

# Capítulo 3

## Potencial Elétrico

### 3.1 Energia Potencial e Forças Conservativas

O trabalho  $W$  realizado por uma força  $\vec{F}$  ao longo de um caminho  $C$  orientado de um ponto  $P_1$  a um ponto  $P_2$  é dado por

$$W_{P_1 \rightarrow P_2}^C = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (3.1)$$

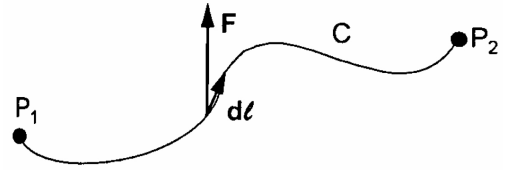


Figura 3.1: Trabalho de uma força  $\vec{F}$  ao longo de um caminho  $C$ . (Nussenzveig)

A 2ª Lei de Newton nos dá  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ , com  $\vec{p} = m\vec{v}$ , e portanto, se  $C$  coincide com a trajetória da partícula, o trabalho é dado por

$$\begin{aligned} W_{P_1 \rightarrow P_2}^C &= \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{l} = m \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l} \\ &= m \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = m \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v} \cdot \vec{v} = m \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{v_1}^{v_2} \\ &= \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\text{com} \quad T = \frac{mv^2}{2} \quad (3.3)$$

i.e. o trabalho é a variação de energia cinética  $T$ .

Por outro lado, se a força é *central*, i.e. depende apenas da distância  $r$  ao centro de forças:

$$\vec{F} = F(r)\hat{r} \quad (3.4)$$

onde  $\hat{r}$  é um vetor unitário na direção do centro de forças, temos

$$W_{P_1 \rightarrow P_2}^C = \int_{P_1}^{P_2} F(r)\hat{r} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = U_1 - U_2 \quad (3.5)$$

$$\text{com} \quad U(r) = \int_r^{r_0} F(r)dr = - \int_{r_0}^r F(r)dr \quad (3.6)$$

e aqui  $U$  é a energia potencial associada à força, e  $r_0$  é um ponto de referência onde se toma  $U(r_0) = 0$ . Portanto  $W_{P_1 \rightarrow P_2}^C = T_2 - T_1 = U_1 - U_2$  implica

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = E \quad (3.7)$$

ou seja, a energia total  $E = T + V$ , soma da energia cinética e potencial é *conservada*.

Uma força é dita *conservativa* quando o seu trabalho independe do caminho/trajetória, dependendo apenas dos pontos inicial e final. A força central é portanto uma força conservativa. Outra maneira equivalente de definir uma força conservativa é dizer que a sua circulação, i.e. a integral de linha em um caminho fechado  $C$  é igual a zero:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (3.8)$$

pois para a curva fechada, os pontos inicial e final arbitrários coincidem. Generalizando, para uma força conservativa temos

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -[U(P_2) - U(P_1)] \quad (3.9)$$

## 3.2 Potencial Elétrico

Assim como o campo elétrico  $E$  foi definido como a força elétrica  $F$  por unidade de carga, o potencial elétrico  $V$  é definido como a energia potencial elétrica  $U$  por unidade de carga.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{F}/q && \text{(unidade N/C)} \\ V &= U/q && \text{(unidade J/C = V)} \end{aligned}$$

A unidade do potencial é Joule/Coulomb [J/C], conhecida como Volts [V]. Como a energia potencial elétrica é definida a menos de uma constante arbitrária, o potencial também é. Diferenças de energia potencial e de potencial elétrico, no entanto, são bem definidas. Da Eq. temos então

$$V_2 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.10)$$

Como veremos, em alguns casos tomamos o potencial – e a energia potencial elétrica – como sendo zero no infinito. Neste caso, o potencial é dado por

$$V = - \int_{\infty}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{P_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.11)$$

## 3.3 Potencial Elétrico $V$ e Campo Elétrico $\vec{E}$

Vimos que o campo elétrico e o potencial elétrico estão intimamente ligados por uma integral. Sabendo o campo elétrico, podemos calcular a integral de caminho e obter o potencial correspondente.

Como veremos, como o potencial é um escalar, muitas vezes o seu cálculo é mais simples do que o do campo elétrico, que é um vetor. Nestes casos, gostaríamos de, primeiro calcular o potencial e, a partir dele, calcular o campo elétrico, invertendo a Eq. 3.11. Considerando apenas um intervalo

infinitesimal  $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$ , temos  $\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dU$ , i.e. a variação infinitesimal na energia potencial elétrica. Essa variação pode ser expandida em primeira ordem, e portanto temos:

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \cdot (dx, dy, dz) = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{l}$$

Aqui,  $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  é o operador diferencial, i.e. um vetor cujas componentes são derivadas parciais prontas para serem aplicadas em um campo escalar e produzir um vetor, denotado o *gradiente* do campo escalar. Portanto, a força é o negativo do gradiente da energia potencial:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \quad (3.12)$$

Como o  $E = F/q$  e  $V = U/q$ , a relação entre  $E$  e  $V$  fica

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (3.13)$$

ou seja, o campo elétrico é menos o gradiente do potencial.

Repita 3 vezes antes de dormir: "O campo é menos o gradiente do potencial".

### 3.4 Superfícies Equipotenciais e Linhas de Campo

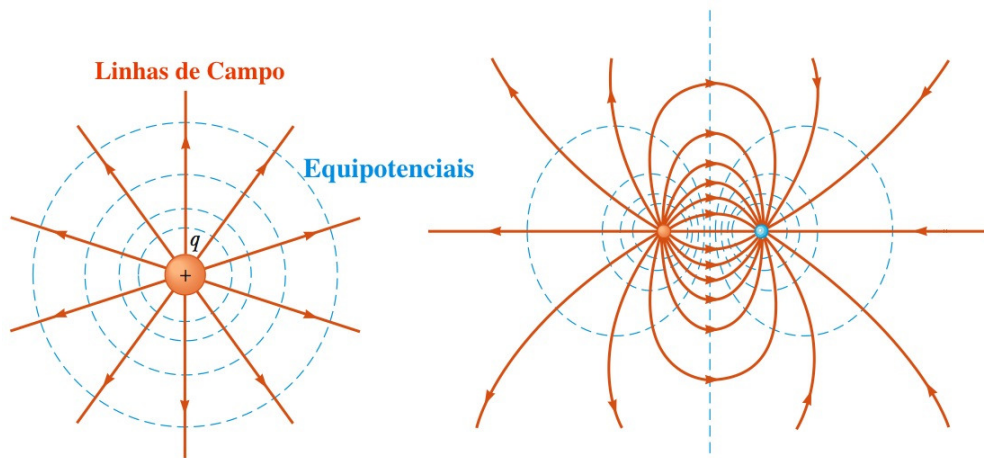


Figura 3.2: Superfícies Equipotenciais e Linhas de Campo Elétrico para uma carga pontual e um dipolo elétrico. Como  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ , linhas de campo são perpendiculares às superfícies equipotenciais. (Serway)

Superfície Equipotencial: Região do espaço com o mesmo potencial, i.e. onde  $dV = 0$  e o campo não realiza trabalho em uma carga  $q$  na superfície, i.e.

$$dV = -W/q = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3.14)$$

para  $d\vec{s}$  na superfície equipotencial. Um produto escalar é nulo quando os vetores são perpendiculares, logo segue  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  é perpendicular à superfície equipotencial, i.e. o gradiente do potencial é perpendicular às equipotenciais. Essa é uma propriedade geral: o gradiente de um campo escalar é perpendicular às superfícies equipotenciais do campo (regiões de  $dV = 0$ ). Além disso, como  $dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = |\vec{\nabla}V||d\vec{l}|\cos\theta$ , temos que  $dV$  é máximo (e igual a  $|\vec{\nabla}V||d\vec{l}|$ ), quando  $\theta = 0$ , i.e. quando  $d\vec{l}$  aponta na mesma direção de  $\vec{\nabla}V$ . Portanto, o gradiente aponta na direção de maior variação do campo potencial.

Na Fig 3.2, mostra-se linhas de campo e superfícies (linhas) equipotenciais para uma carga pontual e um dipolo elétrico.

### 3.5 Potencial de Condutores

Dentro de condutores,  $\vec{E} = 0$ . Portanto

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \rightarrow \quad V_2 = V_1 \quad (3.15)$$

para quaisquer pontos 1 e 2. Portanto:

$$V = \text{const} \quad (\text{condutor}) \quad (3.16)$$

i.e. o volume interno do condutor é um *volume equipotencial*. Em particular, a superfície do condutor é uma equipotencial, e portanto é consistente com o fato do campo próximo do condutor ser perpendicular a ele.

### 3.6 Exemplos

#### 3.6.1 Carga Pontual e Superposição

Para uma carga pontual, usando a Lei de Coulomb na definição de potencial, e usando um caminho conectando dois pontos na direção radial da carga, temos

$$\begin{aligned} V(r) - V(r_0) &= - \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_0}^r E ds \\ &= - \int_{r_0}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^2} ds = \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s} \right]_{r_0}^r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Tomando  $r_0 = \infty$  e definindo  $V(\infty) = 0$ , obtemos

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.18)$$

Para um conjunto de  $N$  cargas, a Lei da superposição do campo se transmite para o potencial

$$V = \sum_{i=1}^N V_i = \sum_{i=1}^N \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (3.19)$$

### 3.6.2 Anel de Carga

Considere o anel de cargas na Fig 3.3. O potencial do elemento  $dq$  é dado por

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \quad (3.20)$$

e portanto

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \int dq \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Como o potencial depende apenas da coordenada  $z$ , e não de  $x, y$ , o campo elétrico fica

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \\ &= \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z} \end{aligned} \quad (3.22)$$

como obtido na integração direta do campo elétrico.

### 3.6.3 Disco de Carga

Considere o disco de cargas na Fig 3.4. Visualizando o disco como uma sucessão de anéis com raio variável  $R'$ , temos

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + (R')^2}} \quad (3.23)$$

A carga infinitesimal é  $dq = \sigma(2\pi R' dR')$ , e portanto o potencial do disco fica

$$\begin{aligned} V &= \int \frac{\sigma 2\pi R' dR'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + (R')^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + (R')^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{z^2 + (R')^2} \right]_0^R \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{z^2 + R^2} - z \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

O campo elétrico é então dado por

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \hat{z} \end{aligned} \quad (3.25)$$

também de acordo com a integração direta do campo.

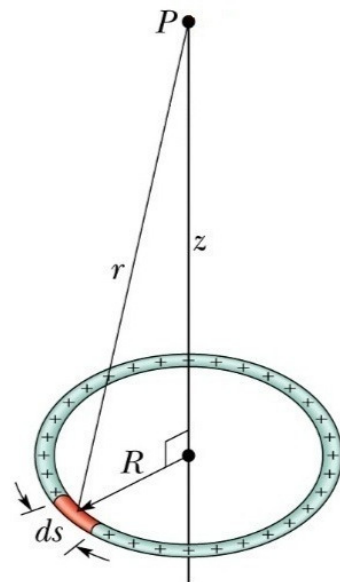


Figura 3.3: Anel carregado. (Halliday)

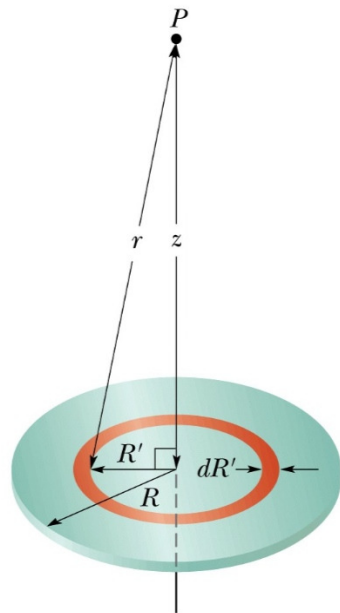
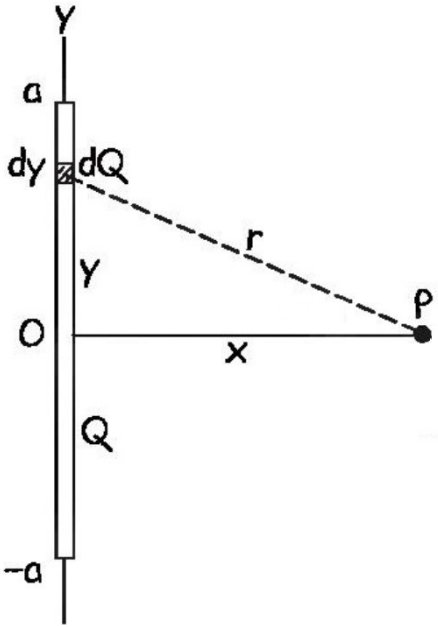


Figura 3.4: Disco carregado. (Halliday)

## 3.6.4 Linha de Carga



Considere a linha de cargas na Fig 3.5. O potencial infinitesimal no ponto  $P$  é

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3.26)$$

Obtemos então

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \quad (3.27)$$

A integral é dada por (veja Appendix)

$$\int \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \log(\sqrt{x^2 + y^2} + y) \quad (3.28)$$

como pode ser checado por derivação do logaritmo. Portanto

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left( \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a} \right) \quad (3.29)$$

Figura 3.5: Linha carregada. (Serway)

Note que esse potencial diverge se  $a \rightarrow \infty$ .

O campo é dado por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} = \frac{\lambda(2a)}{4\pi\epsilon_0 x \sqrt{x^2 + a^2}} \hat{x} \quad (3.30)$$

como na integração direta, e, obviamente continua bem definido, mesmo quando  $a \rightarrow \infty$ .

## 3.6.5 Casca Esférica e Esfera

Considere agora uma casca esférica carregada dada na Fig 3.6. Vamos considerar primeiro o

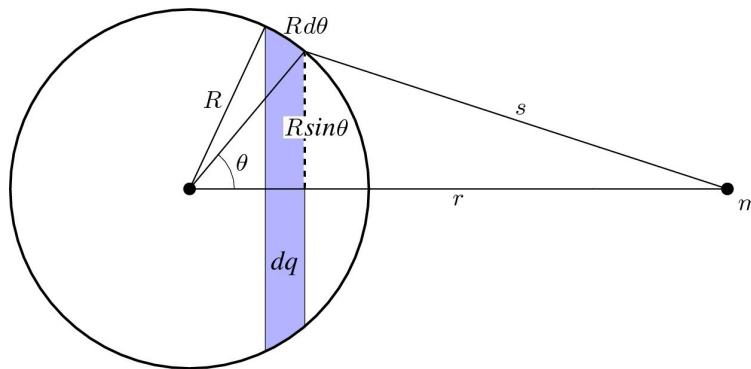


Figura 3.6: Casca esférica carregada.

potencial em um ponto  $m$  fora da casca esférica. O elemento infinitesimal indicado na figura é um anel com carga diferencial  $dq$ , cuja contribuição ao potencial é dada por

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 s} \quad (3.31)$$

Com o elemento de carga  $dq = \sigma(2\pi R \sin \theta)(Rd\theta)$ , temos

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 s} = \frac{\sigma(2\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sin \theta}{s} d\theta \quad (3.32)$$

Como  $s$  é função de  $\theta$ , é conveniente fazer a integração em  $s$ . Usando a lei dos cossenos temos

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta \quad \rightarrow \quad \sin \theta d\theta = \frac{s ds}{rR} \quad (3.33)$$

e o potencial fica

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sigma(2\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{s ds}{rR s} \\ &= \frac{\sigma(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{r-R}^{r+R} ds \\ &= \frac{\sigma(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r} [(r+R) - (r-R)] \\ &= \frac{\sigma(4\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Portanto, o potencial de uma casca esférica é o mesmo de uma carga pontual com carga  $q$  localizada no centro da casca esférica.

Para pontos dentro da esfera, o cálculo é idêntico, mas de acordo com a Fig 3.7 os limites de integração são  $s = R + r$  e  $s = R - r$ , o que resulta

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sigma(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r} [(R+r) - (R-r)] \\ &= \frac{\sigma(4\pi R)}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma(4\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0 R} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned} \quad (3.35)$$

i.e. o potencial é constante e igual ao valor em  $r = R$ , garantindo continuidade.

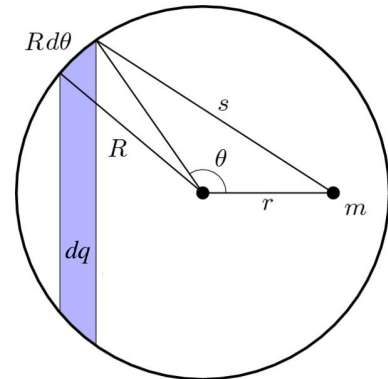


Figura 3.7: Casca esférica carregada. Potencial dentro da casca.

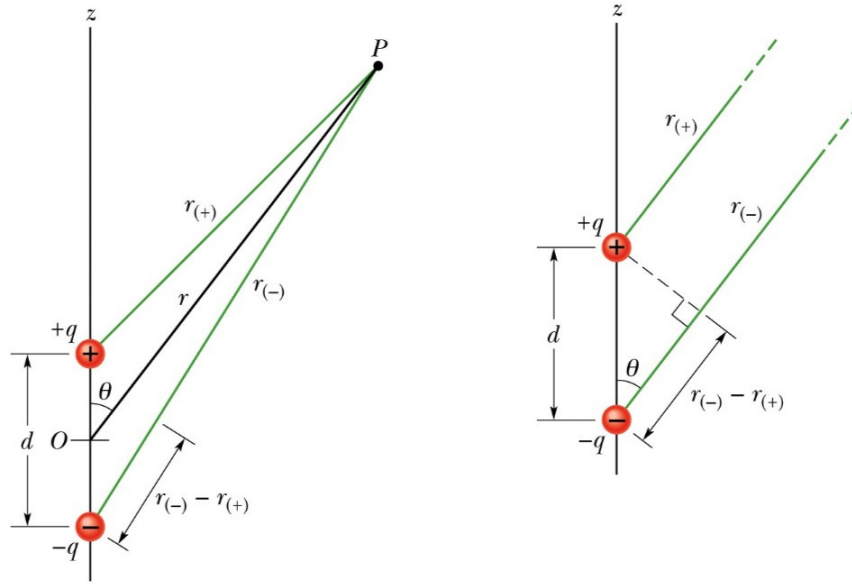


Figura 3.8: Potencial elétrico de um dipolo (Halliday).

### 3.7 Dipólo Elétrico

Considere o dipolo elétrico de momento de dipolo  $\vec{p} = q\vec{d}$  na Fig 3.9. O potencial produzido pelo dipolo no ponto  $P$  a uma distância  $r$  do centro do dipolo é dado por

$$V = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_- - r_+}{r_- r_+} \right)$$

Da Fig 3.9. vemos que

$$\begin{aligned} r_+ &= r - \frac{d}{2} \cos \theta \\ r_- &= r + \frac{d}{2} \cos \theta \end{aligned} \tag{3.36}$$

e portanto

$$r_- - r_+ = d \cos \theta \tag{3.37}$$

$$r_+ r_- = r^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta = r^2 \left( 1 - \frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta \right) \approx r^2 \text{ para } d/r \ll 1 \tag{3.38}$$

o que implica o potencial

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (\text{Dipolo}) \tag{3.39}$$

ou seja, o potencial decai com o  $1/r^2$  ao invés de  $1/r$  para uma carga, devido ao cancelamento das cargas em grandes distâncias.



Para calcular o campo elétrico a partir do potencial, é conveniente considerar coordenadas  $\vec{r} = (x, y, z)$ , em que  $\vec{p} = p\hat{z}$  e o potencial fica

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} \quad (3.40)$$

O campo é  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  e, portanto, usando

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(fg) &= (\vec{\nabla}f)g + f(\vec{\nabla}g) \\ \vec{\nabla}f(r) &= \frac{df}{dr} \hat{r} \end{aligned} \quad (3.41)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left( \frac{z}{r^3} \right) &= \frac{\vec{\nabla}z}{r^3} + z \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r^3} \right) = \frac{\hat{z}}{r^3} - \frac{3z}{r^4} \hat{r} \\ &= \frac{\hat{z}}{r^3} - \frac{3(r \cos \theta)}{r^4} \hat{r} = \frac{\hat{z}}{r^3} - \frac{3\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^4} \hat{r} = \frac{\hat{z}}{r^3} - \frac{3\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^3} \hat{r} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}V = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\hat{z}}{r^3} - \frac{3\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^3} \hat{r} \right) \\ &= -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{r} \quad (\text{Dipolo}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Note que no eixo do dipolo,  $r = z$ ,  $\hat{r} = \hat{z}$ , então  $\vec{p} \cdot \hat{r} = p$  e  $(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} = \vec{p}$ . Portanto

$$\vec{E}(0, 0, z) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad (3.44)$$

como no cálculo direto do campo. Note que  $\vec{E}$  aponta na direção de  $\vec{p}$ .

Já no eixo  $(x, y)$ ,  $\vec{p} \cdot \hat{r} = 0$ , e

$$\vec{E}(x, y, 0) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (3.45)$$

e o campo é oposto ao dipolo, mas ainda decaindo com  $1/r^3$ .

### 3.7.1 Torque e Energia no Dipolo

Na presença de um campo elétrico  $\vec{E}$  constante, cada uma das cargas do dipolo sofre uma força:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (3.46)$$

Essas duas forças geram um torque, e.g em torno de um eixo passando pela carga negativa, dado por

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{d} \times \vec{F}_+ = q\vec{d} \times \vec{E} \\ &= \vec{p} \times \vec{E} \end{aligned} \quad (3.47)$$

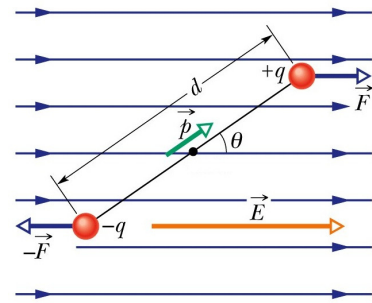


Figura 3.9: Potencial elétrico de um dipolo (Halliday).

Esse torque, com magnitude  $\tau = pE \sin \theta$ , faz o dipolo girar e tender a apontar na direção de  $\vec{E}$ . Note que quando isso ocorre,  $\theta = 0 \rightarrow \tau = 0$ .

Por outro lado, o campo está associado a um potencial  $V$  ( não confundir com o potencial produzido pelo dipolo! ), e a energia do dipolo fica

$$\begin{aligned} U &= q[V(r+d) - V(d)] = q\vec{d} \cdot \vec{\nabla}V \\ &= -\vec{p} \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (3.48)$$

### 3.8 Cálculo da Energia Eletrostática

A energia potencial elétrica de uma configuração de cargas é igual ao trabalho necessário para formar aquela configuração, trazendo todas as cargas do infinito, configuração inicial em que a energia é tomada como nula. Para uma única carga  $q_1$ , obviamente  $U_1 = 0$ . Para uma segunda carga  $q_2$  na presença de um potencial, e.g. criado pela primeira carga, temos

$$U_{12} = q_2 V_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi r_{12}^2} \quad (3.49)$$

Trazendo uma terceira carga, ela responderá ao potencial de cada uma das duas cargas já trazidas, tendo novas contribuições à energia de  $U_{13} = q_3 V_1$  e  $U_{23} = q_3 V_2$ . A energia total das 3 cargas fica:

$$\begin{aligned} U_{123} &= U_1 + U_{12} + U_{13} + U_{23} = q_2 V_1 + q_3 (V_1 + V_2) \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi r_{12}^2} + \frac{q_1 q_3}{4\pi r_{13}^2} + \frac{q_2 q_3}{4\pi r_{23}^2} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para um sistema de  $N$  cargas pontuais, podemos imaginar trazer as cargas uma por vez do infinito, sucessivamente até formar a configuração desejada. Cada nova carga terá uma contribuição à energia que depende de todas as outras cargas já trazidas. Consideramos então cada par de cargas somente uma vez:

$$U = \sum_{i,j>i} U_{ij} = \sum_{i,j>i} \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} \quad (3.51)$$

Alternativamente, podemos considerar os pares duas vezes e dividir por 2, já que  $U_{ij} = U_{ji}$ . Temos então

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad (3.52)$$

onde  $V_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}}$  é o potencial criado na posição da carga  $i$  devido a todas as outras. Imaginando cargas infinitesimais, temos no limite contínuo

$$U = \frac{1}{2} \int dq(r) V(r) = \frac{1}{2} \int \rho(r) V(r) dv \quad (3.53)$$

onde  $dv$  é o elemento de volume.

★ Exercício: Mostre que a energia total de uma esfera com densidade de carga *constante*, carga total  $Q$  e raio  $R$  é  $U = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 R}$ . Sugestão: Construa a esfera como uma sucessão de cascas esféricas (como uma cebola) trazidas do infinito. Note que nesta construção, os "pares" são contados apenas uma vez e portanto  $U = \int \rho(r) V(r) dv$ .