A rede de difração

= fendas múltiplas
com
número grande de fendas paralelas de mesma largura e igualmente espaçadas.

(Às vezes, no lugar de fenda, fala-se em ranhura ou linha)

Já sabemos que os máximos são dados por
$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$ com $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

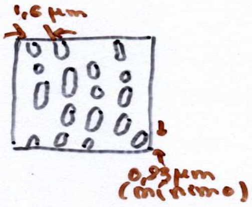
Como o número de fendas N é muito grande, a figura de interferência é uma série de picos estreitos.

Para ter um desvio θ substancial, precisa que d e λ sejam da mesma ordem. Muitas vezes, é dado o número de fendas por mm:

N fendas $\longrightarrow$ 1mm
1 fenda $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{N}\,\text{mm} = d}$ espaçamento

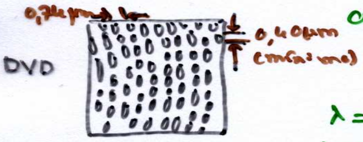
Numa rede de transmissão, a luz se propaga através das fendas. Existe também rede de reflexão, com sulcos no lugar de fendas. A condição para máximos é a mesma para ambos casos: $d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$ com $m = 0, \pm 1 \ldots$
(desde que a luz incide perpendicularmente)

Exemplo: CD e DVD (Ref "How things work" Bloomfield)



CD

Existe uma espiral com buracos e saliencias que contem as informações. O espaçamento entre arcos sucessivos da espiral pode ser calculado usando um apontador laser. Pode-se usar um CD transparente (rede de transmissão) ou normal (rede de reflexão).



DVD

Usando-se um apontador com $\lambda = 650nm$, para uma distância CD transparente - parede de $L \sim 0.5m$, observei uma distância $\sim 20cm$ entre os máximos sobre a parede $\Rightarrow$ $\operatorname{sen}\theta = m\frac{\lambda}{d} = y_m/L$

$$(m+1)\frac{\lambda}{d} = y_{m+1}/L \Rightarrow \left(\frac{y_{m+1}-y_m}{L}\right)^{-1}\lambda = d \sim 1,6\,\mu m$$

(como esperado)

Se luz branca incide sobre uma rede de defração, ela é "decomposta" pois $\operatorname{sen}\theta = m\frac{\lambda}{d}$ vai depender de λ (exceto para $\theta = 0 \Leftrightarrow m = 0$ onde haverá uma mancha branca). É por isto que observamos as cores do arco-íris quando luz branca incide sobre um CD.

Obs.: os discos "blu-ray" são lidos por laser azul ($\lambda = 405nm$) e não vermelho ($\lambda = 650nm$), o que permite ler detalhes menores (e armazenar mais).

Exemplo:

Os comprimentos de onda do visível vão aproximadamente de 400nm (violeta) a 700nm (vermelho). Calcule a largura angular do espectro visível de 1ª ordem produzido por uma rede com 600 fendas por milímetro (incidência perpendicular).

O espectro da 1ª ordem corresponde a m=1. Daí os desvios angulares satisfazem

$$\text{sen}\,\Theta = \frac{\lambda}{d}$$

com $d = \frac{1}{600 \text{ fendas/mm}} = 1{,}67\ 10^{-6}\,\text{m}$

Para $\lambda = 400$nm temos $\Theta = 13{,}9°$ (violeta)
700 nm $24{,}8°$ (vermelho)

daí
a largura angular $24{,}8° - 13{,}9° = 10{,}9°$.

Mostre que a extremidade violeta do espectro da 3ª ordem se superpõe com a extremidade vermelha do espectro de 2ª ordem.

Para o violeta e m=3, $\text{sen}\,\Theta = \frac{3 \times 400\, 10^{-9}}{1{,}67\ 10^{-6}} = \frac{1{,}20\, 10^{-6}}{d}$

Para o vermelho e m=2, $\text{sen}\,\Theta' = \frac{2 \times 700\, 10^{-9}}{1{,}67\ 10^{-6}} = \frac{1{,}40\, 10^{-6}}{d} \Rightarrow \Theta' > \Theta$

i.e. tem superposição.

4

UMA APLICAÇÃO PRÁTICA IMPORTANTE: O ESPECTRÔMETRO DE REDE

A luz emitida por uma fonte incide sobre uma rede de difração de espaçamento conhecido. Os ângulos de desvio são medidos e o comprimento de onda é obtido com $d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$ (figura embaixo).

Por ex. a fonte pode ser um gás num tubo, excitado pelo bombardeio por elétrons acelerados por uma alta tensão.

Os comprimentos de onda da luz emitida por um gás constituem uma assinatura dos átomos e moléculas que o formam.

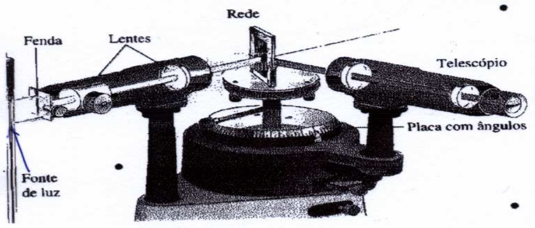
Estes comprimentos de onda podem ser medidos (no visível) com um espectrômetro de rede. Isto permitiu grandes avanços na física moderna como veremos. Também possibilita a determinação da composição química de um gás (por exemplo, na astronomia, nuvem de gás ou estrela distante).

Na espectroscopia, é importante separar 2 comprimentos de onda ligeiramente diferentes. (Por exemplo, para identificar o sódio, precisa-se separar 2 linhas amarelas vizinhas: $\lambda_1 = 589{,}00$ nm e $\lambda_2 = 589{,}59$ nm).

Chama-se poder de resolução cromático a quantidade:

$$\boxed{R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}}$$

$\Delta\lambda$ menor diferença de comprimento de onda que pode ser distinguido



(As lentes servem p/ obter um feixe de raios paralelos. O feixe difratado é observado com o telescópio)

O poder de separação pode ser re-escrito também

$R = Nm$ cl N nº de fendas
m ordem do máximo considerado

[Demonstração:

Dois comprimentos de onda diferentes fornecem máximos de difração para dois ângulos ligeiramente diferentes. Supomos que é possível separar dois picos quando o máximo de um comprimento de onda coincide com o primeiro mínimo do outro:

A diferença de caminho entre fendas adjacentes, que leva à um máximo é:

$$\delta = d \sin\theta = m\lambda$$

$\Rightarrow$ se dois comprimentos de onda diferem de $d\lambda$, os δ que levam à máximos diferem de:

(*) $d\delta = m\, d\lambda$ ($\leftarrow$ mudando λ)

Por outro lado, para λ fixo, a diferença de caminho entre raios que levam a um pico e raios que levam ao 1º mínimo é:

(**) $d\delta = \dfrac{d\phi}{k} = \dfrac{\lambda}{2\pi} \dfrac{2\pi}{N}$ (cf. aula anterior /P2010)

$= \dfrac{\lambda}{N}$ ($\leftarrow$ passando do pico ao 1º mín)

Agora igualando (*) e (**) (critério de Rayleigh)

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = mN.$$

Vemos que a possibilidade de separar 2 comprimentos de onda depende da ordem onde olhamos.]

Exemplo: 124

Qual é o menor número de fendas necessário para que uma rede de difração possa resolver o dupleto de sódio na 1ª ordem? na 4ª ordem?

O poder de resolução deve ser:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589{,}30}{0{,}59} = 999 \sim 1000$$

Usando $R = Nm$, para ter $R \sim 1000$ com $m=1$, precisa $N = 1000$ fendas e para $m=4$, 250 fendas.

(os ângulos θ dependem de λ e $m \Rightarrow R$ também)

Difração de raios X

Permite medir comprimentos de onda na faixa do $\AA$ $(= 10^{-10}\,m)$ e estudar a estrutura de cristais..

Vimos que o comprimento de onda na faixa do visível pode ser medido por uma rede de difração. Para isto, o espaçamento d entre fendas ou sulcos precisa ser adequado. A condição para interferência construtiva é: $d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$.

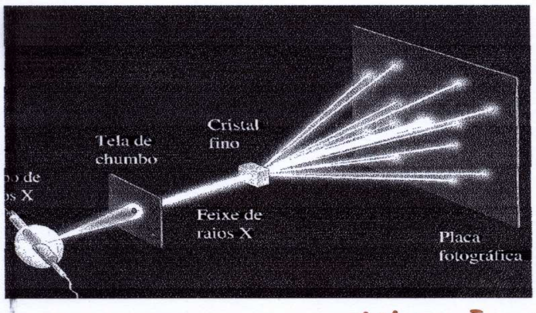
isto implica: $\lambda > d$ não é bom pois $\operatorname{sen}\theta$ seria >1.

$\lambda \ll d$ não é bom pois $\operatorname{sen}\theta \ll 1$ e os ângulos não são difíceis de distinguir entre si

$d \sim$ alguns λ é bom.

Os raios X descobertos por Roentgen em 1895 são ondas eletromagnéticas com $\lambda \sim$ alguns $\AA$. Não se pode construir mecanicamente redes com este espaçamento.

Por outro lado, existem redes naturais com este espaçamento: num sólido, o espaçamento entre átomos é $\sim \AA$. De modo que Max von Laue sugeriu em 1913, usar a rede regular dos átomos nos cristais como uma rede de difração. Experiências posteriores confirmaram esta previsão.



Montagem para difração de raios X por um cristal

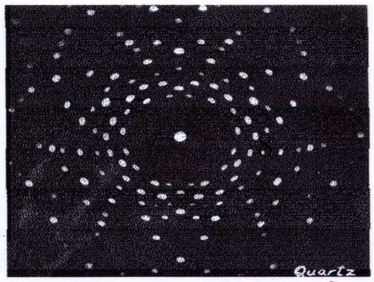


figura de difração (de Laue) 3D ⇒ complicada

Uma vez em posse de figuras de difração obtidas em várias posições, pode-se reconstruir a estrutura de um cristal.

O prêmio Nobel de química 2009 foi atribuído a Ramakrishnan, Steitz & Yonath.

Usando difração de raios X, mapearam a posição das $\sim 10^5$ atomos de ribosomo e ajudaram a entender como antibióticos grudam neles.

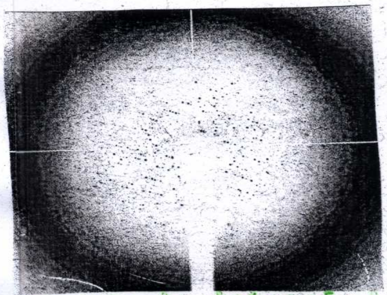
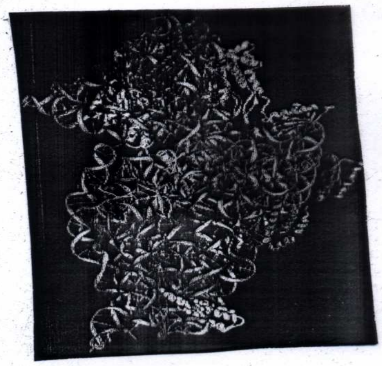
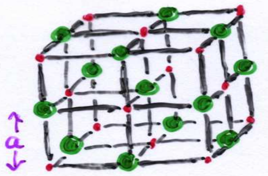


figura de difração do cristal de ribosomo



estrutura

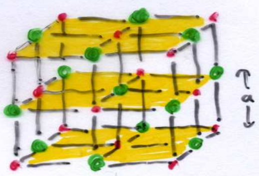
Para entender melhor este fenômeno, usamos o exemplo do cristal de NaCl.

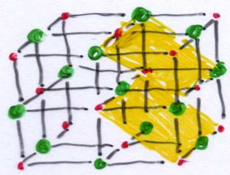


modelo da estrutura cristalina do cloreto de sódio (Cl^- ● Na^+ •)

Quando os raios X penetram num cristal, eles são espalhados (= re-direcionados) em todas as direções, pela estrutura cristalina. Em certas direções, os raios espalhados tem interferência destrutiva e em outras construtivas.

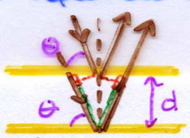
Apesar do processo de difração de raios X por um cristal ser complicado, pode-se calcular a posição dos máximos supondo que os raios são refletidos por planos paralelos. Por exemplo:





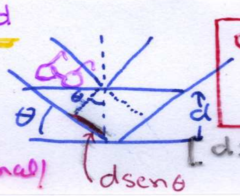
A esquerda a distância entre os planos é $d=a$.
A direita: $d = a/\sqrt{2}$
pois

A reflexão entre 2 planos paralelos é assim:



A diferença de percurso é $2d\,\text{sen}\,\theta$.

CUIDADO: θ = ângulo raio-plano (não raio-normal)



Os máximos ocorrem quando
$2d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda$ com $m = 1, 2, 3 \ldots$ — LEI DE BRAGG

[$d>0 \Rightarrow m$ inteiro >0]

Exemplo:

Um feixe de raios X com $\lambda = 0{,}154\,nm$ incide sobre certos planos de um cristal de silício. À medida que se aumenta o ângulo de incidência a partir de 0° (= rasante), encontra-se o primeiro máximo de interferência quando o feixe incide a 34,5°.

a) qual é distância entre os planos paralelos adjacentes que atuam como planos refletores?

b) É possível encontrar outros máximos para estes planos em ângulos maiores?

a) $2d \operatorname{sen}\theta = \lambda \Rightarrow d = \dfrac{0{,}154\,nm}{2 \operatorname{sen} 34{,}5^\circ} = 0{,}136\,nm \qquad (m=1)$

b) Não pois:

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{m\lambda}{2d} = m \times \dfrac{0{,}154\,mm}{2 \times 0{,}136\,mm} = m \times 0{,}566 > 1$ se $m > 1$

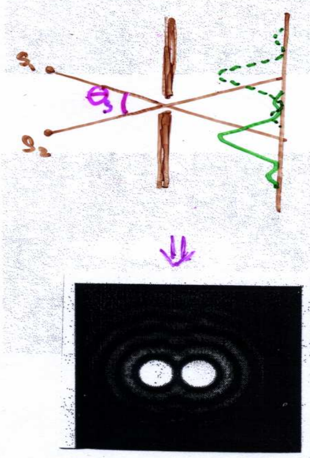
Limite de resolução de fendas simples e de aberturas circulares

A capacidade de sistemas óticos como microscópios e telescópios, distinguirem objetos próximos é limitada pela natureza ondulatória da luz.

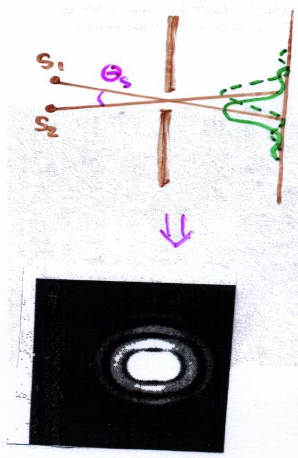
(12B)

Olhamos 2 fontes (puntiformes) não coerentes cuja luz passa por uma fenda. Cada fonte produz uma figura de difração.

notar a def. de θ_S!



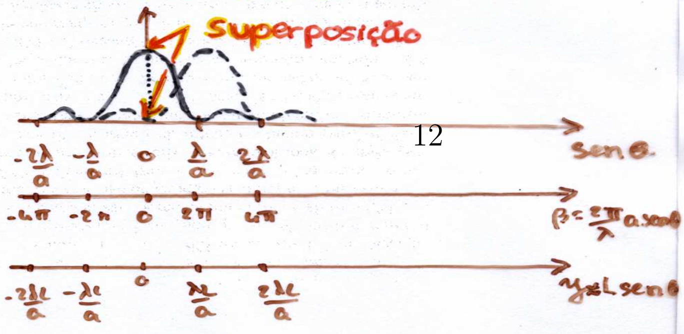
S_1 e S_2 são distintas



S_1 e S_2 formam uma fonte

Como critério para decidir quando 2 imagens estão resolvidas (~distintas) pode-se usar o critério de Rayleigh: o máximo central de uma imagem se superpõe ao 1º mínimo da outra.

Para a fenda rectangular:



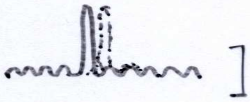
Sabemos que o ângulo θ entre o máximo central e o 1º mínimo da figura de difração da fenda retangular é: $\theta \sim \text{sen}\,\theta = \frac{\lambda}{a}$.
Se o critério de Rayleigh for satisfeito, este θ vale θ_R.
assim:

o ângulo $\underbrace{\text{limite}}$ {mínimo p/ distinguir 2 imagens} de resolução de uma fenda de largura a é: $\theta_m = \frac{\lambda}{a}$ (rad)

e para um orifício de diâmetro D:
$\theta_m = 1{,}22 \frac{\lambda}{D}$ (rad)
↑ devido à geometria

(Resolução grande significa θ_m pequeno.)

[Obs.: para a rede de difração definimos o poder de resolução cromático como $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ (com $\Delta\lambda$ menor diferença de comprimento de onda que pode ser distinguido pela rede) e usando o critério de Rayleigh mostramos $R = Nm$. Tínhamos:


]

Exemplo:
Para observar um objeto em um microscópio, usa-se uma lâmpada de sódio com $\lambda = 589$ nm. Se a abertura do objetivo tiver $D = 0{,}9$ cm a) ache o ângulo limite de resolução b) com luz visível, qual é o limite máximo de resolução c) mesma pergunta que a) mas na água.

a) $\theta_m = 1{,}22 \dfrac{589\,10^{-9}}{0{,}9\,10^{-2}} = 7{,}98\,10^{-5}$ rad

b) Resolução máxima $\Leftrightarrow$ θ_m mínimo $\Rightarrow$ usar $\lambda = 400$ nm
$\theta_m = 1.22 \dfrac{400\,10^{-9}}{0.9\,10^{-2}} = 5{,}42\,10^{-5}$ rad

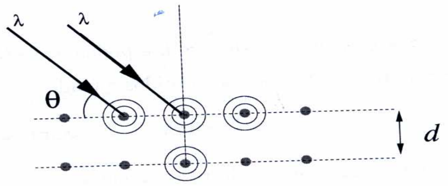
c) $\lambda = \dfrac{\lambda_{vac}}{n_{água}} = \dfrac{589}{1{,}33}$ nm $= 443$ nm $\Rightarrow \theta_m = 6{,}00\,10^{-5}$ rad

2005

Questão 3

(I) (1,5 ponto) Numa experiência de Young, duas fendas separadas de $1,5$ mm, são iluminadas com luz de comprimento de onda igual a 600 nm. As franjas brilhantes de interferência são observadas em um anteparo a uma distância de 3 m do plano das fendas. Determine o espaçamento entre estas franjas.

(II) (1,0 ponto) Deduza a condição de interferência construtiva para um raio X de comprimento de onda λ incidindo num cristal formando um ângulo θ com os planos cristalinos espaçados de d, conforme mostra a figura.



14

(125)

P2

Física IV

Escola Politécnica - 2004

FAP 2204 - GABARITO DA P2

26 de outubro de 2004

Questão 1

A distância entre dois faróis de um veículo é $d = 1,4\,\text{m}$. Suponha que estes faróis emitam luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 550\,\text{nm}$. O veículo se aproxima de um observador cuja pupila tem um diâmetro $a = 5,0\,\text{mm}$. Seu olhos são preenchidos com um líquido cujo índice de refração é $n = 1,1$. A resolução com que esse observador pode distinguir os dois faróis é determinada pelos efeitos de difração da luz de cada farol no olho do observador. Nessa situação responda:

(1,0 ponto) (a) Qual o comprimento de onda λ_p da luz dos faróis no interior dos olhos do observador? Justifique sua resposta.

(1,5 ponto) (b) Qual a distância máxima r entre a pupila e os faróis tal que o observador consegue distingui-los separadamente?

Dado: Lei de Snell $sen\,\theta_i = n\,sen\,\theta_r$.

125

P2

Física IV

Escola Politécnica - 2003

FAP2296 - GABARITO DA P2

21 de outubro de 2003

◇ **Esta avaliação tem 100 minutos de duração.**

◇ ***É proibida a consulta a colegas, livros e apontamentos.***

◇ **Escreva de forma legível.**

◇ **É proibido o uso de calculadoras.**

◇ **Resolva cada questão na folha apropriada.**

◇ **Não serão aceitas respostas sem justificativas**

Questão 1

Uma rede de difração que tem N fendas por centímetro, uniformemente separadas por uma distância d, dispersa a luz branca de modo que o comprimento de onda $\lambda = 500nm$, do verde, aparece no espectro de quarta ordem sob o ângulo $\theta = 30°$.

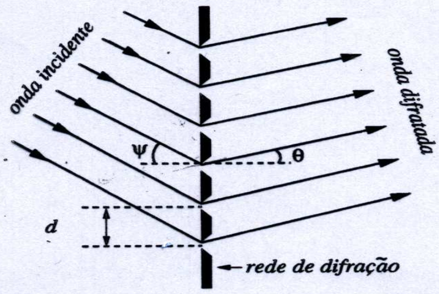
(0,5 ponto) (a) **Qual a condição para os máximos da rede de difração? Expresse sua resposta em termos de d, λ, θ, e m (ordem do espectro).**

(1,0 ponto) (b) **Qual é o número de linhas por centímetro (N) da rede de difração?**

(1,0 ponto) (c) **Admitindo-se quc o espectro do visível se estenda de 400nm até 700nm, determinese alguma radiação visível do espectro de quinta ordem aparece ou não no ângulo $\theta = 30°$.**

Questão 2

Luz incide sobre uma rede de difração com ângulo ψ, conforme indicado na figura.



(a) (1,5 ponto) Mostrar que os máximos de intensidade na figura de interferência ocorrem para

$$d\,(\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\theta) = m\lambda,$$

com $m = 0, 1, 2, \ldots$

(b) (1,0 ponto) Considere $\psi = 30°$. Calcule o valor de d/λ para que o ponto do anteparo localizado em $\theta = \psi$ corresponda ao máximo de ordem $m = 10$.

2011

Questão 3

Quando Marte está próximo da Terra a distância L entre os dois planetas é aproximadamente igual a 6×10^7 km. Suponha que Marte seja observado através de um telescópio com espelho de diâmetro $D = 30$ cm.

(a) (0,5 ponto) Qual é a resolução angular do telescópio para luz com um comprimento de onda $\lambda = 600$ nm?

(b) (1,0 ponto) Qual é a menor distância d que pode ser resolvida entre dois pontos na superfície de Marte com luz de comprimento de onda $\lambda = 600$ nm?

(c) (0,5 ponto) Para luz com comprimento de onda $\lambda' = 700$ nm, qual deveria ser o diâmetro D' do espelho para se obter a resolução angular do item (a)?