Apêndice N

Solução Geral da Equação de Ondas Eletromagnéticas

No caso geral em que há presença de densidades de cargas ρ e correntes $\vec{j}$, vimos que os potenciais eletromagnéticos $\phi, \vec{A}$ satisfazem as Eqs. de Onda não-homogêneas:

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial \vec{\nabla}\cdot\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{N.1}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \tag{N.2}$$

N.1 Calibre de Lorenz

No Calibre de Lorenz:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{N.3}$$

onde $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$, e as Eqs. de Onda não-homogêneas ficam:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{N.4}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} \tag{N.5}$$

A solução desta equação pode ser obtida sistematicamente encontrando a função de Green (veja Apêndice L) para o operador d'Alambertiano $\Box^2$:

$$\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{N.6}$$

Este procedimento é feito em textos de Eletromagnetismo mais avançados (e.g. Griffiths e/ou Jackson), e requer o uso de transformadas de Fourier e o Teorema de Resíduos em varíaveis complexas. Entretanto, o resultado final é bastante intuitivo fisicamente, e portanto, antes de apresentar a solução via a função de Green, vamos focar inicialmente nesta interpretação.

Primeiramente, vamos notar que o d'Alambertiano é apenas uma versão quadrimensional do Laplaciano, de modo que esperamos as soluções não muito distintas.

No caso estático, no qual as derivadas temporais são nulas, temos a Eq. de Poisson:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{N.7}$$

cuja solução vimos ser dada por:

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x'})d^3x'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x'}|} \tag{N.8}$$

Vimos (Apêndice I) que esta solução simplesmente formaliza o princípio de *superposição* na integração de elementos pontuais (modelados pela função delta).

Por outro lado, no caso da Eq. de Onda homogênea, tínhamos:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{N.9}$$

cuja solução vimos ser dada por:

$$\phi(\vec{x}, t) = F[\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{c}t)] \tag{N.10}$$

para uma função qualquer F.

Aqui a mensagem é que a solução expressa *propagação*, pois o valor da solução em $(\vec{x}, t) = (0, 0)$ é o mesmo que em $(\vec{x}, t) = (\vec{c}\delta t, \delta t)$, ou seja em uma posição mais à frente e em um tempo posterior: $\phi(\vec{c}\delta t, \delta t) = F[\vec{k} \cdot (\vec{c}\delta t - \vec{c}\delta t)] = F[0] = \phi(0, 0)$.

A idéia de *propagação* tem a ver com o conceito de *causalidade*: os campos e potenciais se propagam com velocidade c finita e os valores deles em posições e instantes atuais e futuros são causados ou ao menos correlacionados com a onda em posições distintas em instantes anteriores.

Muito embora a discussão acima sobre propagação seja referente à solução da equação de onda no vácuo, podemos imaginar que os campos e potenciais foram produzidos por cargas e correntes no infinito e se propagam agora em regiões bastante afastadas destas cargas que lhes deram origem, regiões estas que chamamos de vácuo. Ora, se a solução se *propaga* no tempo por diferentes posições, é natural esperar que voltando-se suficientemente no tempo, a onda estará bem próxima das cargas e correntes que a deram origem naquele tempo (e não agora). Note que após produzir a onda, as cargas e correntes podem inclusive se mover para outro local, e a onda continuará se propagando. É como o filho pródigo que continua sua vida neste momento, independentemente do que seus pais fazem agora, mas certamente dependendo do que os pais fizeram em algum momento do passado. Nesta analogia, podemos pensar que a carga é a mãe, algum efeito que faça a carga acelerar é o pai, e a onda é o filho.

A propagação implica, portanto, que o comportamento da onda em um ponto agora dependa do comportamento da onda em outro ponto em um instante anterior. Retornando essa série causal até a carga que deu origem à onda (sua causa original), temos que a posição da carga no tempo passado é que determina a onda agora. A causalidade é um conceito filosófico, obviamente fundamental na Física, especialmente na Teoria da Relatividade, e se contrasta frontalmente com a idéia de *ação à distância*, na qual campos se propagam instantaneamente.

Assim, a solução da equação de ondas não-homogênea terá propriedades de ambas as soluções acima, i.e. o efeito das densidades de carga dado pela Eq. de Poisson, e os efeitos da propagação descritos pela Eq. de Ondas homogênea. De fato, a solução é dada por:

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{\rho(\vec{x'},t_{\rm ret})d^3x'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x'}|}\,, \tag{N.11}$$

onde o tempo retardado $t_{\rm ret} = t - |\vec{x}-\vec{x'}|/c$. Esta solução é portanto praticamente idêntica à solução da Eq. de Poisson, com a única e fundamental distinção, de que o potencial no instante t não depende do arranjo das cargas no mesmo instante, mas em um instante anterior ou *retardado* $t_{\rm ret}$. Note que a diferença de tempo $\delta t = t - t_{\rm ret} = |\vec{x}-\vec{x'}|/c$ é exatamente o tempo que a onda demora para se deslocar, na velocidade da luz, da posição $\vec{x'}$ da carga até a posição $\vec{x}$ onde temos interesse em calcular o potencial.

Por fim, como mencionado anteriormente, este resultado é obtido formalmente via a função de Green retardada para o d'Alambertiano, que é dada por (veja Apêndice L):

$$G(\vec{x},t) = -\frac{c}{4\pi r}\delta(r-ct) = -\frac{1}{4\pi r}\delta(r/c-t)\,. \tag{N.12}$$

Desta forma, a solução da Eq. de Ondas fica

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x},t) &= \int d^3x' \int dt' G(\vec{x}-\vec{x'},t-t')\left(-\frac{\rho(\vec{x'},t')}{\epsilon_0}\right) \\
&= \int d^3x' \int dt' \frac{\rho(x,t')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x'}|}\delta(|\vec{x}-\vec{x'}|/c-(t-t')) \\
&= \int d^3x' \int dt' \frac{\rho(x,t')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x'}|}\delta[t' - \underbrace{(t-|\vec{x}-\vec{x'}|/c)}_{t_{\rm ret}}] \\
&= \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x'},t_{\rm ret})}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x'}|}
\end{aligned} \tag{N.13}$$

onde a integração em t' foi feita trivialmente usando a função delta, que faz $\rho(\vec{x},t')$ ser avaliado em $t' = t_{\rm ret} = t - |\vec{x}-\vec{x'}|/c$.

Similarmente, o potencial vetor é dado por:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}(\vec{x'},t_{\rm ret})d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x'}|} \tag{N.14}$$

N.1.1 Campos

Por fim, podemos obter os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. No caso do campo magnético, temos:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \underbrace{\int \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x'}|}\right)\times\vec{j}(\vec{x'},t_{\rm ret})d^3x'}_{\vec{B}_1} + \underbrace{\int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\nabla}\times\vec{j}(\vec{x'},t_{\rm ret})d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x'}|}}_{\vec{B}_2} \tag{N.15}$$

Seguimos os mesmos passos do Apêndice J no cálculo de $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ (mas lá na magnetostática e no Calibre de Coulomb), para obter para $\vec{B}_1$ um resultado similar, mas com $t_{\rm ret}$:

$$\vec{B}_1 = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}(\vec{x'},t_{\rm ret})\times\frac{(\vec{x}-\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|^3}d^3x' \tag{N.16}$$

Para B_2, precisamos apenas nos lembrar de que $t_{\text{ret}} = t - |\vec{x} - \vec{x'}|/c$. Portanto, do Apêndice D, temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{x'}, t_{\text{ret}}) = -\frac{\partial \vec{j}(\vec{x'}, t_{\text{ret}})}{\partial t_{\text{ret}}} \times \underbrace{\vec{\nabla}(|\vec{x} - \vec{x'}|/c)}_{-\frac{(\vec{x}-\vec{x'})}{c|\vec{x}-\vec{x'}|}} = \frac{\partial \vec{j}(\vec{x'}, t_{\text{ret}})}{\partial t} \times \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{c|\vec{x} - \vec{x'}|} \tag{N.17}$$

Portanto

$$\vec{B}_2 = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial \vec{j}(\vec{x'}, t_{\text{ret}})}{\partial t} \times \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{c|\vec{x} - \vec{x'}|^2} d^3x' \tag{N.18}$$

Assim

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\vec{j}(\vec{x'}, t_{\text{ret}}) \times \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|^3} + \frac{\partial \vec{j}(\vec{x'}, t_{\text{ret}})}{\partial t} \times \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{c|\vec{x} - \vec{x'}|^2} \right] d^3x' \tag{N.19}$$

Já para o campo elétrico $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial A/\partial t$. Temos

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t) = \underbrace{\int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \right) \rho(\vec{x'}, t_{\text{ret}}) d^3x'}_{\vec{\nabla}\phi_1} + \underbrace{\int \frac{\vec{\nabla}\rho(\vec{x'}, t_{\text{ret}}) d^3x'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x'}|}}_{\vec{\nabla}\phi_2} \tag{N.20}$$

Para $\vec{\nabla}\phi_1$, temos:

$$\vec{\nabla}\phi_1 = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \right) \rho(\vec{x'}, t_{\text{ret}}) d^3x' = -\int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\vec{x'}, t_{\text{ret}}) \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|^3} d^3x' \tag{N.21}$$

E para $\vec{\nabla}\phi_2$, usamos:

$$\vec{\nabla}\rho(\vec{x'}, t_{\text{ret}}) = \frac{\partial \rho(\vec{x'}, t_{\text{ret}})}{\partial t_{\text{ret}}} \underbrace{\vec{\nabla}(|\vec{x} - \vec{x'}|/c)}_{-\frac{(\vec{x}-\vec{x'})}{c|\vec{x}-\vec{x'}|}} = -\frac{\partial \rho(\vec{x'}, t_{\text{ret}})}{\partial t} \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{c|\vec{x} - \vec{x'}|} \tag{N.22}$$

E assim, temos:

$$\vec{\nabla}\phi_2 = \int \frac{\vec{\nabla}\rho(\vec{x'}, t_{\text{ret}}) d^3x'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x'}|} = -\int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial \rho(\vec{x'}, t_{\text{ret}})}{\partial t} \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{c|\vec{x} - \vec{x'}|^2} d^3x' \tag{N.23}$$

Portanto,

$$\vec{\nabla}\phi = -\int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\rho(\vec{x'}, t_{\text{ret}}) \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|^3} + \frac{\partial \rho(\vec{x'}, t_{\text{ret}})}{\partial t} \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{c|\vec{x} - \vec{x'}|^2} \right] d^3x' \tag{N.24}$$

Além disso,

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial \vec{j}(\vec{x'}, t_{\text{ret}})}{\partial t} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x'}|} d^3x' = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial \vec{j}(\vec{x'}, t_{\text{ret}})}{\partial t} \frac{1}{c^2|\vec{x} - \vec{x'}|} d^3x' \tag{N.25}$$

Assim,

$$\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\rho(\vec{x'}, t_{\text{ret}}) \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|^3} + \frac{\partial \rho(\vec{x'}, t_{\text{ret}})}{\partial t} \frac{(\vec{x} - \vec{x'})}{c|\vec{x} - \vec{x'}|^2} - \frac{\partial \vec{j}(\vec{x'}, t_{\text{ret}})}{\partial t} \frac{1}{c^2|\vec{x} - \vec{x'}|} \right] d^3x' \tag{N.26}$$

N.2 Calibre de Coulomb

No calibre de Coulomb,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{N.27}$$

e as equações gerais dos potenciais ficam

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{N.28}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t} \tag{N.29}$$

Note que diferentemente da Seção J, onde tratamos da magnetostática ($\partial\rho/\partial t = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$) agora, estamos impondo o Calibre de Coulomb em uma situação dinâmica.

Aqui vemos o motivo de este calibre ser chamado de Coulomb. Nele, o potencial escalar ϕ continua satisfazendo a Eq. de Poisson da eletrostática.

Temos então:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{\rho(x', t)}{4\pi\epsilon_0 |x - x'|} d^3x' \tag{N.30}$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(x', t_{\text{ret}})}{|x - x'|} d^3x' - \int \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi |x - x'|} \frac{\partial \vec{\nabla}' \phi}{\partial t}(x', t_{\text{ret}}) d^3x' \tag{N.31}$$

onde novamente $t_{\text{ret}} = t - |\vec{x} - \vec{x'}|/c$. Neste calibre o potencial escalar ϕ continue tendo a solução instantânea da eletrostática ($\phi(t)$ no instante t depende apenas de $\rho(t)$ no mesmo instante t!). Porém vale ressaltar que os campos elétricos e magnéticos (que são os verdadeiros observáveis) ambos dependem de $\vec{A}$, e terão soluções de propagação retardadas (com respeito às fontes ρ e $\vec{j}$), como no calibre de Lorenz (ou em qualquer calibre, já que os resultados físicos não podem depender de mera escolha de calibre).

De fato, ao calcular os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ via estes potenciais, é possível simplificar essas espressões e obter explicitamente os mesmos campos que no Calibre de Lorenz (ver *J. D. Jackson, American Journal of Physics, 70, 917-928 (2002). Stewart, Hnizdo, Dmitriyev*, e outros autores, circa 2002-2004. Também *Brill & Goodman, (1967), K. McDonald (2008), Wundt & Jentschura (2012), Yang & MacDonald (2015), e outros.).*

N.2.1 Densidade de Corrente Transversal

Vamos apontar um fato interessante na Eq. N.29. Vimos na seção 10.7.1, que um campo $\vec{V}$, que decai a zero no infinito mais rapidamente que $1/r$, pode ser decomposto em componentes longitudinais e transversais $\vec{V} = \vec{V}_L + \vec{V}_T = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$, tais que

$$\phi = \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{V}(\vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \qquad \text{e} \qquad \vec{A} = \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{V}(\vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \tag{N.32}$$

Portanto $\vec{\nabla} \times \vec{V}_L = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_T = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$. Fazendo esta decomposição para o vetor densidade de corrente:

$$\vec{j} = \vec{j}_L + \vec{j}_T \tag{N.33}$$

temos

$$\begin{aligned} \vec{j}_L &= \vec{\nabla} \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|} = \vec{\nabla} \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \rho(\vec{x'}, t)}{\partial t} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \\ &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \underbrace{\int d^3x' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{x'}, t)}{|\vec{x} - \vec{x'}|}}_{=\phi} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t} \end{aligned} \tag{N.34}$$

Portanto, o lado direito da Eq. N.29 fica

$$-\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t} = \mu_0 [-\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t}] = \mu_0 [-(\vec{j}_L + \vec{j}_T) + \vec{j}_L] = -\mu_0 \vec{j}_T \tag{N.35}$$

Ou seja, o campo $\vec{A}$ é determinado apenas pela componente transversal de $\vec{j}$. As equações ficam

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{N.36}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}_T \tag{N.37}$$

cujas soluções são

$$\phi(x, t) = \int \frac{\rho(x', t)}{4\pi\epsilon_0 |x - x'|} d^3x' \tag{N.38}$$

$$\vec{A}(x, t) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_T(x', t_{\rm ret})}{|x - x'|} d^3x' \tag{N.39}$$