Apêndice K

Laplaciano de $1/r$

Vamos calcular o Laplaciano da função $1/r$, onde $r = |\vec{x}|$. Notando que:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r}\right) \tag{K.1}$$

precisamos primeiro calcular o gradiente de $1/r$. Para todos os pontos em que $r \neq 0$, temos:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{r} = -\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{K.2}$$

Agora vamos calcular o divergente deste resultado, usando $\vec{\nabla} \cdot (\alpha\vec{V}) = \alpha\vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla}\alpha \cdot \vec{V}$:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r}\right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3}\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}}_{=3} - \underbrace{\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\right)}_{-3r^{-4}}\underbrace{\hat{r} \cdot \vec{r}}_{=r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^4}r = 0 \tag{K.3}$$

Portanto $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, para todo ponto $\vec{x} \neq \vec{0}$. Todo efeito desta função, se houver, virá de seu comportamento em $r = 0$. Para avaliar este efeito, vamos integrar o Laplaciano em um volume V envolto por uma superfície fechada orientada S, que *inclui* a origem. Note que para volumes que não incluem a origem, já sabemos que o integrando é identicamente nulo, e, portanto, também o é a sua integral. Assim, usando o Teorema de Gauss (divergente):

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dV = -\int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) dV = -\oint_S \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \cdot d\vec{S} = -\oint_S \frac{r dS \cos\theta}{r^3} \tag{K.4}$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $d\vec{S}$ e a área dS delimita um ângulo sólido $d\Omega$ a partir da origem. Mas $dS_\odot = dS\cos\theta$ é a área – delimitada no mesmo ângulo sólido – de uma esfera de raio r centrada na origem, ou seja $dS_\odot = r^2 d\Omega$. Portanto, integrando sobre toda a superfície:

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dV = -\oint_S \frac{r dS_\odot}{r^3} = -\oint_S \frac{r r^2 d\Omega}{r^3} = -\oint d\Omega = -4\pi \tag{K.5}$$

Desta forma, temos:

$$-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \qquad \text{para todo } r \neq 0 \tag{K.6}$$

$$\int_V -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dV = 1 \qquad \text{para todo } V \text{ incluindo a origem.} \tag{K.7}$$

Estas credenciais portanto nos permitem identificar a função delta de Dirac tridimensional:

$$-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \delta^3(\vec{x}) \tag{K.8}$$

ou

$$\boxed{\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -4\pi\delta^3(\vec{x})} \tag{K.9}$$

Vamos imaginar uma carga pontual q na origem. Multiplicando a equação acima por q/ϵ_0, temos :

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{q\vec{r}}{4\pi_0 r^3}\right) = \frac{q\delta^3(\vec{x})}{\epsilon_0} \tag{K.10}$$

Notamos que o termo entre parênteses é o campo elétrico da carga pontual dado pela Lei de Coulomb. Comparando esta equação com a Lei de Gauss na forma diferencial, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$, segue que a densidade de uma carga pontual em $r = 0$ é dada por:

$$\rho(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x}) \qquad \text{(Densidade de carga pontual)} \tag{K.11}$$

De fato, ao integrar esta densidade em todo volume, obtemos a carga pontual:

$$\int \rho(\vec{x})dV = q\underbrace{\int \delta^3(\vec{x})dV}_{=1} = q \tag{K.12}$$