Apêndice F

Lei de Ohm e Modelo de Drude

Na dedução da Lei de Ohm $V = Ri$, usamos o fato de que $v = (\sigma/nq)E \to j = \sigma E$. Vamos aqui justificar esta hipótese, já que poderia-se imaginar que na presença de um campo elétrico constante, uma carga deveria se acelerar, e não seria possível ter velocidade constante e proporcional ao campo. O ponto é que uma dada carga em um fio não está isolada, e interage com os átomos fixos e demais elétrons do material, que oferecem um atrito/resistência à sua aceleração.

Suponha então uma partícula de carga q e massa m sob ação de um campo elétrico $\vec{E}$. Esta partícula sofre uma força elétrica $q\vec{E}$, e vamos assumir que a partícula sofre também uma força de atrito $-\gamma\vec{v}$ devido às interações com as demais partículas do material. Aqui γ é um coeficiente de atrito e $v = dx/dt$ é a velocidade da partícula. Esta força de atrito é similar à que se sofre devido à resistência do ar quando se cai em queda livre na atmosfera. A segunda lei de Newton fica

$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v + qE\,. \tag{F.1}$$

Enquanto a força elétrica age no sentido de acelerar a partícula, o atrito se opõe ao movimento e cresce com a velocidade. Um estado estacionário é atingido quando a força resultante é nula, e se chega a uma *velocidade terminal* v_t:

$$m\frac{dv}{dt} = 0 \qquad \to \qquad v_t = \frac{q}{\gamma}E \tag{F.2}$$

Vamos investigar como exatamente esta solução estacionária é atingida em função do tempo. Podemos re-escrever a equação original como

$$\frac{dv}{v - qE/\gamma} = -\frac{\gamma}{m}dt\,. \tag{F.3}$$

Integrando, temos

$$\ln\left(v - \frac{q}{\gamma}E\right) = -\frac{\gamma}{m}t + K' \tag{F.4}$$

onde K' é uma constante de integração relacionada a condições iniciais. Assim

$$v(t) = \frac{q}{\gamma}E + Ke^{-\frac{\gamma}{m}t}\,, \tag{F.5}$$

onde $K = e^{K'}$. Supondo $v(t = 0) = 0$, temos:

$$v(0) = \frac{q}{\gamma}E + K = 0 \rightarrow K = -\frac{q}{\gamma}E\,, \tag{F.6}$$

de forma que a solução final fica

$$v(t) = \frac{q}{\gamma}E(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t})\,. \tag{F.7}$$

Portanto quando $t \rightarrow \infty$ (mais precisamente quando $t \gg \tau$, onde $\tau = 2m/\gamma$ é o *tempo de relaxação* do sistema), temos

$$v_t = v(t = \infty) = \frac{q}{\gamma}E\,. \tag{F.8}$$

Assim, de fato $v = (\sigma/nq)E$, e podemos identificar a condutividade σ

$$\sigma = \frac{nq^2}{\gamma}\,, \tag{F.9}$$

Ou similarmente a resistividade ρ

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{\gamma}{nq^2}\,. \tag{F.10}$$

Como a resistência R de um resistor de resistividade ρ, área A e comprimento l é

$$R = \rho\frac{l}{A}\,, \tag{F.11}$$

vemos que a resistência R é determinada pelo coeficiente de atrito γ, como esperado.

Um modelo mais simples consiste em imaginar que uma partícula é inicialmente acelerada pelo campo elétrico, mas é bruscamente parada pela interação com partículas vizinhas, sendo então novamente acelerada, bruscamente parada e assim por diante. Durante a aceleração $a = qE/m$ em um intervalo de tempo τ, a partícula partindo do repouso atinge uma velocidade máxima v_{max}

$$v_{max} = \frac{qE}{m}\tau\,, \tag{F.12}$$

percorrendo uma distância (*livre caminho médio*) $\Delta x = a\tau^2/2 = \frac{qE}{2m}\tau^2$. Assim, ela tem uma velocidade média entre colisões de

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\tau} = \frac{1}{2}v_{max} = \frac{q\tau}{2m}E\,. \tag{F.13}$$

Assim, identificamos a condutividade neste caso como $\sigma = nq^2\tau/2m$. Comparando com a Eq. F.9 obtida para o modelo de atrito contínuo, o coeficiente de atrito pode ser identificado

$$\gamma = \frac{2m}{\tau} \tag{F.14}$$

Portanto, tanto no modelo de atrito contínuo quanto no modelo de interações com acelerações e desacelerações discretas, temos $v \propto E$.