Potência em circuitos de c.a.

gerador + resistor

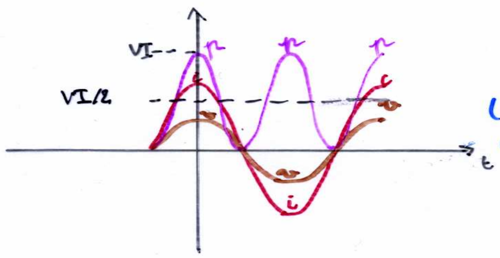
A potência fornecida ao resistor é

$p = vi$ com $v = v_R$

Supomos $i = I\cos\omega t$, de modo que $v_R = V_R\cos\omega t$

assim

$p = V_R I\cos^2\omega t$ (sempre positivo ⇒ energia fornecida a R, ∀t)



$p_{med} = VI\,\overline{\cos^2\omega t} = \boxed{\frac{1}{2}V_R I}$

(pois $\overline{\cos^2\omega t} = 1/2$, numericamente ou graficamente)

Usando valores quadráticos médios, pode-se reescrever:

$$\boxed{p^R_{med} = V_{R\,qm} I_{qm} = V^2_{R\,qm}/R = R I^2_{qm}}$$

i.e. as mesmas expressões do que para corrente contínua.

gerador + indutor

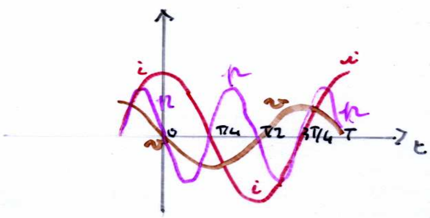
Desta vez, a potência fornecida ao indutor é

$p = vi$ com $v = v_L$

com $i = I\cos\omega t$ e $v_L = V_L\cos(\omega t + 90)$

⇒ $p = -V_L I\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\omega t = -V_L I\left(\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2\omega t\right)$ ⇒ $\boxed{p^L_{med} = 0}$

O que significa isto?



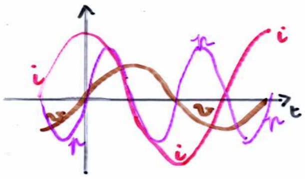
de 0 a T/4, p<0: L perde en. p/ fonte
de T/4 a T/2, p>0: L recebe en. da fonte
de T/2 a 3T/4, p<0: L perde en. p/ fonte
de 3T/4 a T, p>0: L recebe en. da fonte
em média: $p_{med} = 0$

gerador + capacitor

A potência fornecida ao capacitor é:

$p = vi$ com $i = I\cos\omega t$ e $v = v_c = V_c\cos(\omega t - 90°)$

$\Rightarrow p = V_c I \underbrace{\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\omega t}_{\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2\omega t} \Rightarrow \boxed{p^c_{med} = 0}$



de 0 a T/4, p>0: o capacitor armazena en.
de T/4 a T/2, p<0: " " restitui "
de T/2 a 3T/4, p>0: " " armazena //.
de 3T/4 a T, p<0: " " restitui "
em média: $p_{med} = 0$

gerador + RLC em série

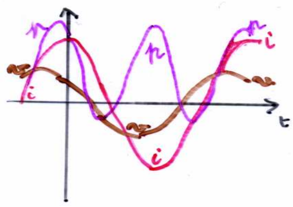
A potência fornecida a RLC é:

$p = vi = VI\cos(\omega t + \varphi)\cos\omega t = VI\cos\omega t(\cos\omega t\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\omega t\,\mathrm{sen}\,\varphi)$

$\Rightarrow p_{med} = VI\cos\varphi\,\underbrace{\overline{\cos^2\omega t}}_{1/2} - VI\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\underbrace{\overline{\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\omega t}}_{=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{sen}\,2\omega t}=0}$

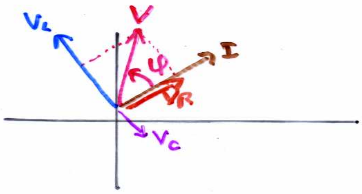
$\Rightarrow \boxed{p^{fonte}_{med} = \frac{1}{2}VI\cos\varphi = V_{qm}I_{qm}\underbrace{\cos\varphi}_{\text{fator de potência}}}$

Obs.:



Como $-90° \leq \varphi \leq 90°$: $p_{med} \geq 0$

[Obs.: podemos reencontrar os resultados anteriores
resistor puro $\Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow p_{med} = V_{qm}I_{qm}$
indutor puro $\Rightarrow \varphi = 90° \Rightarrow p_{med} = 0$
capacitor puro $\Rightarrow \varphi = -90° \Rightarrow p_{med} = 0$]



Podemos calcular $\cos\varphi$.

$V\cos\varphi = V_R$ com $V = ZI$ e $V_R = RI$

$\Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{R}{Z}}$

$\Rightarrow$ Outras maneiras de escrever p^{fonte}_{med}:

$p^{fonte}_{med} = V_{qm}I_{qm}\frac{R}{Z} = \begin{cases} (ZI_{qm})I_{qm}\frac{R}{Z} = RI^2_{qm} \\ V_{qm}(V_{qm}/Z)\,R/Z = V^2_{qm}R/Z^2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ dissipada em R

Ressonância em circuitos de c.a.

Lembrete sobre oscilações

Oscilações são um fenômeno comum (cordas vibrantes de um violão, oscilações das moléculas do ar que transmitem a sensação de som, oscilações dos eletrons nas antenas dos transmissores de rádio e televisão, etc). O formalismo que descreve as ondas é universal. Podemos ter:

(i) oscilações livres não amortecidas descritas por:

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + Cx = 0 \Rightarrow x(t) \text{ senoidal com freq. angular } \omega_0 = \sqrt{C/A}$$

ex.: massa-mola

LC

(ii) oscilações livres amortecidas descritas por:

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx = 0 \Rightarrow x(t) \begin{cases} \text{subcrítico} \\ \text{crítico} \\ \text{supercrítico} \end{cases}$$

ex.: massa-mola com atrito

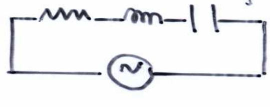
RLC sem fonte

(iii) oscilações forçadas

Nas oscilações livres amortecidas, a en. está continuamente dissipada. Para manter um tal sistema oscilando, é preciso injetar energia.

Por ex.: massa-mola com vibrador

RLC com fonte c.a



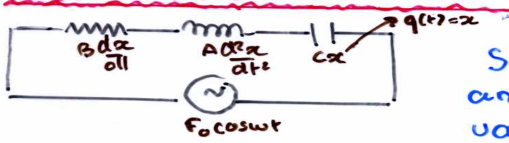
Estes sistemas são descritos por

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx = \underbrace{F_0 \cos\omega t}_{\text{fonte}}$$

ω é uma frequência que depende só da fonte e não do sistema (R, L ou C).

Uma característica dos sistemas com oscilações forçadas é o fenômeno de ressonância: para um certo valor de ω, a resposta do sistema é máxima. Olhamos isto no caso do circuito RLC com fonte de c.a.

Ressonância no circuito RLC com fonte de c.a.



Supomos que a fonte tem amplitude V e freq. ang. ω variável.

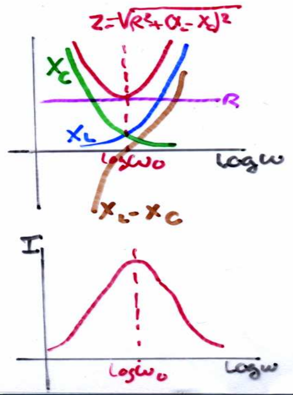
Sabemos que: $v = V\cos(\omega t + \varphi)$ (tensão da fonte e de RLC)

$i = I\cos\omega t$ (corrente no circuito)

$V = ZI$ com $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

$\varphi = \tan^{-1}\frac{L\omega - 1/C\omega}{R}$

Podemos desenhar em função de ω:



Z é mínimo quando $X_L = X_C$

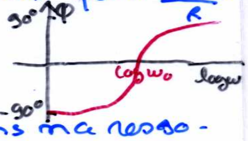
$\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0$

Assim I é máximo se $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0$ pois $I = V/Z$. O fenômeno no qual a amplitude I atinge seu máximo é chamado "ressonância".

Na ressonância: $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \Rightarrow Z = R$ e $I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R}$.

ϕ também varia em função de ω pois $\phi = \tan^{-1} \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$ de modo que na ressonância

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \Rightarrow \phi = 0°$$



É interessante estudar as voltagens na ressonância. $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \Leftrightarrow X_L = X_C \Leftrightarrow V_L = V_C$

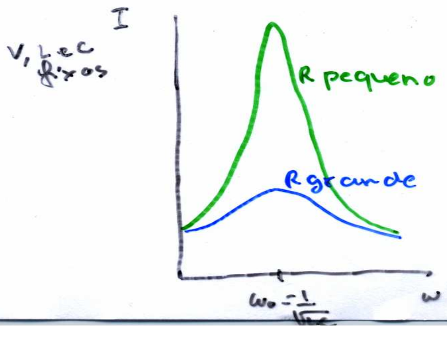
Como a fase entre L e C é 180° ($= +90° - (-90°)$) temos $v_L + v_C = 0$ e $v = v_R$ na ressonância. O circuito se comporta como se não tiver nem L nem C. Assim entendemos melhor porque $\phi = 0°$.

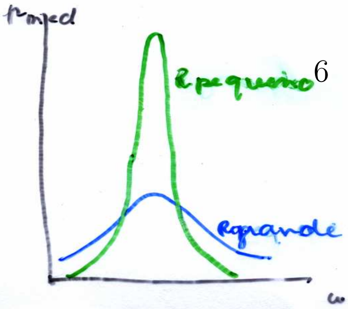
Também é interessante olhar a potência média fornecida pela fonte: $P_{med} = V_{qm} I_{qm} \cos\phi = \frac{V_{qm}^2}{Z} \frac{R}{Z}$

$$= \frac{V_{qm}^2 \, R}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

Vemos que P_{med} é máxima na ressonância e vale $\frac{V_{qm}^2}{R}$

exemplo de aplicação:
se podemos variar L ou C, podemos variar a frequência de oscilação. Isso fornece o método para "sintonizar" um receptor de rádio ou televisão para receber uma estação particular. Neste caso ω é fixo mas podemos obter $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ mudando L ou C. Assim obtemos o valor máximo de I.

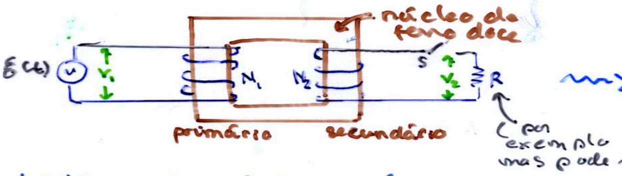




Um pico agudo (R pequeno) permite discriminar entre 2 estações com freq. adjacentes

Transformadores

Agora veremos que a corrente alternada permite elevar e abaixar o valor da tensão facilmente. Isto é útil para transmitir energia elétrica através de distância grande como usina-casa. Para a transmissão é desejável uma corrente pequena (para minimizar as perdas RI^2_{qm} mas como $P^{usina}_{med} = V_{qm} I_{qm} \cos\phi$ para P^{usina}_{med} (e R) fixo(s), precisamos V_{qm} grande. Por outro lado, numa casa, não queremos V_{qm} grande por razão de segurança. A conversão de uma dada voltagem para qualquer outra tensão é obtida por meio de um transformador.



símbolo

Obs 1: o objetivo do núcleo de ferro comum aos 2 enrolamentos é aumentar o fluxo magnético e o concentrar de modo que ele passe quase inteiramente de um enrolamento para outro.

Obs. 2: No que segue, supomos um transformador ideal i.e sem perdas de energia de potência (correntes de foucault, magnetização remanescente, efeito Joule, ..)

Primeiro supomos S aberta. Como $\mathcal{E}$ varia existe uma fem induzida no enrolamento primário $-N_1 \frac{d\Phi_m}{dt} = \mathcal{E}_1$ e uma fem induzida $-N_2 \frac{d\Phi_m}{dt} = \mathcal{E}_2$ no enrolamento secundário. Assim $\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1}$ $= \left(\frac{V_2}{V_1}\right.$. ($\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ em fase pois vem do mesmo $d\Phi_B/dt$)

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} V_2 = V_1 \dfrac{N_2}{N_1} \quad (\leftarrow \Phi_B \text{ mesmo fluxo por espira}) \\ \text{Se } N_2 > N_1 \Rightarrow V_2 > V_1 \quad \text{o transformador é elevador} \\ \text{Se } N_2 < N_1 \Rightarrow V_2 < V_1 \quad \text{" " " abaixador.} \end{array}}$$

(23)

Quando a chave S está fechada, a situação pode ser mais complicada de analisar* ~~(pois passa uma corrente induzida no secundário, daí outro fluxo magnético variável, a fonte tem que mudar a corrente no primário para manter $\mathcal{E}$, etc)~~. Mas em termo de potência é simples. No secundário, há dissipação de energia com uma taxa $V_{2qm} I_{2qm}$ (e $\cos\varphi = 1$) (o enrolamento secundário age como fonte). No primário, pode-se mostrar* que a fonte fornece energia com a taxa $V_{1qm} I_{1qm}$. Supondo o transformador ideal:

$$\underbrace{V_{2qm} I_{2qm}}_{\text{pot. dissipada por R}} = \underbrace{V_{1qm} I_{1qm}}_{\text{pot. fornecida pela fonte}} \quad \text{ou} \quad \boxed{V_2 I_2 = V_1 I_1}$$

Obs.: $I_1 = I_2 \frac{V_2}{V_1} = I_2 \frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{R} \frac{N_2}{N_1} = \frac{V_1}{R} \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = \frac{V_1}{R_{eq}}$ com $R_{eq} = R\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$

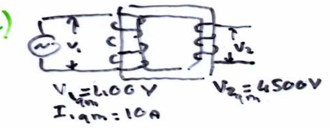
i.e. é como se a fonte fosse ligada a uma resistência R_{eq}.

Exemplo:

um gerador produz uma corrente quadrática média de 10A a 400V. A voltagem é elevada a 4500V por um transformador ideal e transmitida longa distância, através de uma linha de transmissão cuja resistência total é 30Ω

a) Percentagem da potência original perdida na linha de transmissão?

b) mesma pergunta se não houvesse elevação da voltagem.

a) 

A potência dissipada na linha de transmissão é $R I_{2qm}^2$ com $R = 30\Omega$ e $I_{2qm} = I_{1qm} \frac{V_{1qm}}{V_{2qm}} = 0,89A$, é 24W

A potência fornecida é $I_{1qm} V_{1qm} = 4000W$

daí a percentagem $\frac{24}{4000} = 0,6\%$

b) Neste caso a potência dissipada é $30 \times 10^2 = 3000W$ e a percentagem $\frac{3000}{4000} = 75\%$. isso ilustra a vantagem de usar linhas de transmissão em alta voltagem.

* a seguir

Explicação mais precisa (Tipler v.2 4ª ed. 1999!)

23'

Com S aberta: a corrente alt. i no circuito 1 está atrasada de 90° em relação a $\mathcal{E}$ (só tem L) e $\overline{P}_{fonte} = 0$ e não $V_{1am} I_{1qm}$!

Mas aparece duas fems induzidas $\mathcal{E}_1$ $\left(= -\mathcal{E}\right)$ e $\mathcal{E}_2$, em fase pois vem do mesmo $d\phi_m/dt$: $-\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{\mathcal{E}_2}{N_2} = \frac{\mathcal{E}_1}{N_1}$. Sejam V_1 e V_2 suas amplitudes: $V_2 = V_1 \frac{N_2}{N_1}$.

Com S fechada: uma corrente i_2 se estabelece no circuito 2. Ela induz seu próprio fluxo magn. (variável $N_2 \phi'_m$) no núcleo e uma fem em oposição no circuito 1.

Esta fem em oposição deve manter $\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{N_1}$ cste

$\Rightarrow$ aparece uma corrente adicional i_1 causando um fluxo no núcleo ... e ... cancelando $N_2 \phi'_m$ ...

$\Rightarrow \begin{cases} i_1 \text{ e } i_2 \text{ em oposição de fase} \\ i_2 \text{ em fase com } + \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1 \text{ e } -\mathcal{E} \end{cases}$

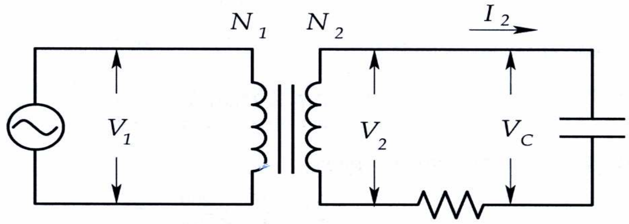
$\Rightarrow \begin{cases} i_1 \text{ em fase com } \mathcal{E} \Rightarrow \overline{P}_{fonte} = I_{1qm} V_{1qm}. \\ \text{No circuito 2, } \overline{P}_2 = I_{2qm} V_{2qm}. \text{ Supondo } \overline{P}_{fonte} = \overline{P}_2 \Rightarrow V_2 I_2 = V_1 I_1 \end{cases}$

Em geral: $I_1 \gg I$ e não se fala de i.

obs.: para ver como ter um dispositivo de impendância Z no lugar de R ver por ex. Reitz, Milford e Christy § 13.9.

Questão 3

O enrolamento primário de um transformador ideal é alimentado por um gerador de corrente alternada de tensão eficaz (também chamada quadrática média) $V_1 = 200$ V e freqüência angular $\omega = 500$ rd/s. O secundário é ligado a uma associação em série de um capacitor de 5μ F e um resistor de 300 Ω. A corrente eficaz no secundário é $I_2 = 0,1$ A.



(a) (1,0 ponto) Determine a impedância Z_2 (somente o módulo) da associação em série do capacitor e do resitor no secundário, e a tensão eficaz V_2 no secundário.

(b) (1,0 ponto) Determine a razão N_1/N_2 entre os números de espiras no primário e secundário, e a corrente eficaz no primário.

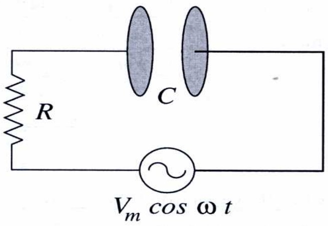
(c) (0,5 pontos) Determine a tensão eficaz V_C entre os terminais do capacitor.

10

2005

Questão 2

O circuito RC mostrado na figura abaixo está ligada a uma fonte de corrente alternada que fornece uma tensão $v(t) = V_m \cos \omega t$.



(a) (0,5 ponto) Qual é a impedância (em módulo) do circuito e o valor de pico da corrente que por ele circula?

(b) (1,0 ponto) Calcule a razão V_C/V_m entre os valores de pico das tensões no capacitor e na fonte. Se tomarmos a tensão de saída entre os terminais do capacitor, o circuito funciona como um filtro passa-baixas ou como um filtro passa-altas?

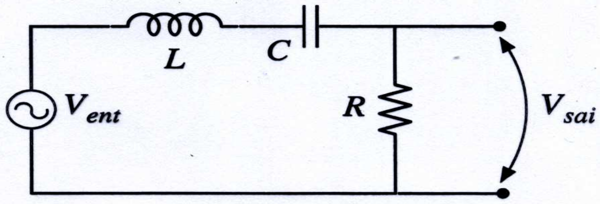
(c) (1,0 ponto) O capacitor da figura é formado por duas placas circulares de raio r no vácuo. Ignore o efeito de bordas. Seja $Q(t) = Q_m \mathrm{sen}(\omega t + \phi)$, onde Q_m é constante, a carga em uma das placas do capacitor. Calcule a corrente de deslocamento I_D entre as placas do capacitor. Dado: o campo elétrico entre as placas do capacitor $E = \sigma/\epsilon_0$, onde σ é a densidade superficial de carga na placa do capacitor.

11

P2/2008

Questão 2

Em um circuito RLC, a corrente $i = I\cos(\omega t)$ e a voltagem da fonte $v(t) = V_{ent}\cos(\omega t + \phi)$.



(a) (1,0 ponto) Calcule V_{sai}/V_{ent}, onde V_{sai} é a voltagem máxima no resistor, em função de R, L, C e ω.

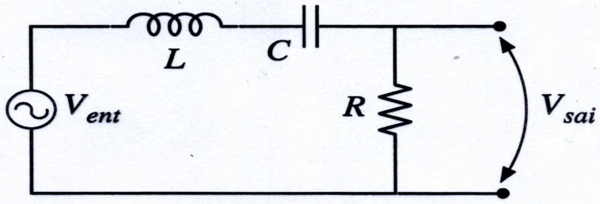
(b) (1,0 ponto) Calcule a frequência de ressonância. Esboce o diagrama V_{sai}/V_{ent} em função de ω, indicando a posição da frequência de ressonância.

(c) (0,5 ponto) Qual o valor de V_{sai}/V_{ent} quando o circuito está em uma situação de ressonância?

P2/2008

Questão 2

Em um circuito RLC, a corrente $i = I\cos(\omega\, t)$ e a voltagem da fonte $v(t) = V_{ent}\cos(\omega\, t + \phi)$.



(a) (1,0 ponto) Calcule V_{sai}/V_{ent}, onde V_{sai} é a voltagem máxima no resistor, em função de R, L, C e ω.

(b) (1,0 ponto) Calcule a frequência de ressonância. Esboce o diagrama V_{sai}/V_{ent} em função de ω, indicando a posição da frequência de ressonância.

(c) (0,5 ponto) Qual o valor de V_{sai}/V_{ent} quando o circuito está em uma situação de ressonância?