

(60)

Energia e momento linear em ondas eletromagn.

ENERGIA

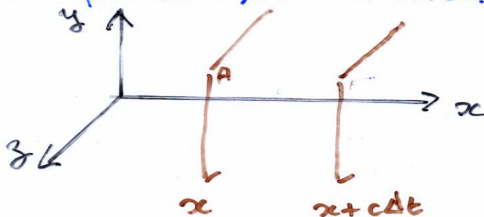
Sabemos que todo campo el. ou magn., tem energia associada. Como uma onda eletromagnética é formada de um campo el. e um campo magn., sua densidade de energia é:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Usando $B = E/c$, vemos que $\frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{2\mu_0 \epsilon_0} \frac{\epsilon_0 E^2}{c^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$
 i.e. a contribuição de \vec{E} e \vec{B} no u é a mesma.

As ondas que descrevemos são ondas progressivas isto implica que deve haver transporte de energia no espaço.

Consideramos uma frente de onda (= plano \perp direção de propagação sobre o qual \vec{E} e \vec{B} tem valor fixo), num instante t . Após um tempo dt , esta frente está em $x+cdt$.



A energia contida no volume $Acdt$ foi transportada através da área A durante dt :
 $dL = u dV = (\epsilon_0 E^2)(Acdt)$

Chamamos de S o fluxo de energia por u. de superfície e unidade tempo:

$$S = \frac{dL}{A dt} = \epsilon_0 c E^2 \quad \text{depende de } E \text{ e } c$$

Observamos que $S = \epsilon_0 c^2 \frac{E \times B}{c} = \epsilon_0 c \frac{E \times B}{\mu_0} = \frac{E \times B}{\mu_0}$ (pois \vec{E} e \vec{B} são ortogonais).

Além disto, o transporte de energia se faz no sentido de $\vec{c} = c\hat{x}$, que é o de $\vec{E} \times \vec{B}$.

Isto nos leva a definir o vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

que tem módulo $S = \frac{dL}{A dt} = \epsilon_0 c E^2$ e sentido de \vec{c}

(61)
O fluxo total da energia por unidade de tempo (a potência) que atravessa uma sfc fechada \mathcal{E} :

$$P = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

potência

Para uma ^{onda} senoidal, é útil definir e calcular sua intensidade

$$I \equiv \langle S \rangle \text{ média sobre um período} \leftarrow \text{depende de } x$$

intensidade

$$I = \langle S \rangle = \epsilon_0 c E_{\text{max}}^2 \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \epsilon_0 c E_{\text{max}}^2 / 2$$

MOMENTO

As ondas eletromagn. transportam não só energia mas momento linear.

isto não deve surpreender pois na relatividade energia e momento são ligados: $E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (pc)^2}$.
Veremos mais tarde, que as ondas eletromagn. podem ser consideradas como uma corrente de partículas sem massa, os fótons, de modo que $p = E/c$, ou nas nossas notações $p = U/c$.

Assim o fluxo de momento por u. de superfície e unidade de tempo é:

$$\frac{dp}{Adt} = \frac{S}{c}$$

Esse momento linear é responsável por um fenômeno chamado pressão de radiação.

Caso de uma onda totalmente absorvida

Quando uma onda eletromagn. é absorvida por uma superfície A, o momento linear também é transferido para essa superfície (supomos $\vec{c} \perp A$)

$\Rightarrow \frac{dp}{dt}$ é a força realizada sobre a superfície

$\Rightarrow \langle \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} \rangle = \langle \frac{S}{c} \rangle$ É a pressão sobre esta superfície.

Assim

$$p_{rad} = \frac{I}{c}$$

onda totalm. absorvida

(com cuidado $p_{rad} \neq p$)

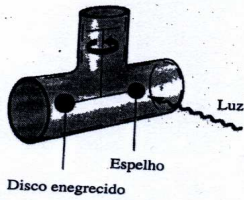
Caso de uma onda totalmente refletida

Se a onda é totalmente refletida, ela carrega -dp e a superfície ganha 2dp (para conservar momento) de modo que

$$p_{rad} = \frac{2I}{c}$$

onda totalm. refletida

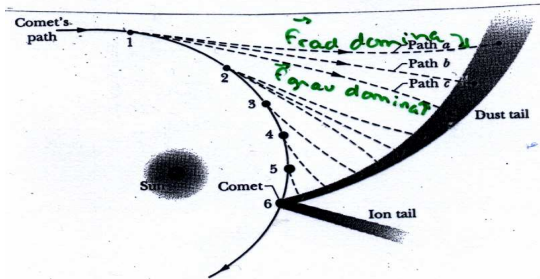
Este fenômeno de pressão de radiação tem muitas aplicações.



O RADIOMETRO

consiste em um par (ou mais) espelho - disco escuro. Na presença de luz, o par gira. A pressão de radiação é determinada pela medida do ângulo de giro. O aparelho opera num vácuo muito alto.

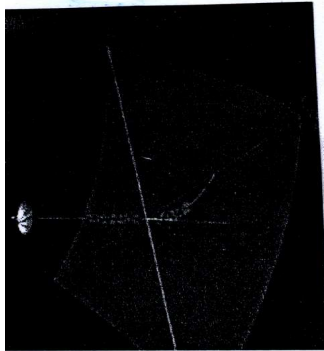
RABO DE COMETA



A cometa está agora na posição 6. Pó foi solto nas 5 posições anteriores. A pressão de radiação devido a luz solar atua sobre este pó, formando agora o rabo da cometa.

NAVEGAÇÃO ESPACIAL USANDO VELA SOLAR

A NASA está testando tais velas na terra (foto esq.). A ISAS, japonesa, já conseguiu abrir tais velas no espaço (foto do meio) (agosto 2004). A Planetary Society, com o Space Research Institute russo, tentou 2 vezes colocar em órbita um veículo com vela solar mas tiveram problemas no lançamento (foto direita) (julho 2001, junho 2002)



-PINÇAS ÓPTICAS usam um feixe laser para manipular átomos, moléculas e células (ver notícias)

FOTO IMPR
 FILIPAPER
 FOTOCOPIADORA P&B IMPRIMIR NO OUTRO LADO
 FILIPAPER
 FOTOCOPIADORA P&B IMPRIMIR NO OUTRO LADO
 FILIPAPER
 FOTOCOPIADORA P&B IMPRIMIR NO OUTRO LADO
 FILIPAPER
 FOTOCOPIADORA P&B IMPRIMIR NO OUTRO LADO

Ondas eletromagnéticas na matéria

(6h)

Podemos facilmente estender nossa discussão sobre ondas eletromagnéticas no vácuo ao caso de um meio não-condutor linear (com $\rho = 0$ e $\vec{j} = 0$)

Neste caso, as eq. de Maxwell podem ser re-escritas

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu \left(\vec{j} + \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \right)\end{aligned}$$

De modo que a onda eletromagnética se propaga com velocidade

$$\vec{v} \text{ com } v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \equiv \frac{c}{n} < c$$

$n = \text{índice de refração}$

$\vec{v}, \vec{E}, \vec{B}$ formam um triedro direito

$$B = E/v$$

A densidade de energia é

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

O vetor de Poynting é

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu}$$

e a intensidade

$$I = \langle S \rangle$$

Obs. 1: u e S não necessariamente \vec{E} e \vec{B} o mesmo do que de campos estáticos. Pode depender de ω . Em geral $\mu \approx \mu_0$.
Obs. 2: na interface entre 2 meios, parte de uma onda incidente é refletida e parte transmitida. No caso de uma onda entrando num meio condutor, ela não se propaga sobre distâncias apreciáveis. (ex.: isto torna difícil a comunicação com submarinos).

Ondas eletromagnéticas estacionárias
Lembrete sobre reflexão de onda

Consideramos uma corda com uma extremidade presa e com um pulso se propagando:



Que acontece quando o pulso atinge a extremidade fixa? É refletido com imagem invertida. PORQUÊ?
 → matematicamente
 Extremidade fixa $\Rightarrow f(0, t) = 0, \forall t$

De modo geral f é da forma:

$$f(x, t) = g(x - vt) + \underbrace{h(x + vt)}_{\substack{\text{descreve o} \\ \text{pulso incidente}}}$$

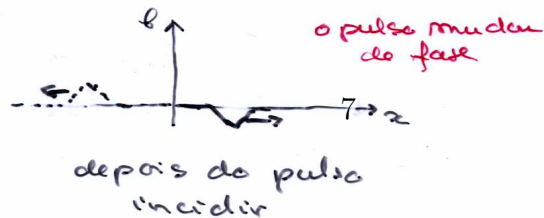
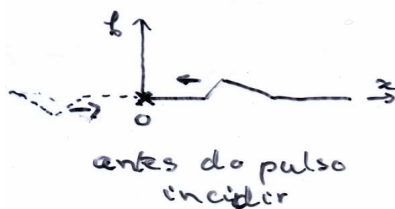
Devemos ter: $f(0, t) = 0 = g(-vt) + h(vt), \forall t$
 \Rightarrow isto determina a função incógnita $g(x')$ como:

$$g(x') = -h(-x')$$

Assim a forma de $f(x, t)$ é:

$$f(x, t) = \underbrace{h(x + vt)}_{\text{pulso inc.}} - \underbrace{h(x - vt)}_{\text{pulso refletido}}$$

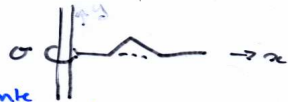
Graficamente:



→ fisicamente:

Ao atingir o ponto 0, o pulso iria provocar um deslocamento da corda. Para ela não se movimentar, o suporte reage (o que gera a imagem invertida).

No caso de uma corda com extremidade livre (71)



O pulso é refletido sem inversão. Porquê?

matematicamente

a força ^{vertical} em $x=0$ tem que ser nula $\forall t$:

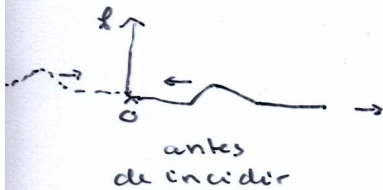
$$F(0,t) = -T \frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 0 \quad (\text{com } f \text{ deslocamento vertical})$$

Para a solução geral $f(x,t) = g(x-ut) + h(x+ut)$ isto implica

$$g'(-ut) + h'(ut) = 0 \quad (' \text{ significa derivada })$$

Para satisfazer isto, basta escolher $g(x) = h(x)$ daí:

$$f(x,t) = \underbrace{h(x+ut)}_{\text{inc.}} + \underbrace{h(-x+ut)}_{\text{refletida}}$$



o pulso não muda de fase

fisicamente

Quando o pulso chega em 0, o anel é deslocado para cima. Ele puxa a corda, produzindo um pulso refletido não invertido.

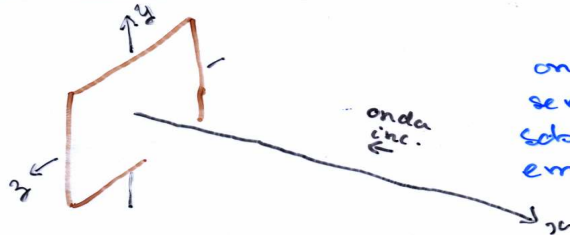
Aplicação as ondas eletromagnéticas
UMA PLACA

perpendicular a

Uma onda eletromagnética que incide sobre um condutor perfeito é refletida como o pulso numa corda.

O campo elétrico total não tem componente para a superfície de um condutor. Contudo, o campo elétrico da onda incidente não é zero sobre o condutor em todos os instantes. Assim aparecem correntes induzidas no condutor e um campo elétrico adicional tal que a componente do campo elétrico total, na superfície do condutor, seja nula. Assim este caso é similar ao pulso numa corda com extremidade fixa.

Para o campo magnético, não tem esta restrição. Este caso é similar ao pulso numa corda com extremidade livre.



Supomos uma onda incidente no sentido de negativo, sobre uma placa plana em $x=0$, com polarização $\vec{E} = E_m \cos \omega t \hat{y}$.

$$\vec{E}(x,t) = [E_m \cos(kx + \omega t) - E_m \cos(-kx + \omega t)] \hat{y}$$

$$\vec{B}(x,t) = [B_m \cos(kx + \omega t) + B_m \cos(-kx + \omega t)] (-\hat{z})$$

Podemos re-escrever, usando $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

$$\vec{E}(x,t) = -2E_m \sin kx \sin \omega t \hat{y}$$

$$\vec{B}(x,t) = 2B_m \cos kx \cos \omega t (-\hat{z})$$

Vemos que, qualquer que seja t , $\vec{E}(x,t) = 0$ sobre os planos $kx = 0, \pi, 2\pi, \text{etc.}$

$\Leftrightarrow x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \text{etc}$ (pois $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

Estes planos são chamados planos nodais. São similares aos nós de uma onda estacionária numa corda. Os planos onde $\text{sen } kx = \pm 1$ são chamados antinodais.

O campo magnético $\vec{B}(x,t) = 0 \forall t$ sobre os planos $kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \text{etc}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \text{etc.}$

Existe também planos antinodais na metade da distância entre planos nodais.

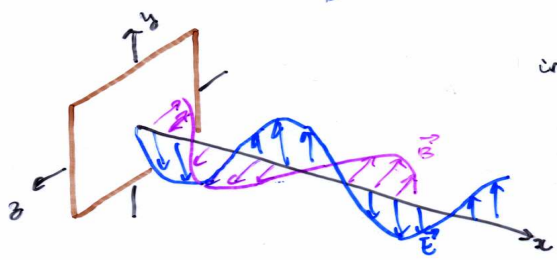


imagem para $\omega t = \frac{\pi}{2}$

Obs.1: \vec{E} e \vec{B} não estão em fase devido as fatores $\cos \omega t$ vs. $\sin \omega t$.

Obs.2: \vec{E} e \vec{B} satisfazem eq. de onda (do tipo $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$) e as eq. de Maxwell.

Obs.3: Uma vez determinado $\vec{E}(x,t) = [E_m \cos(kx + \omega t) - E_m \cos(-kx + \omega t)] \hat{y}$ pode-se obter \vec{B} também da maneira seguinte:

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ com $\vec{E}_1 = E_m \cos(kx + \omega t) \hat{y}$, $\vec{E}_2 = E_m \cos(-kx + \omega t) \hat{y}$
 $\rightarrow \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ com $\vec{B}_1 = \frac{E_m}{c} \cos(kx + \omega t) \hat{z}$, $\vec{B}_2 = \frac{E_m}{c} \cos(-kx + \omega t) \hat{z}$

DUAS PLACAS

Podemos introduzir um segundo plano condutor em $x=L$. Os dois planos condutores tem que ser planos nodais para \vec{E} : uma onda estacionária poderá se formar somente se L é múltiplo de $\frac{\lambda}{2}$. Ou seja, os comprimentos de onda que satisfazem $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ ($n=1,2,\dots$) permitem que haja uma onda estacionária. Isto também é similar a cordas.

$$\begin{aligned} \text{Podemos calcular } S(x,t) &= \frac{E(x,t)B(x,t)}{\mu_0} \\ &= \frac{4\epsilon_0 B_m \cos kx \sin kx \cos \omega t \sin \omega t}{\mu_0} \end{aligned}$$

assim $\langle S \rangle = I = 0$. isto é esperado, não há transporte de energia numa onda estacionária.

Isto não impede que há lugares com $\omega > 0$ e outros com $\omega < 0$. Isto explica porque num forno microonda sem mesa giratória, a comida não esquenta uniformemente: tem ondas estacionárias e nos nós, a comida não esquenta.



Este ovo só foi cozido em 2 pontos onde a densidade de energia é máxima \Rightarrow pontos separados de $\frac{\lambda}{2}$

[Para medir a velocidade da luz: 12
Medir a distância entre 2 pontos bem cozidos adjacentes, por ex. 6cm $\Rightarrow \lambda = 2 \times 6\text{cm}$.
Procurar a frequência de operação do microonda, em geral 2450 MHz.

$$c = \lambda f = 0,12\text{m} \times 2450 \cdot 10^6 \text{s}^{-1} = 2,94 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1} \dots]$$

O espectro eletromagnético

Vivemos num banho de ondas. Elas tem frequências diferentes (e entao comprimento de onda $\lambda = c/f$ também) - Todas se propagam com velocidade c no vácuo.

Ondas rádio $f \sim 10^6$ a 10^8 Hz
usadas nos sistemas de comunicação de rádio e TV
[provocadas por cargas aceleradas em antenas]

Microondas $f \sim 10^9$ a 10^{12} Hz
por exemplo: forno microondas
[geradas por dispositivos como osciladores]

Infravermelho $f \sim 10^{12}$ a 10^{14} Hz
emitidas por corpos quentes

visível $f \sim 10^{14}$ Hz $\lambda = 400$ a 700 nm
violeta vermelho
[gerada por reorganização e^- nos átomos e moléculas.]

UV $f \sim 10^{15}$ a 10^{17} Hz
ex. sol

X $f \sim 10^{16}$ - 10^{21} Hz
usados na medicina

gamma $f \geq 10^{18}$ Hz
emitidos por ex. por núcleos radioativos (perigosos).

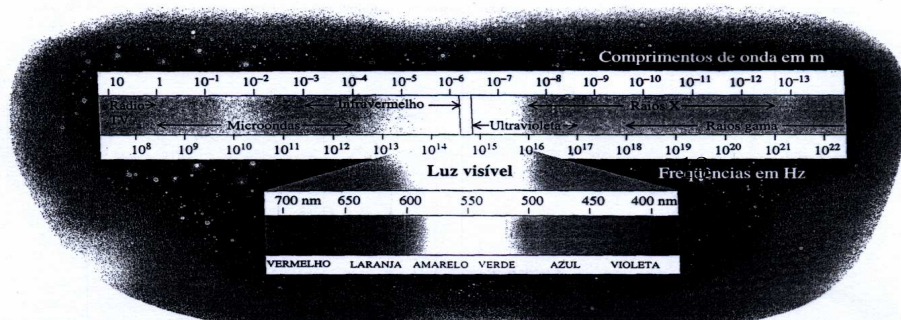


FIGURA 33.15 O espectro eletromagnético. As frequências e os comprimentos de onda existentes na natureza se estendem sobre um intervalo tão elevado que é necessário usar uma escala logarítmica para mostrar todas as bandas importantes. O limites entre as diversas bandas são ligeiramente arbitrários.

Formulário

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad V_m = Z I_m,$$

$$P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi, \quad V_{qm} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, \quad I_{qm} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}.$$

Lei de Gauss: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$

Lei de Gauss do magnetismo: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$

Lei de Faraday: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Lei de Ampère-Maxwell: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad |\vec{E}| = c |\vec{B}|.$$

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \quad \text{onde} \quad \Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

$$\vec{E} = E_m \cos(kx - \omega t + \phi) \hat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m \cos(kx - \omega t + \phi) \hat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad kc = \omega.$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_m B_m}{2\mu_0}, \quad \text{média temporal: } \langle \cos^2(kx - \omega t + \phi) \rangle = 1/2.$$

$$P_{rad} = \frac{2I}{c} \quad \text{e} \quad P_{rad} = \frac{I}{c}, \quad u = pc.$$

Para um campo vetorial $\vec{R}(x, y, z, t) = R_x(x, y, z, t)\vec{i} + R_y(x, y, z, t)\vec{j} + R_z(x, y, z, t)\vec{k}$ temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}.$$

Questão 4

Uma onda eletromagnética plana senoidal no vácuo tem as seguintes características: (1) A frequência é 100 MHz ($= 10^8 \text{s}^{-1}$), (2) propaga-se no sentido negativo do eixo x , (3) a intensidade é 240 W/m^2 e (4) o campo elétrico está na direção do eixo y e atinge o valor máximo para $x = 0$ e $t = 0$. São dados: a velocidade da luz no vácuo $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ e a permeabilidade magnética do vácuo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$.

- (a) (0,5 ponto) Determine o comprimento de onda.
- (b) (0,5 ponto) Determine o módulo da força que a onda exerce sobre uma superfície quadrada perfeitamente refletora de 1 km de lado e perpendicular ao eixo x .
- (c) (1,0 ponto) Escreva a expressão do campo elétrico.
- (d) (0,5 ponto) Escreva a expressão do campo magnético.

2005

Questão 4

Uma nave espacial é impulsionada por uma “vela” que reflete a luz do Sol. A vela tem a forma de um quadrado com lados de 1Km de comprimento, é perfeitamente refletora e está sempre orientada perpendicularmente à luz do Sol. Suponha que nas vizinhanças da Terra a intensidade da luz solar $I = 1,35 \times 10^3 \text{ W/m}^2$.

- (a) (1,0 ponto) Calcule a pressão de radiação exercida pela luz solar sobre a vela próximo da Terra? Dado: a velocidade da luz $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.
- (b) (1,0 ponto) Se a massa da nave $M = 4,5$ toneladas, calcule a aceleração a da nave produzida pela força de radiação.
- (c) (0,5 ponto) Ignorando-se os efeitos da atração gravitacional, calcule o tempo gasto em dias para percorrer uma distância equivalente à separação Terra-Lua (360.000 km) partindo do repouso. Dado: $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Questão 3

O campo elétrico de uma onda eletromagnética no vácuo é dado por

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin(\alpha x) \cos(\beta t) \hat{e}_y$$

- (a) (1,0 ponto) Deduza a relação existente entre as constantes α e β sabendo-se que o campo elétrico satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

- (b) (1,0 ponto) Deduza a expressão do campo magnético da onda a partir da lei de Faraday.
- (c) (0,5 ponto) Escreva a expressão analítica das ondas que se compõem para produzir esta onda estacionária.

Questão 3

A onda eletromagnética com campo elétrico $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}$ incide perpendicularmente sobre uma placa totalmente refletora de área A .

- (a) (1,0 ponto) Calcule o vetor de Poynting associado à onda.
- (b) (1,0 ponto) Calcule a força média (vetor) exercida pela onda sobre a placa.
- (c) (0,5 ponto) Calcule as densidades médias de energia e momento (módulo) transportadas pela onda.