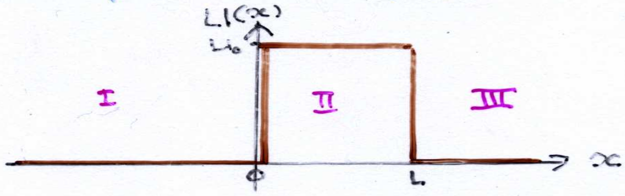
Barreira de potencial e efeito túnel (§42.5)

É o oposto de um poço:



Classicamente, se uma partícula vem da esquerda com $E > U_0$, ela é freada entre 0 e L e continua além de L com sua velocidade inicial. Se uma partícula vem da esquerda com $E < U_0$, ela é refletida. Ela não pode ir além de $x = L$ pois naquela região $E = K + U_0 < U_0 \Rightarrow K$ negativa.

Quanticamente, estudaremos o caso $E < U_0$. Veremos que ocorre um fenômeno novo.

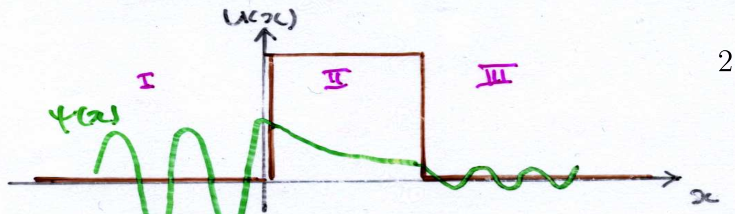
Nas regiões I e III: $\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi \equiv -k^2\psi$

$\Rightarrow \psi_I$ e ψ_{III} senoidais

Na região II: $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{-2m(E-U_0)}{\hbar^2}\psi = C^2\psi$

$\Rightarrow \psi_{II}$ exponencial

Sem cálculos mais elaborados, podemos desenhar:



Quanticamente, existe alguma probabilidade que a partícula passa do outro lado da barreira, além de L. Isto se chama tunelamento.

A probabilidade (relativa) que a partícula atravessa a barreira é chamada coeficiente de transmissão T.

Pode-se mostrar que se $T \ll 1$:

$$T = G\, e^{-2CL}$$

com

$$C = \sqrt{2m(U_0 - E)}\,/\,\hbar$$

$$G = 16 \frac{E}{U_0}\left(1 - \frac{E}{U_0}\right)$$

O coeficiente de reflexão é $R = 1 - T$.

Como esperado, se L for grande ou $U_0 - E$ grande (i.e. E pequena), T será pequena.

Exemplo: calcular a probabilidade de tunelamento para um elétron de energia 2,0 eV, incidendo sobre uma barreira de altura 5,0 eV e espessura 0,5 nm.

Temos $E = 2{,}0$ eV (energia cinética)

$U_0 = 5{,}0$ eV $\Rightarrow G = 3{,}8$

$L = 0{,}5$ nm

$$C = \frac{\sqrt{2 \times (9{,}11\ 10^{-31}\ \mathrm{kg}) \times (3 \times 1{,}6\ 10^{-19}\ \mathrm{J})}}{1{,}055\ 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}} = 8{,}9\ 10^{9}\ \mathrm{m^{-1}}$$

$$\Rightarrow T = 3{,}8\ e^{-2 \times 8{,}9\ 10^{9}\ \mathrm{m^{-1}} \times 0{,}5\ 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 5{,}2\ 10^{-4}$$

Existem muitos exemplos de tunelamento:

(i) decaimento α

Uma forma de desintegração radioativa é a emissão de um α (núcleo de hélio) por núcleos pesados instáveis.

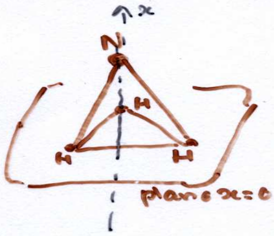
Para que o α possa escapar, ele tem que vencer uma barreira provocada pela combinação força nuclear atrativa - força coulombiana repulsiva.

Classicamente: o α não escapa.

Quanticamente: o α pode ser emitido de vez em quando em acordo com a observação.

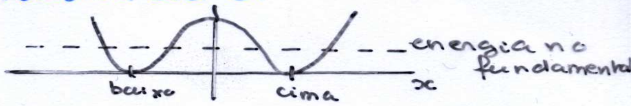
[Foi a 1ª aplicação da idéia de tunelamento.]

(ii) Inversão periódica da molécula de NH_3 (amônia)



N pode estar acima ou abaixo em relação ao plano.

O potencial para N como função da distância é:



Classicamente: N fica onde está

Quanticamente: N oscila entre cima e baixo

(Foi usado p/ fazer relógios.)

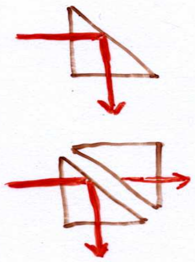
(iii)

diodo túnel: dispositivo semicondutor no qual elétrons tunelam através de uma barreira de potencial

junção Josephson: dispositivo onde há tunelamento de pares de elétrons entre 2 supercondutores

microscópio de varredura por tunelamento: entre ponta de prova e amostra, há uma corrente eletrônica de tunelamento.

O tunelamento também, é uma propriedade de onda em geral. Ocorre por exemplo para a luz.



Reflexão chamada de total da luz num bloco de vidro ($\theta_i \geq \theta_c = \mathrm{sen}^{-1}\frac{n_t}{n_i}$) isto é baseado no tratamento geométrico. Na realidade, devido à sua natureza ondulatória, se colocarmos outro prisma perto, a luz pode tunelar no ar e aparece luz transmitida (= "frustrated total internal reflection" → filmes por ex. em youtube, → aplicações como "multitouch display")

O oscilador harmônico (§42.6)

Olhamos o caso de uma partícula num campo de força associado à energia potencial $U(x) = \frac{1}{2}k'x^2$.

__Classicamente__ $F = -k'x = m\frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ com $\omega^2 = k'/m \Rightarrow x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$: a partícula oscila ao redor da posição de equilíbrio $x=0$ e sua trajetória é bem definida. Ela conserva sua energia $E = K + U$ (sendo $E = $ "$\frac{1}{2}m\omega^2A^2$" é só en. cinética em $x=0$ e $E = $ "$\frac{1}{2}k'A^2$" é só en. potencial em $x = \pm A$). Todos os valores de E são permitidos, em particular $E=0$ (= partícula em repouso em $x=0$).

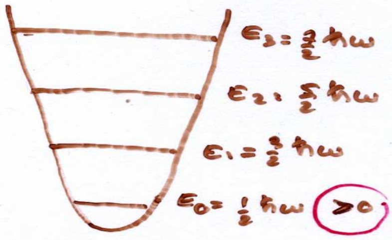
__Quanticamente__ temos que resolver:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\left[\frac{2m}{\hbar^2}E - \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2\right]\psi .$$

Este problema pode ser resolvido analiticamente.

As energias são quantizadas (claro):

$$\boxed{E_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega \quad \text{com} \quad n = 0, 1, \dots \quad \omega = \sqrt{k'/m}}$$



As funções de onda são do tipo:

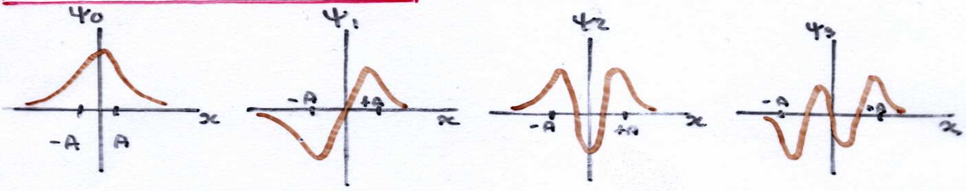
$$\psi_n(x) = P_n(x)\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

↑ polinômio

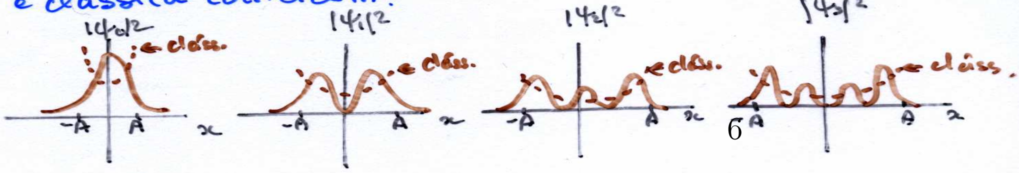
(i) Cada ψ_n tem seu A (amp. clássica) obtida resolvendo:

$$E = \frac{1}{2} k' A^2 = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

(ii) Cada ψ_n penetra em $|x| > A$ o que é proibido classicamente.



Para n grande, as distribuições de probabilidade quântica e clássica coincidem:



Vários problemas podem ser aproximados com um oscilador (ex. vibração de uma molécula diatômica)

Exemplo:

Um átomo de sódio de massa $3{,}82\ 10^{-26}$ kg vibra com movimento harmônico simples no cristal. A energia potencial cresce de $0{,}0075$ eV quando o átomo é deslocado de $0{,}014$ nm a partir de sua posição de equilíbrio.

a) Calcule a frequência angular da mecânica clássica

b) Determine o espaçamento entre níveis de energia consecutivos

c) Se um átomo emite um fóton durante a transição de um estado vibracional ao seguinte mais baixo, qual é o comprimento de onda deste fóton.

a) $U = \frac{1}{2} k' x^2 \Rightarrow k' = \frac{2U}{x^2} = \frac{2 \times 1{,}2\ 10^{-21}\ \mathrm{J}}{(0{,}014\ 10^{-9}\ \mathrm{m})^2} = 12{,}2\ \mathrm{N/m}$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{k'/m} = \sqrt{12{,}2/(3{,}82\ 10^{-26})} = 1{,}79\ 10^{13}\ \mathrm{rad/s}$

b) $E_{n+1} - E_n = \hbar\omega = 1{,}054\ 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} \times 1{,}79\ 10^{13}\ \mathrm{rad/s} = 1{,}88\ 10^{-21}\ \mathrm{J}$

$= 0{,}0118\ \mathrm{eV}$

c) A energia do fóton é $0{,}0118$ eV mas isto vale hc/λ

daí $\lambda = \frac{4{,}136\ 10^{-15}\ \mathrm{eV\,s} \times 3{,}0\ 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{0{,}0118\ \mathrm{eV}} = 105\ \mu\mathrm{m}.$

P3

Física IV

Escola Politécnica - 2006

FAP 2204 - GABARITO DA P3

5 de dezembro de 2006

Questão 1

Uma partícula de massa m executa oscilações harmônicas, em uma dimensão, num potencial $U(x) = m\omega^2 x^2/2$.

(a) (0.5 ponto) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para a partícula.

(b) (1,0 ponto) Considere a função de onda $\psi(x) = Ae^{-bx^2}$, onde A e b são constantes. Determine o valor de b para que ψ seja solução da equação do item (a). Qual é o valor da energia associada a esta função de onda?

(c) (1,0 ponto) Calcule a constante de normalização A. Dado: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\pi/\alpha}$

Questão 3

Uma partícula de massa m executa oscilações harmônicas ao longo do eixo x num potencial $m\omega^2 x^2/2$, onde ω é uma constante.

(a) (0,5 ponto) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para a partícula.

(b) (1,0 ponto) Considere a função de onda $\psi(x) = Ae^{-bx^2}$, onde A e b são constantes. Determine o valor de b para que ψ seja solução da equação do item (a). Qual é o valor da energia associada a esta função de onda?

(c) (1,0 ponto) Calcule a constante de normalização A.

Dado: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\pi/\alpha}$