

# As equações de Maxwell

## Uma lista provisória

Ao longo do curso de física III forem estudadas as várias leis fundamentais do eletromagnetismo.

### A LEI DE GAUSS:

relaciona o campo elétrico sobre uma superfície fechada  $S$  com as cargas no volume delimitado por  $S$ :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$\oint_S$  : superfície fechada  
 $\vec{E}$  : campo sobre  $S$  (devido a todas as cargas)  
 $d\vec{A} = dA \hat{n}$  : com  $\hat{n}$  idA, para fora  
 $\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$  : cargas elétricas no vol. delimitado por  $S$

fluxo de  $\vec{E}$  através de  $S$



A LEI DE GAUSS DO MAGNETISMO é parecida com a anterior, levando em conta que não existe monopólos magnéticos.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



"tudo o que entra, sai"

### A LEI DE FARADAY

Uma fem induzida num espira aparece se  $\Phi_B$ , o fluxo do campo magnético através dela, varia com o tempo:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

isto pode ocorrer porque a espira está em movimento ou porque  $\vec{B}$  varia com o tempo.

No caso onde  $\vec{B}$  varia com o tempo através da <sup>delimitada</sup>  $S_C$  um circuito  $C$  <sup>fechado</sup> qualquer (pode ser imaginário) aparece um campo elétrico induzido\* ao longo de  $C$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_C &= - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \left( \int_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right) \\ &= + \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

$\mathcal{E}_C$  → fem induzida sobre  $C$   
 $\int_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{A}$  →  $S_C$  varia com  $t$   
 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$  →  $\vec{E}$  campo induzido sobre  $C$   
 $d\vec{l}$  → pedaço de  $C$  de comprimento  $d\vec{l}$ , com sentido anti-horário

\*: este campo  $\vec{E}$  não é conservativo.

### A LEI DE AMPÈRE

relaciona o campo magnético sobre uma curva fechada, com as correntes que atravessam o interior desta curva

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{liq}$$

$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$  → curva  $C$  fechada, campo sobre  $C$  (devido a todas as correntes)  
 $i_{liq}$  → corrente  $i_{liq}$  através da  $S_C$  delimitada por  $C$   
 $d\vec{l}$  → pedaço de  $C$  anti-horário



Nossa lista provisória fica assim (31)

$$\begin{cases} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{liq}}}{\epsilon_0} \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \end{cases}$$

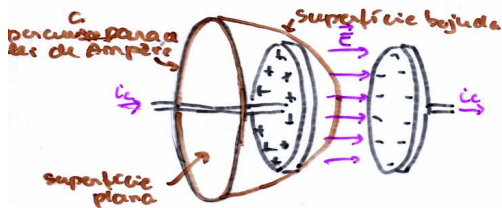
$$\begin{cases} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} + 0 \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{liq}} \end{cases}$$

Da mesma maneira que o campo elétrico pode ser criado de 2 maneiras (cargas ou  $\Phi_B$  variando), é natural se perguntar se o campo magnético pode ser criado de 2 maneiras: corrente el. ou  $\Phi_E$  variando.

A resposta é sim! Mas foi descrito com outro argumento por Maxwell

Corrente de deslocamento e lei de Ampère generalizada (§23.10)

Consideremos um capacitor sendo carregado.



Calculamos  
 $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{eq}$

Para calcular  $i_{eq}$ , temos que considerar as correntes através de uma superfície, não necessariamente plana, delimitada por C. Se considerarmos a superfície plana delimitada por C, temos  $i_{eq} = i_c \neq 0$   
 boijuda " " " " "  $i_{eq} = 0$   
 Isto é: uma contradição.

Maxwell resolveu este problema admitindo a existência de um outro termo na equação de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_c + i_D)$$

↓  
corrente de condução usual
↓  
corrente de deslocamento entre as placas

com  $i_D \equiv \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$  com  $\vec{E}$  campo entre as placas

Podemos verificar que isto resolve o problema:

pl/ superfície plana :  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c = \mu_0 \epsilon \frac{d\phi_E}{dt}$

pois  $i_c = \frac{dq}{dt}$  ;  $i_D = 0$

com  $q = CV = \epsilon \frac{A}{d} Ed = \epsilon \phi_E$

pl/ superfície boijuda :  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_D = \mu_0 \epsilon \frac{d\phi_E}{dt}$   
 pois  $i_c = 0$

23

Sera que  $i_b$  é um artifício ou tem sentido físico? A lei de Ampère generalizada (implica que na região entre as placas  $\epsilon = 0$ ), deve aparecer um campo magnético que satisfaz  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_b = \mu_0 \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$ , i.e. ele é gerado pelas variações de  $\Phi_E$ . Experimentalmente pode-se verificar que realmente aparece este campo magnético induzido. Assim  $i_b$  tem sentido físico.

Experimentalmente estes campos são difíceis de detectar pois são muito fracos. Uma das razões é que podemos aumentar  $\Phi_B$  considerando mais espiras mas não existe uma maneira tão simples para aumentar  $\Phi_E$ .

### Lista final das equações de Maxwell (§30.8)

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon} \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} &= 0 \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 (i_{\text{enc}} + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}) \end{aligned}$$

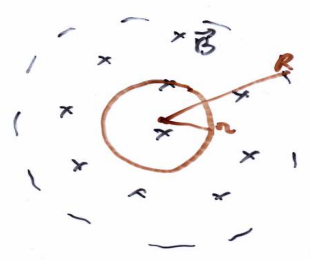
se levarmos em conta que não existe monopolos magnéticos nem corrente de monopolos magnéticos, estas equações são extremamente simétricas em  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ .

Observação: A mecânica de Newton não é compatível com os postulados da relatividade (restrita) como visto em Física II. Por outro lado, as leis de Maxwell já são compatíveis, i.e. valem em qualquer ref. inercial. Em particular, um processo pode parecer elétrico em uma, segundo a ref.

Comparação entre campo elétrico induzido e campo magnético induzido

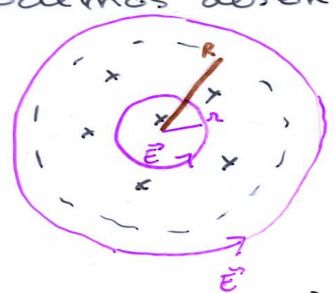
**CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO**

Consideramos um anel de cobre num campo magnético uniforme enchendo uma região cilíndrica. Supomos  $|\vec{B}|$  aumentando com  $\frac{d|\vec{B}|}{dt} = k$ . Queremos calcular o campo el. induzido.



Para compensar o aumento de  $|\vec{B}|$ , deve aparecer uma corrente induzida no anel que seja anti-horária. Isto também é o sentido do campo elétrico induzido.

Se retiramos o anel, ainda existe este campo el. induzido (mas não a corrente induzida). Podemos desenhar as linhas de campo de  $\vec{E}$ .



Agora calculamos  $|\vec{E}|$

Se  $r < R$ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E$$
$$= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int (\vec{B} \cdot d\vec{A}) = \frac{dB}{dt} \cdot A$$
$$= k \pi r^2 \Rightarrow E = \frac{k r}{2}$$

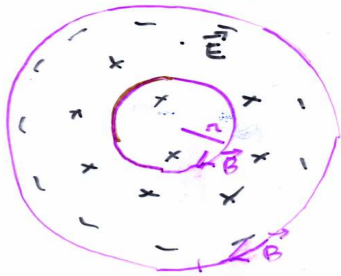
se  $r > R$ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = k \pi R^2$$
$$\Rightarrow E = \frac{k R^2}{2r}$$

## CAMPO MAGNÉTICO INDUZIDO

35

Consideramos uma região cilíndrica onde o campo elétrico muda com  $\frac{d|\vec{E}|}{dt} = k$ . Queremos calcular o campo magn. induzido.



Temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Por analogia com o caso anterior, as linhas de  $\vec{B}$  devem ser circulares mas com sentido horário (devido ao + na lei de Ampère-Maxwell)

$$\Rightarrow B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{k r}{2} \quad \text{para } r < R$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{k R^2}{2r} \quad \text{para } r > R.$$

$$[\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}]$$

$$[\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)]$$

Além disto, pode-se calcular a corrente de deslocamento:

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = -\epsilon_0 \pi R^2 \frac{dk}{dt}, \quad i_d \text{ aponta para dentro, paralelamente a } \vec{E}.$$

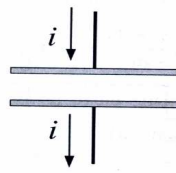
Exemplo: uma voltagem alternada (ca) é aplicada diretamente a um capacitor de placas paralelas de  $8 \mu\text{F}$ . A frequência da fonte é  $3 \text{ kHz}$  e a amplitude da voltagem  $30 \text{ V}$ . Achar a corrente de deslocamento.

$$V(t) = V_m \cos \omega t \quad \text{com } V_m = 30 \text{ V e } \omega = 2\pi \times 3 \cdot 10^3 = 6\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d}{dt}(EA) = \epsilon_0 \frac{A}{d} \frac{dV}{dt} = C \frac{dV}{dt} = -(4,52 \text{ A}) \sin(6\pi \cdot 10^3 t)$$

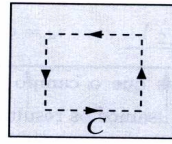
**Questão 2**

Um capacitor de placas quadradas e paralelas de área  $A$  está sendo carregado através de uma corrente  $i$ , conforme a figura 1. Despreze o efeito do campo elétrico inhomogêneo próximo das bordas.



Vista lateral

Fig. 1



Vista de cima

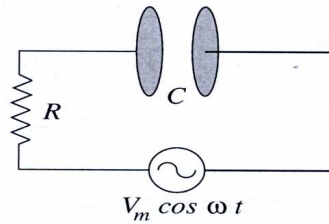
Fig. 2

- (a) (0,5 ponto) Calcule  $dE/dt$  na região entre as placas em função de  $i$ ,  $A$  e  $\epsilon_0$ . (Lembre que o campo entre as placas de um capacitor plano é  $E = \sigma/\epsilon_0$ , onde  $\sigma$  é a densidade superficial de carga na placa do capacitor.)
- (b) (1,0 ponto) Calcule a corrente de deslocamento através da região entre as placas do capacitor.
- (c) (1,0 ponto) Qual é o valor da integral  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  em torno do quadrado pontilhado (percurso  $C$  da figura 2) de área  $A' < A$ ?



**Questão 2**

O circuito RC mostrado na figura abaixo está ligada a uma fonte de corrente alternada que fornece uma tensão  $v(t) = V_m \cos \omega t$ .



- (a) (0,5 ponto) Qual é a impedância (em módulo) do circuito e o valor de pico da corrente que por ele circula?
- (b) (1,0 ponto) Calcule a razão  $V_C/V_m$  entre os valores de pico das tensões no capacitor e na fonte. Se tomarmos a tensão de saída entre os terminais do capacitor, o circuito funciona como um filtro passa-baixas ou como um filtro passa-altas?
- (c) (1,0 ponto) O capacitor da figura é formado por duas placas circulares de raio  $r$  no vácuo. Ignore o efeito de bordas. Seja  $Q(t) = Q_m \sin(\omega t + \phi)$ , onde  $Q_m$  é constante, a carga em uma das placas do capacitor. Calcule a corrente de deslocamento  $I_D$  entre as placas do capacitor. Dado: o campo elétrico entre as placas do capacitor  $E = \sigma/\epsilon_0$ , onde  $\sigma$  é a densidade superficial de carga na placa do capacitor.