Apêndice O

Valor Médio de $\sin^2(kx - \omega t)$

A função $\sin^2(kx-\omega t)$ aparece frequentemente no vetor de Poynting de uma onda eletromagnética $S \propto |\vec{E} \times \vec{B}| \propto \sin^2(kx - \omega t)$. A intensidade da onda é definida como $I = \langle S \rangle$, onde $\langle ... \rangle$ denota o valor médio dentro da oscilação de um período temporal $T = 2\pi/\omega$ e/ou de um comprimento de onda espacial $\lambda = 2\pi/k$. Vamos portanto calcular o valor médio:

$$\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle \equiv \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \sin^2(kx - \omega t) dx \,. \tag{O.1}$$

O.1 Método 1: Relação Trigonométrica

Vamos primeiro considerar o valor médio da função $\sin^2 x$, do qual será trivial obter o resultado para a onda mais geral. Note que neste caso temos $k = 1$ e portanto o comprimento de onda é simplesmente $\lambda = 2\pi$. Assim

$$\langle \sin^2 x \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x \; dx \,. \tag{O.2}$$

Usando a relação trigonométrica $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, que para $x = y$ nos dá

$$\cos(2x) = \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \qquad \rightarrow \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \tag{O.3}$$

Substituindo esta relação na integral, temos:

$$\langle \sin^2 x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \; dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} [\pi] = \frac{1}{2} \tag{O.4}$$

Vamos considerar agora o valor médio de $\sin^2(kx)$, que segue trivialmente considerando $x' = kx$:

$$\langle \sin^2(kx) \rangle = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \sin^2 kx \; dx = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x' \; \frac{dx'}{k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x' \; dx' = \langle \sin^2 x \rangle = \frac{1}{2} \tag{O.5}$$

Finalmente, considerando o valor médio de $\sin^2(kx - \omega t)$, também segue trivialmente considerando $x' = kx - \omega t$, sendo que ωt é constante na integração espacial. Assim:

$$\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \sin^2(kx - \omega t)\ dx = \frac{k}{2\pi} \int_{-\omega t}^{2\pi - \omega t} \sin^2 x'\ \frac{dx'}{k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x'\ dx' = \langle \sin^2 x \rangle = \frac{1}{2} \tag{O.6}$$

O.2 Método 2: Integração por partes

Podemos integrar por partes, obtendo:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 x\ dx &= \int_0^{2\pi} \sin x \sin x\ dx = \underbrace{\left|\sin x \cos x\right|_0^{2\pi}}_{0} + \int_0^{2\pi} \cos x \cos x dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 x\ dx = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 x)\ dx \\ &= 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2 x\ dx \end{aligned} \tag{O.7}$$

Combinando o último termo do lado direito com o lado esquerdo, temos:

$$2 \int_0^{2\pi} \sin^2 x\ dx = 2\pi \qquad \rightarrow \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2 x\ dx = \pi \tag{O.8}$$

Assim,

$$\langle \sin^2 x \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2} \tag{O.9}$$

O.3 Método 3: Visualização Gráfica

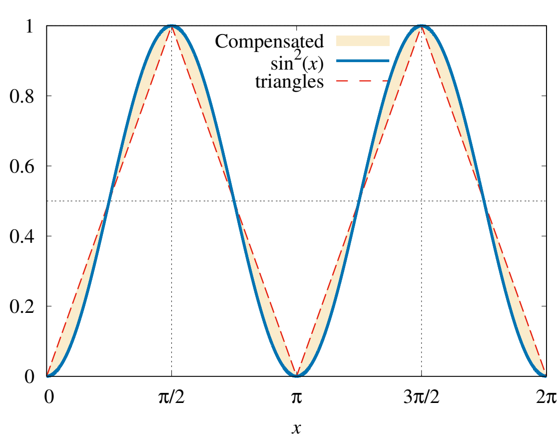

Figura O.1: Função $\sin^2 x$ (linha azul sólida) e triângulos (linha vermelha tracejada). Devido à compensação de áreas (regiões amarelas), as áreas sob ambas as curvas coincidem.

Por fim, considere a Fig. O.1, que mostra a função $\sin^2 x$ e também linhas retas tracejadas formando 2 triângulos de base $B = \pi$ e altura $H = 1$.

As regiões entre as duas funções (áreas amarelas) tem áreas idênticas acima e abaixo da linha $y = 0.5$. Desta forma, no intervalo mostrado, devido à compensação das áreas amarelas, temos que a área sob a curva $\sin^2 x$ é idêntica à área sob os 2 triângulos tracejados:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 x\ dx &= 2\text{Área}\ \triangle = 2\frac{B \times H}{2} = 2\frac{\pi \times 1}{2} \\ &= \pi \end{aligned} \tag{O.10}$$