

A natureza ondulatória das partículas (Cap. 41)

A natureza da luz

Nos vimos que a luz pode ter aspectos ondulatórios (interferência por fenda dupla estreita, difração por fenda simples, etc) e corpúsculares na emissão ou absorção de fótons (corpo negro, efeito fotoelétrico, efeito Compton, espectros de linhas).

Dependendo do tipo de observação, um comportamento ou outro se manifesta.
E as partículas como os elétrons?

A sugestão de de Broglie

Louis de Broglie (príncipe) era de uma família nobre francesa (um ancestral foi guilhotinado). Ele primeiro estudou história mas influenciado por um irmão dele experimentalista, passou a estudar física. Na sua tese de doutorado defendida em 1924 em Paris, ele sugeriu que, já que a luz tem aspectos ondulatórios e corpúsculares, a matéria, e.g. os elétrons, podiam também ter aspectos ondulatórios.

A banca não sabia o que fazer com esta dissertação. Langevin pediu uma cópia e mandou para Einstein, o qual se entusiasma. A banca aprovou de Broglie, felizmente.

Em 1927, foram vistas estas ondas de matéria (cf. próxima sessão).

Em 1929, de Broglie ganhou o Nobel.


Nos vimos para os fótons:

$$f = E/h$$
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E} = \frac{h}{p}$$

O mesmo é suposto para partículas

$\lambda = \frac{h}{p}$	comprimento de onda	de de Broglie
$f = \frac{E}{h}$	frequência da onda	

N.B. para um fóton $\lambda f = \frac{h}{p} \frac{E}{h} = \frac{h}{p} \frac{pc}{h} = c$

para uma partícula $\lambda f = \frac{h}{p} \frac{E}{h} \neq c$ ou v 

(por ex. para uma partícula relativística, $E = \gamma mc^2$
e $p = \gamma mv \Rightarrow \lambda f = \frac{c^2}{v}$)

Esta sugestão que partículas podem ter comportamento ondulatório permite esclarecer o 3º postulado de Bohr: para o hidrogênio, $L = mvr$ é quantizado, valendo $n\hbar$ com $n=1, 2, \dots$

Lembramos que quando uma corda de guitarra for dedilhada, a onda progressiva se propaga sobre a corda e se reflete, podendo formar uma onda estacionária com nós nas extremidades. Por exemplo

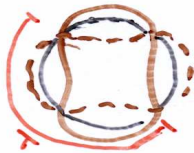


→ precisa ter uma certa relação entre λ e l .

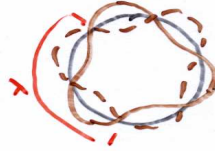
O mesmo raciocínio pode ser aplicado as ondas de matéria do elétron que descreve um círculo em torno do próton-núcleo:



$$2\pi r = \lambda$$



$$2\pi r = 2\lambda$$



$$2\pi r = 3\lambda$$

etc

De modo geral: $2\pi r = n\lambda$ com $n=1, 2, \dots$
 Para uma partícula não relativística (o caso de um elétron numa órbita de Bohr)
 $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \Rightarrow n\lambda = n \frac{h}{mv} = 2\pi r \Leftrightarrow mvr = h = n\hbar$

Assim a noção de onda de matéria com $\lambda = \frac{h}{p}$ implica que $L = mvr = n\hbar$ (3º postulado de Bohr). É claro que isto é satisfatório mas não é uma demonstração da existência das ondas de matéria. Existem mesmo?

Verificação da sugestão de de Broglie

Se os elétrons tem propriedades ondulatórias, eles devem exibir interferência e difração. Em 1927, Davison e Germer, e independentemente G.P. Thomson, mostraram que isto era o caso.

A experiência de Davison e Germer lembra a difração de Bragg de raios X por um cristal: Em certas direções, vê-se máximas.



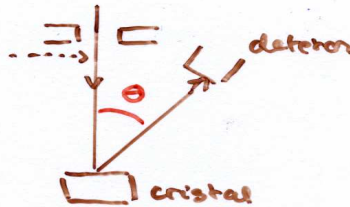
fórmula de Bragg (p/cs máximos)

$$2d \sin \theta = m\lambda$$

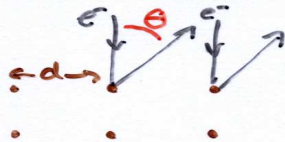
com $m=1, 2, \dots$

A experiência de Davisson e Germer é assim:

elétrons no vácuo acelerados por uma d.d.p. V



O cristal se comporta como uma grade de difração de reflexão para os elétrons incidentes



A condição para os máximos é:
 $d \sin \theta = m \lambda$
 com $m = 1, 2, \dots$

Supondo que a velocidade inicial dos elétrons é nula, a variação de energia cinética é $\Delta K = p^2 / (2m)$. Isto é igual ao trabalho eV para acelerar os elétrons.

$$eV = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2m eV} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m eV}}$$

de Broglie

Na sua experiência, Davisson e Germer tinham $d = 0,215 \text{ nm}$ e observaram um máximo em $\theta = 50^\circ$ para $V = 54 \text{ V}$.

Supondo $m = 1$,
 Por outro lado:

$$\lambda = 0,215 \cdot 10^{-9} \cdot \sin 50^\circ = 1,65 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\frac{h}{\sqrt{2m eV}} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \times 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \times 1,62 \cdot 10^{-18} \text{ J}}}$$

$$= 1,67 \cdot 10^{-10} \text{ m} = \lambda$$

Assim Davisson e Germer mostraram que havia difração do feixe de elétrons e que o comprimento de onda observado era o previsto por de Broglie.

Obs. 1: pode-se também fazer uma experiência de Young (fenda dupla) e observar interferência.

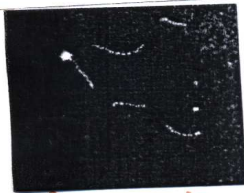


foto de uma figura de interferência de elétrons num dupla fenda.

Obs. 2: hoje em dia, experiências compararam o comportamento ondulatório de vários outros tipos de partículas: alphas, nêutrons, ...

Obs. 3: na vida de cada dia, $\lambda = h/p$ é muito pequeno de modo que não vemos estes aspectos ondulatórios.

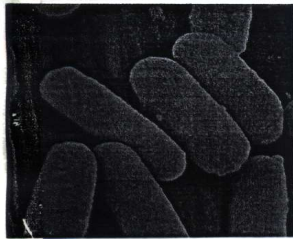
Obs. 4: um aparelho que opera com base nas características ondulatórias do elétron é o MICROSCÓPIO ELETRÓNICO.



Átomos de Thorium

Detalhes com tamanho $\sim \lambda$ podem ser vistos (cf $\sin \theta = 1,22 \lambda / D$).

λ pode ser diminuído aumentando a ddpV
 \Rightarrow microscópios ELETRÓNICOS permitem um aumento maior dos que os óticos.



Bactérias na ponta de uma alfinete (x2500)



Áscaros (x200)

O princípio da incerteza.

Se você for medir a velocidade de uma partícula num certo instante, sempre terá que enfrentar incertezas experimentais das medidas.

Classicamente, não há barreira para o aperfeiçoamento do aparelho de medida e é possível fazer as medidas com incertezas arbitrariamente pequenas.

Quanticamente, isto não será possível.

Precisamente, em 1927, Heisenberg introduziu o princípio seguinte:

Se uma medida da posição for feita com precisão Δx , e se uma medida **SIMULTÂNEA** do momento for feita com precisão Δp , então

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

i.e. fisicamente é impossível de medir simultaneamente a posição exata ($\Delta x = 0$) de uma partícula e seu momento exato ($\Delta p = 0$).

Isto não vem da imperfeição dos instrumentos mas da própria estrutura quântica da matéria (recuo imprevisível de um elétron atingido por um fóton, difração da luz ou dos elétrons ao passar por uma pequena abertura, etc).

Podemos entender isto melhor com a seguinte experiência imaginária de Heisenberg.

Queremos medir a posição e o momento de um elétron. Para isto, usamos um poderoso microscópio no visível. Pelo menos um fóton tem que atingir o elétron, passar pelo microscópio e atingir nosso olho, para que possamos ver o elétron.

Quando o fóton atinge o elétron, ele transfere parte de sua energia e momento. Assim o elétron adquire momento e recua (efeito Compton). Então, no processo de localizar a posição com muita precisão, temos provocado uma grande incerteza no momento.



$$\theta_m \approx \frac{\Delta x}{L} \approx \frac{\Delta x}{\lambda}$$

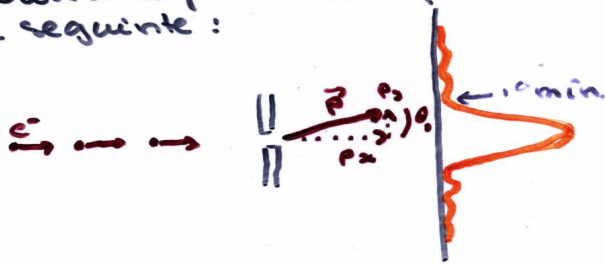
Nesta experiência, supondo que a luz tem comprimento de onda λ , a incerteza sobre a posição do elétron é devida ao fato que não vemos um ponto mas uma figura de difração. Espera-se então $\Delta x \sim \lambda$.

O fóton tem momento h/λ e pode ser espelhado em qualquer direção (mas para entrar no microscópio, tem que ser naquela direção). O fóton transfere parte ou todo seu momento ao elétron de modo que a incerteza sobre o momento do elétron é $\Delta p_x \sim h/\lambda$.

* Rayleigh

Assim: $\Delta x \Delta p_x \sim h$, no mínimo. Mais geralmente $\Delta x \Delta p_x \geq h$, o que é o resultado anunciado (a menos de um $1/2\pi$ introduzido pela análise mais exata de Heisenberg).

Outra experiência que ilustra este ponto é a seguinte:



Para atingir o 1.º mínimo, um elétron tem que ter adquirido um p_y tal que $p_y/p_x = \tan \theta_1 \sim \theta_1$. Como $\theta_1 \sim \lambda/a$ temos:

$$p_y = p_x \lambda/a$$

Para os 85% dos elétrons que atingem o máximo central, p_y varia de $-p_x \lambda/a$ a $+p_x \lambda/a$, i.e. $\Delta p_y \sim p_x \lambda/a$. Para os que chegam fora do máximo central:

$$\Delta p_y \geq p_x \lambda/a.$$

Por outro lado, $\tau = h/p_x$, daí:

$$\Delta p_y \geq h. \quad (\text{que podemos usar p/\"redosasc\"})$$

Como não sabemos exatamente por onde um elétron passou na fenda: $\Delta y \sim a$.

Assim:

$$\Delta y \Delta p_y \geq h.$$

O princípio da incerteza vale para: $\Delta x \Delta p_x$, $\Delta y \Delta p_y$, $\Delta z \Delta p_z$.
 Não existe nenhuma relação direta entre Δx e Δp_y etc.
 Temos também

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

Interpretação: se um sistema permanece muito tempo num estado, $\Delta t \rightarrow \infty$, a energia é bem determinada $\Delta E \rightarrow 0$. Se um sistema permanece Δt num estado, a energia é conhecida com precisão ΔE .
 Podemos ver que isto é o caso por ex.

para uma partícula livre, ao longo de Ox , e que queremos observar.

$$E = p_x^2 / (2m) \Rightarrow \Delta E = p_x \Delta p_x / m = v_x \Delta p_x$$

Se observarmos por um tempo Δt , temos: $\Delta x = v_x \Delta t$ como incerteza na posição da partícula.

$$\text{Daí } \Delta E \Delta t = v_x \Delta p_x \times \Delta x / v_x = \Delta p_x \Delta x \geq \hbar$$

Exemplo: localização de um elétron.
 Mede-se a velocidade de um elétron, $5,00 \cdot 10^3$ m/s com precisão de 0,003%.
 Achar a incerteza na determinação da posição deste elétron.

$$\Delta x \geq \hbar / \Delta p$$

com

$$\Delta p = 0,003\% \times p \text{ e } p = m v = (9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) \times (5,00 \cdot 10^3 \text{ m/s}) = 4,56 \cdot 10^{-27} \text{ kg m/s}$$

$$\Rightarrow \Delta p = 1,37 \cdot 10^{-31} \text{ kg m/s}$$

$$\Delta x \geq \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2\pi (1,37 \cdot 10^{-31} \text{ kg m/s})} = 0,770 \text{ nm}$$

Exemplo 2: largura das raíais espectrais
Embora um átomo excitado possa irradiar em qualquer instante entre 0 e ∞ , o tempo médio que decorre depois da excitação e durante o qual um grupo de átomos irradia é a vida média τ .

Se $\tau = 10^{-8}$ s, calcule a largura Δf da raia provocada por esta vida média finita.

Temos $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ onde $\Delta E = h \Delta f$ e $\Delta t = 10^{-8}$ s, daí $\Delta f = \hbar / (h \Delta t) = 1 / (2\pi \cdot 10^{-8} \text{ s}) = 1,6 \cdot 10^7 \text{ Hz}$.

(ΔE é a incerteza na energia do estado excitado e na energia do fóton emitido por um átomo neste estado.)

Exemplo 3:

Vida média de uma partícula:

A partícula instável W^+ possui energia de repouso de 80,41 GeV e a incerteza sobre esta energia é 2,06 GeV. Estime o tempo de vida médio do W^+ .

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{4,136 \cdot 10^{-15}}{2,06 \cdot 10^6 \cdot 2\pi} \sim 0,3 \cdot 10^{-21} \text{ s}$$

P3

Física IV

Escola Politécnica - 2007
FGE 2203 - GABARITO DA P3
4 de dezembro de 2007

Questão 1

Considere o modelo de Bohr do átomo de hidrogênio em que um elétron de massa m e carga $-e$ se move numa órbita circular de raio r em torno de um núcleo fixo de carga $+e$.

1. (0,5 pontos) Partindo da segunda lei de Newton determine o módulo da velocidade do elétron v em função do raio da órbita r .
2. (1,0 ponto) Determine o comprimento de onda de de Broglie do elétron λ em função do raio da órbita r . Sabendo-se que uma órbita estacionária deve acomodar um número inteiro n de comprimentos de onda ao longo de sua circunferência, determine os raios das órbitas permitidas r_n .
3. (1,0 ponto) Determine a energia do elétron na órbita de raio r_n .

Questão 2

Na experiência de Rutherford, a estrutura interna do átomo foi estudada por meio do espalhamento de partículas α . De modo análogo, é possível estudar a estrutura interna do núcleo por meio do espalhamento de elétrons. Supondo que o núcleo tenha dimensão da ordem $D = 1 \times 10^{-15}$ m, o objetivo é estimar o momento p mínimo que o elétron deve ter para esta experiência.

- (a) (1,0 ponto) Supondo que a posição do elétron deve ser determinada com incerteza menor do que D , utilize o princípio de incerteza de Heisenberg para obter uma estimativa do momento linear p do elétron.
- (b) (0,5 ponto) Segundo a física newtoniana, qual seria a velocidade desse elétron? Como essa velocidade se compara com a velocidade da luz?
- (c) (1,0 ponto) Nessas condições, a energia de repouso do elétron pode ser desprezada, e a energia do elétron é dada pela mesma expressão válida para o fóton. Qual é a energia desse elétron em joules?

Dados: $\hbar \approx 1 \times 10^{-34}$ J.s, massa do elétron $m_0 \approx 9 \times 10^{-31}$ kg e $c \approx 3 \times 10^8$ m/s.

Observação: trabalhe com 1 algarismo significativo. Assim, $3,5 \approx 4$; $0,732 \approx 7 \times 10^{-1}$; $342 \approx 3 \times 10^2$; etc. Efetue as contas até o final, não deixe as contas apenas indicadas.

Questão 2

Uma partícula de massa m move-se em uma órbita *circular* sujeita a uma força central elástica *atrativa* de módulo $F = Kr$, onde $K > 0$ é a constante de mola e r é a distância ao centro.

- (a) (1,0 ponto) Usando a segunda lei de Newton, expresse o módulo da velocidade v em função de r , K e m . Use este resultado e a condição de quantização do momento angular de Bohr ($L = n\hbar$) para calcular os raios das órbitas estáveis em função de n , \hbar , m e K .

- (b) (0,5 ponto) A energia total da partícula é dada por

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kr^2.$$

Expresse a energia E em função de K e r apenas. Use os raios calculados no item (a) para obter as energias do sistema nas órbitas estáveis.

- (c) (0,5 ponto) Determine a frequência da radiação emitida numa transição entre estados vizinhos ($n + 1 \rightarrow n$) em função de m e K .

- (d) (0,5 ponto) Calcule o comprimento de onda de de Broglie associado à partícula em um estado de energia correspondente ao número quântico $n = 2$ em função de \hbar , m e K .