O TEOREMA DE BIRKHOFF

Leandro Ibiapina Beviláqua

4 de dezembro de 2007

Sumário

1 Cabeçalho

Universidade de São Paulo
Departamento de Física-Matemática
Fundamentos Matemáticos da Teoria da Relatividade Geral I
(Prof. J. C. A. Barata)

Este texto tem o objetivo de registrar por escrito aquilo que foi apresentado em sala pelo autor sobre o Teorema de Birkhoff, que afirma que todas as soluções esfericamente simétricas das equações de Einstein são independentes do tempo numa região em que não há matéria e/ou energia.

2 Introdução

A presença de um corpo em um espaço-tempo deforma-o. Não é uma surpresa que um corpo cuja constituição é tal que há a mesma distrubuição de matéria em relação a qualquer direção em relação a um ponto modifique o espaço-tempo ao seu redor de um modo a não privilegiar nenhuma direção. Em outras palavras, o campo gravitacional gerado por uma distribuição esférica de matéria também deve possuir esta simetria.

As considerações sobre a esfericidade dizem respeito à parte *espacial*, tanto da solução, quanto da distribuição de matéria-energia. Ao considerarmos uma estrela colapsando igualmente em todas as direções, temos uma fonte que modifica-se o tempo todo, embora seja sempre esfericamente simétrica. A pergunta que se procura responder aqui é se o campo gravitacional gerado por esta estrela que colapsa segue este mesmo padrão, ou seja, se a forma da solução das equações de Einstein é dependente do tempo assim como a fonte.

Este mesmo problema pode ser considerado sob o ponto de vista da teoria newtoniana da gravitação. O problema foi tratado pelo próprio Sir Isaac Newton, que demonstrou na seção XII de seus *Principia* [1] uma série de teoremas que afirmam que a força atrativa que uma esfera E, de massa M_E, exerce num ponto P fora dessa esfera é a mesma que uma partícula de massa M_E e localizada no centro de E exerceria sobre P (desde que a densidade dessa esfera varie "na mesma razão progressivamente a partir do centro e até a circunferência"[2]). Em outras palavras, no caso de uma estrela colapsando, poderíamos a cada instante substituir o poder atrativo da mesma por um ponto no seu centro, de modo que teríamos sempre a mesma configuração (do ponto de vista do campo gravitacional externo à estrala), ainda que a fonte seja mutável no tempo.

O Teorema de Birkhoff é, essencialmente, a afirmação de que a conclusão a que chegamos na teoria de Newton é valida também na Relatividade Geral, i.e., um objeto massivo e esfericamente simétrico gera *sempre* um campo gravitacional esfericamente simétrico. Mais do que isso, que esse campo gravitacional é *independente do tempo*, mesmo que o objeto que gera o campo varie no tempo[1]. Em termos de fenômenos físicos, o teorema afirma que o campo gravitacional de uma estrala estática é o mesmo de uma estrela que pulsa, colapsa ou se expande.

Antes de prosseguir por longas linhas mostrando esse teorema, é necessário convencer o leitor de que não é óbvio que a conclusão de Newton (provada com rigor nos *Principia*) possa ser "importada"para a teoria de Einstein. A razão para isso é que Newton considerava o tempo um parâmetro que "fui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa"[3]. Dessa forma, o tempo é como um rótulo para diferentes estágios da evolução estelar, por exemplo. Não sendo parte do processo, os teoremas de Newton valem para cada uma dessas etapas e, portanto, para todo o processo.

Por outro lado, uma característica fundamental da Relatividade é a noção do contínuo espaço-tempo, donde decorre que o próprio campo gravitacional interfere no fluxo do tempo [4]. Além disso, a própria noção de "simetria esférica"é delicada no contexto da teoria de Einstein, já que usualmente pensamos que um espaço tem essa simetria quando, *num dado instante de tempo*, todos os pontos a uma mesma distância de um ponto, que formam uma superfície bidimensional E, são equivalentes no sentido de que são mapeados uns nos outros quando trocamos as direções do nosso sistema de coordenadas através da atuação de uma rotação (i.e., um elemento de $SO(3)$). E o problema com esta definição está no fato de que quando dizemos *num dado instante de tempo*, estamos fazendo referência a um sistema

[1] Note entretanto que é imprescindível que haja simetria esférica a cada instante. Na Relatividade, "a cada instante"é uma expressão delicada, já que faz referência à sistemas de coordenadas e não tem um sentido absoluto. Este assunto será tratado adiante.

de coordenadas específico. Em outras palavras, estamos considerando implícitamente a noção de simultaneidade para os pontos que constituem E. E o que é simultâneo para um observador, pode não sê-lo para um segundo observador [5]. Assim, até mesmo a idéia de que um objeto é "esfericamente simétrico" deve ser cuidadosamente revista.

3 Discussão geométrica acerca da simetria esférica

Partimos do ponto onde dissemos que havia sutilezas. Embora não haja dois eventos que são simultâneos para todos os observadores, há algo de absoluto que podemos afirmar. A saber, que há eventos que *nunca* são simultâneos. O exemplo mais claro disso é o nascimento do pai N_p e o nascimento de seu filho N_f. De um modo geral, se dois eventos estão ligados por uma *relação causal*, estes não poderão ser vistos como eventos simultâneos por nenhum observador. E pode haver, é claro, dois eventos que não guardam entre si uma relação causal, mas também não podem ser vistos por nenhum observador como eventos simultâneos. No exemplo do pai o do filho, por exemplo, considere o irmão gêmeo do pai que, embora não seja responsável pelo nascimento do sobrinho, está no *passado absoluto* do evento N_f. De modo análogo, diz-se que o evento N_f está no *futuro absoluto* de N_p. Assim, definimos

Definição 3.1 *Quando uma superfície tem a propriedade de que nenhum ponto do espaço-tempo (evento) pertencente a esta superfície não está nem no passado, nem no futuro absoluto de nenhum outro ponto da mesma superfície, dizemos que temos uma* superfície do tipo espaço.

Desse modo, os eventos sobre uma superfície do tipo espaço podem ser vistos como simultâneos por algum observador.

É neste tipo de superfície que desejamos ter uma simetria esférica. Aliás, para falar em simetrias, é necessário deixar claro o que entendemos por isso, o que nos leva à idéia de *isometrias*, que é o conjunto de transformações de coordenadas que deixa a métrica invariante. Por exemplo, somar uma constante a t, x, y, ou z não altera o espaço de Minkowski ($\mathcal{M}_4$)

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{1}$$

que só depende das diferenciais das coordenadas. Isso significa que o espaço plano é invariante por translações. Além disso, também deixam (1) invariante as tranformações do tipo $x'^i = R^i_j x^j$, com R é uma matriz pertencente ao grupo $SO(3)$ e os índices i e j referem-se às coordenadas espaciais, apenas. Nesse caso dizemos que o espaço (1) possui $SO(3)$ dentre suas isometrias. Desejamos alguma definição que inclua o espaço de Minkowski como um exemplo de espaço-tempo esfericamente simétrico. Os argumentos a seguir seguem de perto a exposição de Hawking/Ellis [6], em que encontramos a seguinte definição:

Definição 3.2 *Um espaço-tempo é* esfericamente simétrico *se ele admite o grupo $SO(3)$ dentre suas isometrias, tendo como órbita de grupo superfícies do tipo espaço.*

Na definição acima, entendemos como "órbitas de grupo" o conjunto de pontos do espaço-tempo que são mapeados uns nos outros quando sucessivas aplicações de diferentes elementos do grupo forem feitas na variedade.

Considere então um espaço-tempo deste tipo. Por definição, para algum ponto q_1, existe uma superfície bidimensional $\mathcal{S}^2(q)$ que o contém. Esta superfície seria constituída por todos os pontos q_i que podem ser mapeados em q_1 através da atuação do grupo $SO(3)$. Além disso, deve existir um subgrupo unidimensional $G_{q_1} \subset SO(3)$ que deixa q_1 invariante, enquanto gira os vetores do espaço tangente a $\mathcal{S}^2(q)$ no ponto q_1. Imagine por exemplo os 3 ângulos de Euler usados para parametrizar rotações no espaço euclideano em torno da origem. Dado um ponto qualquer p, podemos escolher um único ângulo que parametriza as rotações em torno da linha que liga a origem o a este ponto. Este grupo é unidimensional e certamente deixa o ponto p imóvel (bem como todo o eixo ligando p e o).

Para continuar com nossa construção, necessitamos do conceito de geodésica:

Definição 3.3 *Seja A_α um aberto da variedade que contém q e h_α a função que o mapeia em algum aberto de $\mathcal{R}^n$, onde se define um sistema de coordenadas $\left(x^1, \dots, x^n\right)$. Dado um vetor $\hat{v}$ no ponto q, há uma curva que passa por este ponto com velocidade $\hat{v}$. A geodésica é a curva $\gamma(t, q, v) = h_\alpha^{-1} \circ \left(x^1(t), \dots, x^n(t)\right)$ para a qual*

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0. \tag{2}$$

A equação acima admite sempre[2] uma solução $\left(x^1(t), \dots, x^n(t)\right)$ que passa por um dado ponto q da variedade (pelo menos num intervalo finito do parâmetro t) e, portanto, podemos aceitar que existem geodésicas que passam pelo ponto $q_1 \in \mathcal{S}^2(q)$.

[2] A equação da geodésica pode ser escrita como uma equação de primeira ordem para a variável $y^k = \dot{x}^k$, cujo valor incicial é a velocidade dada $\hat{v} \equiv \dot{x}^k(0)$ e a posição do ponto q por onde passa a geodésica $\left(x^1(0), \dots, x^n(0)\right)$. A existência e unicidade da solução para este problema de valor inicial é garantida pelo teorema de Picard-Lindelöf, cujo enunciado e demonstração podem ser encontrados em [7].

Seja $\mathcal{G}^2(q_1)$ o conjunto de todas as geodésicas que passam pelo ponto q_1 e são ortogonais a $\mathcal{S}^2(q)$. Localmente, esse conjunto forma uma superfície bidimensional que é deixada invariante pela atuação de G_{q_1}. Um modo de visualizar isso é voltar ao espaço euclideano, em que a linha radial $\overline{op}$ é deixada invariante, por ser o eixo em torno do qual se faz a rotação. Tendo em mente que o tempo também não é alterado por esta transformação, temos que o plano formado pelos vetores $\hat{u}_{out} = \hat{t} + \hat{r}$, que é tangente a uma geodésica de uma partícula que *afasta-se radialmente* da origem, e $\hat{u}_{in} = \hat{t} - \hat{r}$, e que é tangente a uma geodésica de uma partícula que *aproxima-se radialmente* da origem. (Note que os vetores definidos são perpendiculares aos vetores tangente à superfície $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ e linearmente independentes entre si, de modo que definem um plano tangente à $\mathcal{G}^2(q)$.)

Agora considere um ponto $r_1 \in \mathcal{G}^2(q_1)$ que seja, entretanto, diferente de q_1 (i.e., $r_1 \notin \mathcal{S}^2(q)$). O conjunto dos pontos equivalentes a r_1 através da atuação do grupo $SO(3)$, constitui uma *outra* superfície bidimensional $r_i \in \mathcal{S}^2(r)$, que não intercepta $\mathcal{S}^2(q)$ em nenhum lugar (pois se o fizesse, as superfícies seriam iguais, já que q e r deveriam ser equivalentes entre si). Como o grupo G_{q_1} deixa $\mathcal{G}^2(q_1)$ invariante, a atuação deste grupo também deixa o ponto r invariante enquanto as direções ortogonais à $\mathcal{G}_2(q_1)$ são permutadas. Então $\mathcal{G}^2(q_1)$ é ortogonal a $\mathcal{S}^2(r)$. De um modo geral, concluímos que *as superfícies bidimensionais $\mathcal{G}^2$ construídas tomando as geodésicas ortogonais à cada ponto de alguma órbita $\mathcal{S}^2$ do grupo $SO(3)$ são ortogonais à todas as outras órbitas.* Esta afirmação é um caso particular do teorema mais geral, cuja demonstração não será feita aqui, mas pode ser encontrada em [8]. O Teorema de Schmidt das Superfícies Ortogonais às Órbitas das Isometrias diz:

Teorema 3.1 *Sejam G^r um grupo de Lie r-dimensional (não necessáriamente conexo) que é isometria em uma variedade (pseudo-) Riemanniana*[3] *$\mathcal{V}^n$ e $\mathcal{O}^q$ uma superfície conexa q-dimensional que é uma órbita de G^r. Se F_P é um subgrupo cuja atuação não deixa nenhum vetor pertencente ao espaço tangente $T_P\mathcal{O}^q$ à órbita $\mathcal{O}^q$ no ponto P, então há superfícies $\mathcal{G}^{(n-q)}$ com dimensão $(n-q)$, que são ortogonais às órbitas de G^r.*

A implicação deste teorema é que é possível encontrar sistemas locais de coordenadas $(x^1, \dots, x^q, y^{q+1}, \dots, y^n)$ para a variedade $\mathcal{V}^n$ de tal modo que a métrica nessas coordenadas não contenha termos cruzados do tipo $dx^i dy^j$. Assim, num sistema escolhido apropriadamente, as órbitas do grupo $SO(3)$ são dadas por $y^j = constante$, enquanto que as superfícies $\mathcal{G}^2$ são dadas por $x^i = constante$. (Essa escolha "apropriada"será sempre possível, já que o Teorema de Schmidt garante que a cada ponto, é possível achar $(n-q)$ coordenadas ortogonais às q coordenadas da subvariedade $\mathcal{O}^q$).

No nosso caso, a variedade é quadridimensional e as órbitas de grupo são esferas bidimensionais (onde sabemos que é possível escrever a métrica na forma $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$). Assim, se escolhemos (a, b) como coordenadas para as superfícies $\mathcal{G}_2$ construídas com as geodésicas, a métrica da variedade completa não terá termos como $dad\theta$, ou $dad\phi$, ou $dbd\theta$, ou $dbd\phi$. Além disso, nesse sitema de coordenadas, todos os pontos de uma mesma órbita $\mathcal{S}^2(q)$ terão as mesmas coodenadas (a_q, b_q).

Dadas duas órbitas de grupo $\mathcal{S}^2(q)$ e $\mathcal{S}^2(r)$, sabemos como definir sistemas de coordenadas em cada uma delas (por exemplo, as angulares θ e ϕ). Entretanto, para termos um sistema válido para toda a variedade quadridimensional, precisamos relacionar as coordenadas definidas em cada uma dessas esferas. Isso pode ser feito com o auxílio das superfícies $\mathcal{G}^2$ ortogonais às órbitas. Definimos um mapa $f : \mathcal{S}^2(q) \to \mathcal{S}^2(r)$ que associa a cada ponto $q \in \mathcal{S}^2(q)$, um outro ponto $f(q) \in \mathcal{S}^2(r)$ através da seguinte regra: $f(q)$ é a interseção das superfícies $\mathcal{S}^2(r)$ e $\mathcal{G}^2(q)$. Em outras palavras, para achar a imagem de um ponto q em alguma outra órbita $\mathcal{S}^2(r)$, basta tomar a geodésica que passa por q e é ortogonal à sua órbita e seguí-la até que intercepte a outra órbita $\mathcal{S}^2(r)$ (essa interseção se dará de modo que a geodésica também seja ortogonal à $\mathcal{S}^2(r)$, por razões que já foram explicadas). Atráves desda regra, podemos usar um sistema de coordenadas (θ, ϕ) definido *apenas* em $\mathcal{S}^2(q)$ para definir um sistema de coordenadas em $\mathcal{S}^2(r)$ declarando:

$$\text{Se } q \text{ tem coordenadas } (a_q, b_q, \theta, \phi)\text{, então, } f(q) \text{ terá coordenadas } (a_{f(q)}, b_{f(q)}, \theta, \phi). \tag{3}$$

A função f definida no parágrafo anterior tem a propriedade de comutar com qualquer elemento $g \in SO(3)$. Pois, pela própria definição de f, temos $g\big(f(q)\big) = g\big(\mathcal{S}^2(r) \cap \mathcal{G}^2(q)\big)$. Mas g, sendo um elemento geral de $SO(3)$, mapeia $\mathcal{S}^2(r)$ em si mesma e mapeia o ponto q no ponto $g(q) \in \mathcal{S}^2(q)$, por onde passa a geodésica $\mathcal{G}^2\big(g(q)\big)$. Assim,

$$g\big(f(q)\big) = g\big(\mathcal{S}^2(r) \cap \mathcal{G}^2(q)\big) = \mathcal{S}^2(r) \cap \mathcal{G}^2\big(g(q)\big) = f\big(g(q)\big). \tag{4}$$

Este fato implica que as órbitas são mapeadas umas nas outras conformalmente [8]. Para mostrar isso, usaremos os espaços tangentes às órbitas, denotando por T_q o espaço tangente à órbita bidimensional $\big(\mathcal{S}^2(q)\big)$ no ponto q. Este

[3] I.e., de qualquer assinatura

espaço tangente é bidimensional e digamos que tenha como base dois vetores unitários e_1 e e_2. Por serem vetores de mesmo módulo, deve haver algum elemento de G_q para o qual

$$g'_q(e_1) = e_2, \qquad g'_q \in G_q \subset SO(3).$$

(Lembre-se de que G_q é o subgrupo de $SO(3)$ que deixa q e $\mathcal{G}^2(q)$ invariantes, enquanto os vetores do espaço tangente às órbitas $\mathcal{S}^2$ são girados.)

Agora considere o espaço tangente à outra órbita $\mathcal{S}^2(r)$ no ponto $f(q)$. Uma base para esse espaço ($T_{f(q)}$) pode ser obtida usando a função f, que mapeia os dois espaços $\mathcal{S}^2(q)$ e $\mathcal{S}^2(r)$. Isso pode ser obtido com os conceitos[4] de *pullback* ou *pushback*.

Definição 3.4 *Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma função diferenciável.*

- *Se em $\mathcal{N}$ está definida uma função $g : \mathcal{N} \to R$, a composição das duas funções é chamada* ***pullback* de g por** *f. E é representada por um asterisco embaixo:*

$$f_* g \equiv (g \circ f) : \mathcal{M} \to R$$

- *Se $V(p)$ é um vetor definido em $\mathcal{M}$, o* **pushforward** *desse vetor é representado por f^*V e é um vetor definido no ponto $f(p) \in \mathcal{N}$ e sua ação nas funções[5] em $\mathcal{N}$ é definida por:*

$$(f^*V)(g) \equiv V(f_* g) : \mathcal{F}(\mathcal{N}) \to R.$$

Sobre as definições acima, alguns breves comentários. Primeiro, lembre-se de que um vetor pode ser entendido como um operador que atua nas funções definidas na variedade. Se $V(p)$ é um vetor definido em $\mathcal{M}$ (i.e., um operador que atua em funções definidas em $\mathcal{M}$), então um vetor definido em $f(p) \in \mathcal{N}$ seria um operador que atuasse nas funções definidas em $\mathcal{N}$. Entretanto, uma função definida em $\mathcal{N}$ pode ser usada para definir uma função em $\mathcal{M}$ através do *pullback*. Tendo agora a função em $\mathcal{M}$, podemos atuar o operador, que nos dará um número x real como resultado. Por definição, a atuação do *pushforward* na função em $\mathcal{N}$ é esse mesmo número x. Para dar uma idéia melhor em termos de componentes, considere as bases ∂_μ e ∂_α para $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, com coordenadas x^μ e y^α, tudo respectivamente. Se V está definido em $\mathcal{M}$, então, tem componentes V^μ na base escolhida e f^*V tem componentes $(f^*V)^\alpha$. Assim, escrevemos (fazendo uso das definições e da regra da cadeia):

$$\big((f^*V)^\alpha \partial_\alpha\big) g = V^\mu \partial_\mu (f_* g) = V^\mu \partial_\mu (g \circ f) = \big(V^\mu \partial_\mu y^\alpha \partial_\alpha\big) g$$

Ou seja, o *pushforward* pode ser representado pela matriz

$$(f^*)^\alpha_\mu = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}.$$

Bom, já chega. O ponto é que existe um mapeamento $f^* : T_p \to T_{f(p)}$ entre os espaços tangentes à $\mathcal{S}^2(q)$ e $\mathcal{S}^2(r)$ nos pontos q e $f(q)$, respectivamente. Devido à (4), a função f comuta com o elemento g' e a base de $T_{f(q)}$, formada por $f^*(e_1)$ e $f^*(e_2)$ satisfaz:

$$f^*(e_2) = f^*\big(g'(e_1)\big) = g'\big(f^*(e_1)$$

o que significa que $f^*(e_1)$ e $f^*(e_2)$ têm o mesmo módulo. Em outras palavras, a função f^* mapeia o espaço tangente T_q em $T_{f(q)}$ conformalmente. Mais do que isso, esse fator conforme não deve depender do ponto escolhido q, já que todos os pontos de $\mathcal{S}^2(q)$ são equivalentes. A conclusão a que chegamos é que as órbitas $\mathcal{S}^2$ são mapeadas umas nas outras *conformalmente*.

Resumindo tudo o que foi dito acima, temos:

- *As órbitas $\mathcal{S}^2$ do grupo $SO(3)$ são superfícies bidimensionais com curvatura constante e positiva.*

- *É possível construir superfícies bidimensionais $\mathcal{G}^2$ com a propriedade de serem ortogonais às órbitas $\mathcal{S}^2$.*

- *Se escolhemos coordenadas (θ, ϕ) em $\mathcal{S}^2$ e (a, b) em $\mathcal{G}^2$, a métrica não possui termos dos tipos $dad\theta$, $dad\phi$, $dbd\theta$ e $dbd\phi$.*

---

[4]Estes conceitos foram apresentados na aula de número 20 (sex, 09/nov/2007) e podem também ser encontrados no capítulo 5 (pág 129) das Lecture Notes on General Relativity do Sean M. Carroll [9].

[5]Notação: Se $\mathcal{V}$ é uma variedade, $\mathcal{F}_p(\mathcal{V})$ é a coleção de todas as funções contínuas e diferenciáveis que passam por $p \in \mathcal{V}$.

- *Fixando valores das coordenadas de $\mathcal{G}^2$, digamos (a_0, b_0), temos uma órbita de grupo que passa por este ponto, cuja métrica é a aquela usual de uma esfera, mas dependente do ponto escolhido por um fator conforme:*

$$ds^2_{(a,b=fixos)} = f(a_0, b_0)d\Omega.$$

- *Fixando valores das coordenadas de $\mathcal{S}^2$, digamos (θ_0, ϕ_0), temos uma superfície de métrica arbitrária*[6]*:*

$$ds^2 = g_{aa}(a,b)da^2 + g_{ab}(a,b)\big(dadb + dbda\big) + g_{bb}(a,b)db^2 + r^2(a,b)d\Omega.$$

Das observações acima, escrevemos a métrica geral do nosso espaço-tempo assim:

$$ds^2 = g_{aa}(a,b)da^2 + g_{ab}(a,b)\big(dadb + dbda\big) + g_{bb}(a,b)db^2 + f(a,b)d\Omega^2. \tag{5}$$

Agora defina $r^2 = f(a,b)$ (a letra r é apenas um nome *sugestivo* para a interpretação que terá ao fim de nossos cálculos e até aqui é tão somente um nome para a função desconhecida e arbitrária $\sqrt{f}$). A equação que define r pode ser resovida para b de modo que se obtém $b = b(a,r)$, o que nos possibilitaria escrever toda a métrica em termos de a e r, ficando com:

$$ds^2 = g_{aa}(a,r)da^2 + g_{ar}(a,r)\big(dadr + drda\big) + g_{rr}(a,r)dr^2 + r^2d\Omega^2. \tag{6}$$

É possível ainda simplificar ainda mais, eliminando os termos cruzados em a e r. Digamos que o sistema de coordenadas (t', r) seja aquele que faz este serviço. A nova variável t' é alguma função das coordenadas anteriores, (se tivéssemos essa relação, poderíamos tirar o valor de $a = a(t', r)$ e escrever tudo em termos de t' e r). A função $t' = t'(a,r)$ deve ser escolhida apropriadamente para que a métrica assuma a forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= A(t',r)dt'^2 + B(t',r)dr^2 + r^2d\Omega^2 = \\ &= A(t',r)\left[\left(\frac{\partial t'}{\partial a}\right)^2 da^2 + \left(\frac{\partial t'}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial r}\right)(dadr + drda) + \left(\frac{\partial t'}{\partial r}\right)^2 dr^2\right] + B(t',r)dr^2 + r^2d\Omega^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Comparando (6) e (7), chegamos a

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\partial t'}{\partial a}\right)^2 &= g_{aa} \\ A\left(\frac{\partial t'}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial r}\right) &= g_{ar} \\ A\left(\frac{\partial t'}{\partial a}\right)^2 + B &= g_{rr}, \end{aligned}$$

donde tiramos t', A e B como funções dos g_{**}'s, que por sua vez, são funções de a e r, de modo que o que se encontra é $t' = t'(a,r)$, $A(a,r)$ e $B(a,r)$. Invertendo $t' = t'(a,r)$ para encontrar $a = a(t',r)$, podemos substituir a nas funções A e B, de modo que temos o que queríamos:

$$ds^2 = A(t',r)dt'^2 + B(t',r)dr^2 + r^2d\Omega^2.$$

Finalmente, fazemos mais uma pequena modificação. Como sabemos que espaços-tempos na Relatividade Geral têm assinaturas lorentzianas, antecipamos que ou A ou B deve ser negativo. Para deixar isso explícito, reescrevemos a métrica acima em termos de funções com sinais definidos:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(t',r)}dt'^2 + e^{2\beta(t',r)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \tag{8}$$

Toda métrica que possua isometria $SO(3)$ pode ser posta na forma acima. Entretanto, para descrever algum processo físico, uma métrica deve ser solução das equações de Einstein. As restrições que esta equação impõe em (8) serão analisadas na próxima seção.

[6] Note, entretanto, que esta deve ser independente do ponto $q = (\theta_0, \phi_0)$, escolhido sobre a órbita, já que todos os pontos sobre $\mathcal{G}^2$ têm as mesmas coordenadas angulares. Cf. regra (3).

4 Métrica esférica na relatividade geral

Como dissemos no fim da seção anterior, a forma do espaço-tempo é restringida pelo conteúdo de matéria e/ou energia. Em termos matemáticos, a métrica $g_{\mu\nu}$ somente é fisicamente aceitável se obedecer a equação de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \tag{9}$$

em que G é a costante de Newton, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum (cujo traço é $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$) e

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \qquad , \qquad \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{g^{\sigma\rho}}{2} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right). \tag{10}$$

Assim como o problema tratado por Newton, estamos interessados no campo gravitacional num ponto fora da fonte.Nesta região, externa à fonte, não há matéria e $T_{\mu\nu} = 0$ e a equação de Einstein nos dá:

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

Se tivéssemos fazendo isso às cegas, o próximo passo seria calcular (10) e igualar à zero cada uma de suas componentes. Entretanto, eu já vi em outros lugares onde isso tudo vai dar e afirmo que somente as componentes $R_{t'r}$ e $R\theta\theta$ já são suficientes para os nossos propósitos. Não por acaso, estas são as componentes mais simples. Ei-las:

$$R_{t'r} = \frac{2}{r} \partial_{t'} \beta \tag{11}$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{e^{2\beta} + r\partial_r \beta - r\partial_r \alpha - 1}{e^{2\beta}}. \tag{12}$$

De $R_{t'r} = 0$, concluímos que $\partial_{t'}\beta = 0$, e de $\partial_{t'} R_{\theta\theta} = 0$ (e já usando que β não depende de t'), concluímos que $\partial_{t'}\partial_r \alpha = 0$. Isso significa que $\alpha(t', r) = \lambda(r) + \gamma(t')$ e portanto a métrica passa a ser:

$$ds^2 = -e^{2\lambda(r)} e^{2\gamma(t')} dt'^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Agora, mais uma mudança de coordenadas (a saber, definir t tal que[7] $dt^2 = e^{2\gamma(t')} dt'^2$). E então, temos, **finalmente**:

$$ds^2 = -e^{2\lambda(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{13}$$

Note que a métrica acima é invariante por uma translação na variável t, o que significa que tem um vetor de Killing além daqueles (três) associados com a simetria $SO(3)$. Interpretando t como uma variável temporal, enunciamos o *Teorema de Birkoff*:

Teorema 4.1 *Toda métrica esfericamente simétrica no vácuo é estática.*

5 Consequência físicas

A solução estática com simetria esférica é aquela de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{14}$$

Não discutiremos a obtenção exata de (14), já que isso foi feito em outro seminário. Para nossa discussão, é suficiente informar que quando essa solução descreve o campo de uma estrela, r é a distância ao centro da estrela e $2GM$ é uma constante de integração ajustada de modo que no limite de campos gravitacionais fracos, o potencial de Newton seja recuperado (M é a massa da estrela e G é a constante de Newton). Além disso, essa é chamada solução exterior, já que no caminho para obtê-al, usa-se que $R_{\mu\nu} = 0$, que é válido somente para o vácuo e, portanto, a solução de Schwarzschild não descreve a região interior à estrela (pois lá certamente não é vácuo!). Entretanto, se o raio da estrela for inferior à $2GM$, teremos que a componente g_{rr} da métrica (14) diverge, o que indica que o sistema de coordenadas que adotamos não é adequado para $r < 2GM$. A métrica também é divergente quando $r = 0$, mas esta

[7] Um outro modo é escolher um valor t para o qual $\gamma(t) = 0$.

divergência não pode ser corrigida com uma simples troca de coordenadas. Na verdade, não pode ser resolvida de jeito nenhum e o ponto $r = 0$ deve ser excluído do espaço-tempo e é chamado *singularidade*.

De tudo o que foi dito, já deve ser clar que uma estrela estática, ou colapsando, ou pulsando, ou explodindo geram o mesmíssimo campo gravitacional no vácuo que as cerca. Também não há emissão de ondas gravitacionais de modo esfericamente simétrico.

Considere agora uma casca esférica C de matéria, com interior vazio. Desejamos sabe o campo gravitacionao de um ponto no interior de C. É claro que trata-se de uma situação esfericamente simétrica e o Teorema de Birkoff garante que a solução deveria ser do tipo Schwarszchild, mas isso implicaria uma singularidade no ponto $r = 0$, a menos que a constante $2GM$ seja identicamente nula. Como não há razões para aceitar essa singularidade no interior de C, dizemos que a tal constante $2GM$ é nula e portanto a métrica (14) reduz-se à de Minkowiski, de modo que um ponto no interior de uma casca esférica não experimenta campo gravitacional, o que concorda com o resultado newtoniano.

Referências

[1] Isaac Newton, "PRINCIPIA - Princípios Matemáticos da Filosofia Natural, Livro I", EDUSP, segunda edição, (2002), *Seção XII - As forças atrativas de corpos esféricos, Pág. 253.*

[2] ibidem, *Proposição LXXVI, Teorema XXXVI, pág. 259.*

[3] ibidem, *Escólio, pág. 45.*

[4] Albert Einstein, "Relatividade Geral". In: "O Princípio da Relatividade".

[5] Albert Einstein, "Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento". In: "O Princípio da Relatividade".

[6] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis, "The Large Scale Structure of Space-time", CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, (1973), *Apêndice B, Pág. 369.*

[7] João C. A. Barata, "Curso de Física-Matemática", disponibilizadas em: *http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html.*
P.S. O Teorema de Picard-Lindelöf encontra-se no capítulo sobre o Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas de Suas Conseqüências, seção 21.4.1.

[8] Bernd Schmidt, "Isometry Groups with Surface-Orthogonal Trajectories", *Zs. f. Naturfor.*, (1967), **22**a, 1351 - 1355.

[9] Carroll, Sean M., "Lecture Notes on General Relativity", *arXiv: gr-qc/9712019.*