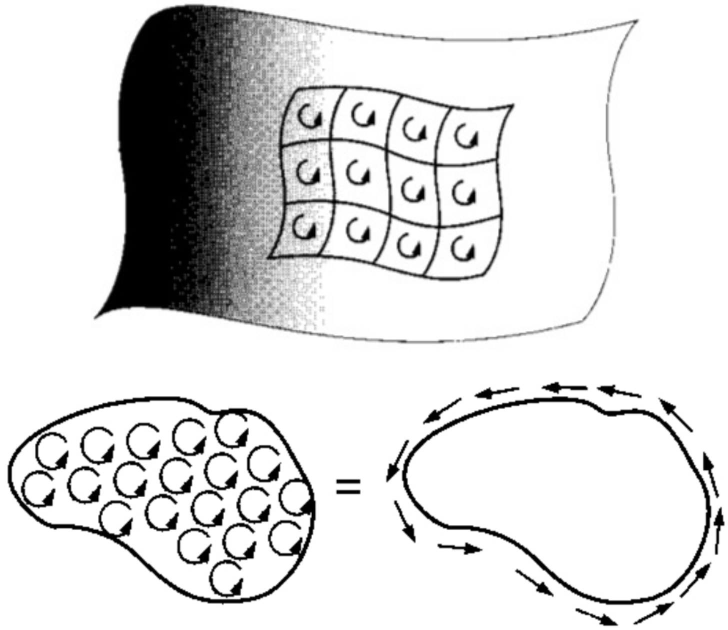

Figura 10.7: Teorema de Stokes. A superfície arbitrária é preenchida por circuitos quadrados infinitesimais. Após cancelamentos internos somente a circulação na curva externa sobrevive. (Griffiths).

### 10.6.4 Teorema de Stokes

O Teorema de Stokes diz que a integral dupla do rotacional de um campo vetorial $\vec{E}$ na superfície aberta $S$ definida pela curva fechada $C$ é a integral de linha de $\vec{E}$ na curva $C$:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{(Teorema de Stokes)} \tag{10.34}$$

Para mostrar o teorema de Stokes, nós imaginamos a superfície arbitrária subdividida em circuitos infinitesimais, como na Fig 10.7. A integral na superfície é obtida somando as contribuições dos vários circuitos quadrados, cada uma dada pela Eq. 10.27:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{\Delta S \to 0} \vec{\nabla} \times \vec{E}\ \Delta S_{\text{quadrado}} = \sum C_E^{\text{quadrados}} \tag{10.35}$$

Na soma das circulações dos quadrados, as contribuições de lados internos se cancelam, pois vem sempre em pares de sinais opostos. Sobra apenas a contribuição da curva externa delimitando a superfície:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum C_E^{\text{quadrados}} = \sum \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Note que todos esses casos correspondem esquematicamente a

$$\int_A \tilde{\partial} \tilde{f} = \left[\tilde{f}\right]_{\partial A} \tag{10.36}$$

onde $\tilde{\partial}$ denota derivadas generalizadas (em 1, 2 ou 3 dimensões), $\tilde{f}$ denota um campo generalizado (escalar ou vetorial), $A$ denota uma região generalizada (intervalo, superfície ou volume) e $\partial A$ denota a fronteira de $A$ (ponto, curva ou superfície).

## 10.7 Equações de Maxwell: Forma Diferencial

Usando o teorema de Gauss e o teorema de Stokes nas Equações de Maxwell na forma integral, e, notando que essas equações são válidas para volumes, superfícies e curvas *gerais*, obtém-se as equações de Maxwell na forma diferencial.

Por exemplo, partindo da Lei de Gauss, podemos usar o teorema de Gauss no lado esquerdo e expressar a carga como integral da densidade de carga no lado direito, obtendo:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \\ \rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV, \ \forall \ V \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \tag{10.37}$$

Outro exemplo seria partir da Lei de Ampere, usar o teorema de Stokes e expressar a corrente como integral da densidade de corrente, obtendo:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 i_{\text{in}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ \rightarrow \int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \ \forall \ S \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{10.38}$$

Procedendo de forma similar para as outras equações, obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{(Lei de Gauss)} \tag{10.39}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{(Lei de Gauss do Magnetismo)} \tag{10.40}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(Lei de Faraday)} \tag{10.41}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{(Lei de Ampere)} \tag{10.42}$$

onde $\rho$ é a densidade de carga elétrica ($q = \int \rho dV$) e $\vec{j}$ é a densidade de corrente elétrica ($i = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$).

### 10.7.1 Decomposição de Campos Vetoriais

Vamos provar dois fatos interessantes de um campo vetorial $\vec{V}$ que decai a zero no infinito de forma suficientemente rápida (e.g. $|\vec{V}(\vec{x})| \propto 1/r^n$, com $n > 1$)[1]:

1) $\vec{V}$ pode ser decomposto na soma de um gradiente $\vec{\nabla}\phi$ e de um rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{A}$.
2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ e $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ são suficientes para determinar o campo $\vec{V}$ expandido da maneira acima.

O primeiro fato segue da identidade (veja Eq. 10.23)

$$\nabla^2 \vec{Z} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{Z}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{Z}) \,. \tag{10.43}$$

Identificando

$$\vec{V} = \nabla^2 \vec{Z} \tag{10.44}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{Z} = \phi \tag{10.45}$$

$$-\vec{\nabla} \times \vec{Z} = \vec{A} \tag{10.46}$$

[1]Este é o caso para $\vec{E}$ e $\vec{B}$ devido a elementos infinitesimais de carga e corrente: ambos decaem com $1/r^2$.

temos

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{10.47}$$

e é sempre possível fazer tal decomposição, pois dado o vetor $\vec{V}$, mostra-se que podemos sempre achar $\vec{Z}$ resolvendo a Eq. (10.44). Esta equação é denotada Equação de Poisson (ver Apêndice I), e aparece com frequência no Eletromagnetismo e na Gravitação. Sua solução pode ser obtida pelo método da Função de Green (ver Apêndice L), e o resultado é

$$\vec{Z} \;=\; \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{V}(\vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|}\,. \tag{10.48}$$

Uma vez determinado $\vec{Z}$, pode-se então determinar $\phi$ e $\vec{A}$ pelas Eqs. (10.45) e (10.46). Essa decomposição permite afirmar que:

i) Se $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$, então $\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (rotacional puro).
ii) Se $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$, então $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$ (gradiente puro).

Usando a decomposição da Eq. (10.47), temos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \nabla^2\phi + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \nabla^2\phi \tag{10.49}$$

e portanto

$$\phi \;=\; \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{V}(\vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \tag{10.50}$$

Outra forma de obter esse resultado é via (Use $\vec{\nabla} \cdot (\alpha\vec{V}) = \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\alpha + \alpha\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$)

$$\begin{aligned} \phi \;&=\; \vec{\nabla} \cdot \vec{Z} = \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \vec{V}(\vec{x'}) \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x'}|} = -\int d^3x' \frac{1}{4\pi} \vec{V}(\vec{x'}) \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \\ &=\; -\underbrace{\int d^3x' \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}' \cdot \left( \frac{\vec{V}(\vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \right)}_{=0 \text{ se } r^2[\vec{V}(r)/r] \to 0 \text{ quando } r \to \infty} + \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{V}(\vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \end{aligned} \tag{10.51}$$

Além disso

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{V} \;&=\; \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &=\; \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A} && (10.52) \\ &=\; \vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Z})] - \nabla^2\vec{A} && (10.53) \\ &=\; -\nabla^2\vec{A} && (10.54) \end{aligned}$$

e portanto

$$\vec{A} \;=\; -\int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{V}(\vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \tag{10.55}$$

Desta forma, basta saber $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ e $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ para determinar $\phi$ e $\vec{A}$ e, assim, o próprio campo $\vec{V}$ pela decomposição acima. É por isso que é suficiente as Equações de Maxwell lidarem com divergentes e rotacionais dos campos elétrico e magnético: eles determinam os campos unicamente, desde que estes decaiam a zero de forma suficientemente rápida no infinito.

## 10.8 Conservação da Carga

A carga elétrica é conservada, ou seja cargas não são criadas nem destruídas. Além disso, se e.g. a carga em um ponto está diminuindo, é porque parte da carga está se deslocando a outro ponto na forma corrente elétrica. Matematicamente, a conservação da carga é expressa como :

$$\frac{dq}{dt} = -i \tag{10.56}$$

i.e. a variação da carga em um ponto balanceia exatamente a corrente que sae deste ponto. Se a corrente for positiva, a carga no ponto está diminuindo, e por isso o sinal negativo. Considerando esta igualdade dentro de um volume $V$ com borda superficial $S$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV &= -\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \\ \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV &= -\int_V \nabla\cdot\vec{j}\, dV \end{aligned} \tag{10.57}$$

como essa igualdade vale para qualquer volume $V$ arbitrário, temos

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \qquad \text{(Eq. da continuidade)} \tag{10.58}$$

Esta equação é chamada de Eq. da continuidade e diz simplesmente que, se a densidade de carga varia no tempo em certo ponto do espaço, é porque a densidade de corrente diverge naquele ponto, ou seja cargas não são criadas nem destruídas, apenas se movem de um lugar a outro.

Por outro lado, tomando o divergente da Lei de Ampere-Maxwell, temos:

$$\begin{aligned} 0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \vec{\nabla}\cdot\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \\ &= \mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}{\partial t} \\ &= \mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial(\rho/\epsilon_0)}{\partial t} \\ &= \mu_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) . \end{aligned}$$

ou seja, obtemos novamente a Eq. da continuidade:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \tag{10.59}$$

Portanto, as Equações de Maxwell automaticamente garantem que cargas são conservadas, não sendo necessário postular isso adicionalmente.

## 10.9 Potenciais Eletromagnéticos

É conveniente definir potenciais relacionados aos campos elétrico e magnético. Esses potenciais são definidos das Eqs. de Maxwell sem fontes (cargas e correntes). Primeiramente, como

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{10.60}$$

segue que $\vec{B}$ deve ser o rotacional de algum campo vetorial $\vec{A}$, conhecido como o potencial vetor magnético

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{10.61}$$

Usando essa expressão na outra equação para $\vec{E}$, temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \tag{10.62}$$

Portanto

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{10.63}$$

e segue que o termo entre parênteses deve ser o gradiente de algum campo escalar $\phi$, conhecido como o potencial escalar elétrico.

O potencial elétrico $\phi$ e o potencial vetor magnético $\vec{A}$ são portanto definidos por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{10.64}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{10.65}$$

Note que, no caso eletrostático $\partial \vec{A}/\partial t = 0$ e $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, como no Cap. 3. Com essas definições, as duas Eqs. de Maxwell sem fonte obviamente são automaticamente satisfeitas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \tag{10.66}$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \tag{10.67}$$

$$= -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi - \frac{\partial (\vec{\nabla} \times A)}{\partial t} \tag{10.68}$$

$$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{10.69}$$

As equações com fonte podem então ser usadas para descrever a dinâmica dos potenciais, ou dos campos.

### 10.9.1 Transformação de Calibre

Os campos não são determinados unicamente pelos potenciais eletromagnéticos definidos acima. Se $\phi$ e $\vec{A}$ são soluções das Eqs. de Maxwell, os potenciais $\phi'$ e $\vec{A}'$ definidos por

$$\phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \tag{10.70}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \tag{10.71}$$

para uma função $f(\vec{x},t)$ qualquer, também são solução, pois

$$\begin{aligned}
\vec{E}' &= -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} && (10.72)\\
&= -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial(\vec{\nabla} f)}{\partial t} && (10.73)\\
&= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} && (10.74)
\end{aligned}$$

e similarmente

$$\begin{aligned}
\vec{B}' &= \vec{\nabla}\times\vec{A}'\\
&= \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} f) = \vec{B} && (10.75)
\end{aligned}$$

Portanto, temos a liberdade de escolher a função $f$ convenientemente sem alterar os campos. A escolha de $f$ implica a determinação de um calibre. Um calibre interessante na magnetostática é o Calibre de Coulomb

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \quad \text{(Calibre de Coulomb)} \tag{10.76}$$

Caso o campo $A$ nao satisfaça este calibre, basta definir $A'$ que satisfaça, o que requer

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \nabla^2 f = 0 \tag{10.77}$$

ou seja, basta resolver a equação $\nabla^2 f = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ para $f$, que sempre tem solução.

Outro calibre interessante, usado nas soluções de ondas eletromagnéticas, é o Calibre de Lorenz

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad \text{(Calibre de Lorenz)} \tag{10.78}$$

Das Eqs. 10.70 e 10.71, temos

$$\begin{aligned}
\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi'}{\partial t} &= \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} && (10.79)\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' &= \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \nabla^2 f && (10.80)
\end{aligned}$$

e para $\phi'$ e $A'$ satisfazerem o calibre de Lorenz, devemos requerer

$$\nabla^2 f - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}) \tag{10.81}$$

que também sempre tem solução para $f$.

Note que, mesmo após especificar o calibre, os potenciais ainda não são únicos. Por exemplo, se os potenciais já satisfazem o calibre especificado, por exemplo, o calibre de Lorenz, o lado direito da equação acima é zero, e outra função $g$ satisfazendo a equação de onda homogênea

$$\nabla^2 g - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0 \tag{10.82}$$

ainda pode ser adicionada aos potenciais com uma transformação de calibre extra, novamente sem alterar os campos.