Energia e momento linear em ondas eletromagn.

ENERGIA

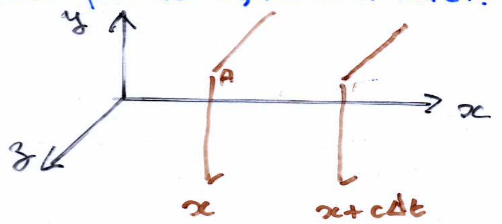
Sabemos que todo campo el. ou magn., tem energia associada. Como uma onda eletromagnética é formada de um campo el. e um campo magn., sua densidade de energia é:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2}$$

Usando $B = E/c$, vemos que $\frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2\mu_0}\frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{2\mu_0\varepsilon_0}\varepsilon_0\frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$
i.e. a contribuição de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ no u é a mesma.

As ondas que descrevemos são ondas progressivas isto implica que deve haver transporte de energia no espaço.

Consideramos uma frente de onda (= plano ⊥ direção de propagação, sobre o qual $\vec{E}$ e $\vec{B}$ tem valor fixo), atravessando da área A no plano x, num instante dado. Após um tempo dt, está frente está em $x+dt$.



A energia contida no volume Acdt foi transportada através da área A durante dt:
$dU = u\,dV = (\varepsilon_0 E^2)(A\,c\,dt)$

Chamamos de S o fluxo de energia por u. de superfície e u. de tempo:

$$\boxed{S \equiv \frac{dU}{A\,dt} = \varepsilon_0 c E^2}$$ depende de t e x

Observamos que $S = \varepsilon_0 c^2 E \frac{E}{c} = \varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} EB = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{|\vec{E}\times\vec{B}|}{\mu_0}$ (pois $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são ortogonais).

Além disto, o transporte de energia se faz no sentido de $\vec{c} = c\hat{x}$, que é o de $\vec{E}\times\vec{B}$.
Isto nos leva a definir o vetor de Poynting

$$\boxed{\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}}$$

que tem modulo $S = \frac{dU}{A\,dt} = \varepsilon_0 c E^2$ e sentido de $\vec{c}$

O fluxo total da energia por unidade de tempo (a potência) que atravessa uma sfce fechada é:

$$\boxed{\underset{\text{potência}}{P} = \oint \vec{S}\cdot d\vec{A}}$$

Para uma onda senoidal, é útil definir e calcular sua intensidade

$$\boxed{\underset{\text{intensidade}}{I} \equiv \langle S \rangle_{\text{média sobre um período}}}$$ ← depende de x

$I = \langle S \rangle = \varepsilon_0 c E_{max}^2 \langle \cos^2(kx-\omega t) \rangle = \varepsilon_0 c E_{max}^2 / 2$

MOMENTO

As ondas eletromagn. transportam não só energia mas momento linear.

Isto não deve surpreender pois na relatividade energia e momento são ligados: $E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (pc)^2}$. Veremos mais tarde, que as ondas eletromagn. podem ser consideradas como uma corrente de partículas sem massa, os fótons, de modo que $p = E/c$, ou nas nossas notações $p = U/c$.

Assim o fluxo de momento por u. de superfície e unidade de tempo é:

$$\boxed{\frac{dp}{A\,dt} = \frac{S}{c}}$$

Esse momento linear é responsável por um fenômeno chamado pressão de radiação.

Caso de uma onda totalmente absorvida

Quando uma onda eletromagn. é absorvida por uma superfície A, o momento linear também é transferido para essa superfície (supomos $\vec{c} \perp A$)

$\Rightarrow \frac{dp}{dt}$ é a força realizada sobre a superfície

$\Rightarrow \langle \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c}$ é a pressão sobre esta superfície.

Assim $\boxed{p_{rad} = \frac{I}{c}}$ onda totalª absorvida   cuidado $p_{rad} \neq p$

Caso de uma onda totalmente refletida

Se a onda é totalmente refletida, ela carrega $-dp$ e a superfície ganha $2dp$ (para conservar momento) de modo que

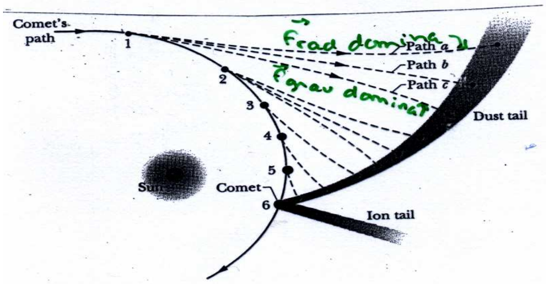
$$\boxed{p_{rad} = \frac{2I}{c}}$$
onda totalª refletida

Este fenômeno de pressão de radiação tem muitas aplicações.

O RADIOMETRO

consiste em um par (ou mais) espelho - disco escuro. Na presença de luz, o par gira. A pressão de radiação é determinada pela medida do ângulo de giro. O aparelho opera num vácuo muito alto.

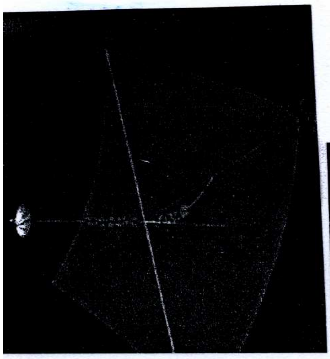
RABO DE COMETA



A cometa está agora na posição 6. Pó foi solto nas 5 posições anteriores. A pressão de radiação devido a luz solar atuou sobre este pó, formando agora o rabo da cometa.

NAVEGAÇÃO ESPACIAL USANDO VELA SOLAR

A NASA está testando tais velas na terra (foto esq.). A ISAS, japonesa, já conseguiu abrir tais velas no espaço (foto do meio) (agosto 2004). A Planetary Society, com o Space Research Institute russo, tentou 2 vezes colocar em órbita um veículo com vela solar mas tiveram problemas no lançamento (foto direita) (julho 2001, junho 2005).



-PINÇAS ÓPTICAS usam um feixe laser para manipular átomos, moléculas e células (ver noticiários)

ondas eletromagnéticas na matéria

Podemos facilmente estender nossa discussão sobre ondas eletromagnéticas no vácuo ao caso de um meio não-condutor linear (com $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$)

Neste caso, as eq. de maxwell podem ser re-escritas

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \cancel{\frac{\rho}{\varepsilon}} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\left(\cancel{\vec{J}} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

De modo que a onda eletromagnética se propaga com velocidade

$\vec{v}$ com $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \equiv \dfrac{c}{n}$ $< c$

$n \leftarrow$ índice de refração

$\vec{v}, \vec{E}, \vec{B}$ formam um triedro direito

$B = E/v$

A densidade de energia é

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

O vetor de Poynting é

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu}$$

e a intensidade

$$I = \langle S \rangle$$

Obs.1: O ε não necessariamente é o mesmo do que p/ campos státicos. Pode depender de ω. Em geral $\mu \approx \mu_0$.

Obs.2: na interface entre 2 meios, parte de uma onda incidente é refletida e parte transmitida. No caso de uma onda entrando num meio condutor, ela não se propaga sobre distâncias apreciáveis. (ex.: isto torna difícil a comunicação com submarinos).

Ondas eletromagnéticas estacionárias

Lembrete sobre reflexão de onda

Consideramos uma corda com uma extremidade presa e com um pulso se propagando:

Que acontece quando o pulso atinge a extremidade fixa? É refletido com imagem invertida. PORQUÊ?

→ Matematicamente

extremidade fixa $\Rightarrow f(0,t) = 0 \,,\ \forall t$

De modo geral f é da forma:

$$f(x,t) = g(x - vt) + \underbrace{h(x+vt)}_{\text{descreve o pulso incidente}}$$

Devemos ter: $f(0,t) = 0 = g(-vt) + h(vt) \,,\ \forall t$

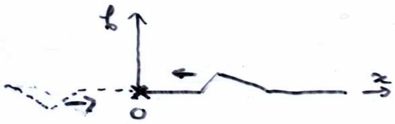
⇒ isto determina a função incógnita $g(x')$ como:

$$g(\underset{x-vt}{x'}) = -h(-x')$$

Assim a forma de $f(x,t)$ é:

$$f(x,t) = \underbrace{h(x+vt)}_{\text{pulso inc.}} - \underbrace{h(x+vt)}_{\text{pulso refletido}}$$

Graficamente:



antes do pulso incidir

o pulso muda de fase

depois do pulso incidir

→ Fisicamente:

Ao atingir o ponto O, o pulso iria provocar um deslocamento da corda. Para ela não se movimentar, o suporte reage (o que gera a imagem invertida).

No caso de uma corda com extremidade livre

o pulso é refletido sem inversão. Porquê?

matematicamente

a força vertical em $x = 0$ tem que ser nula:

$$\underbrace{F(0,t)}_{=0} = -T\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) \quad \text{(com } f \text{ deslocamento vertical)}$$

Para a solução geral $f(x,t) = g(x-vt) + h(x+vt)$ isto implica

$$g'(-vt) + h'(vt) = 0 \quad \text{(' significa derivada)}$$

Para satisfazer isto, basta escolher $g(x) = h(-x)$ daí:

$$f(x,t) = \underbrace{h(x+vt)}_{\text{inc.}} + \underbrace{h(-x+vt)}_{\text{refletida}}$$

o pulso não mudou de fase

fisicamente

Quando o pulso chega em 0, o anel é deslocado para cima. Ele puxa a corda, produzindo um pulso refletido não invertido.

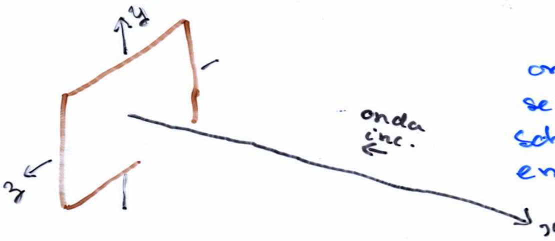
Aplicação às ondas eletromagnéticas

UMA PLACA

Uma onda eletromagnética que incide perpendicularmente sobre um condutor perfeito é refletida como o pulso numa corda.

O campo elétrico total num condutor não tem componente paralela à superfície de um condutor. Contudo, o campo elétrico da onda incidente não é zero sobre o condutor em todos os instantes. Assim aparecem correntes induzidas no condutor e um campo elétrico adicional tal que a componente do campo elétrico total, na superfície do condutor, seja nulo. Assim este caso é similar ao pulso numa corda com extremidade fixa.

Para o campo magnético não tem esta restrição. Este caso é similar ao pulso numa corda com extremidade livre.



Supomos uma onda incidente no sentido -x negativo, sobre uma placa plana em $x=0$, com polarização $\hat{y}$.

$$\vec{E}(x,t) = [E_m \cos(kx+\omega t) - E_m \cos(-kx+\omega t)]\,\hat{y}$$
$$\vec{B}(x,t) = [B_m \cos(kx+\omega t) + B_m \cos(-kx+\omega t)]\,(-\hat{z})$$

Podemos re-escrever, usando $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$$\vec{E}(x,t) = -2E_m \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t\,\hat{y}$$
$$\vec{B}(x,t) = 2B_m \cos kx \cos \omega t\,(-\hat{z})$$

Vemos que, qualquer que seja t, $\vec{E}(x,t) = 0$ sobre os planos $kx = 0, \pi, 2\pi$, etc.

$\Leftrightarrow \underbrace{x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda}$ etc (pois $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

Estes planos são chamados planos nodais. São similares aos nós de uma onda estacionária numa corda. Os planos onde $\operatorname{sen} kx = \pm 1$ são chamados antinodais.

O campo magnético $\vec{B}(x,t) = 0 \ \forall t$ sobre os planos $kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ etc

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}$ etc.

Existe também planos antinodais na metade da distância entre planos nodais.

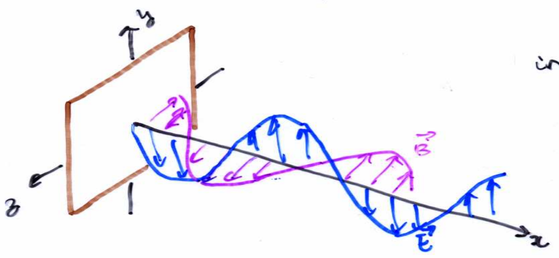


imagem para $\omega t = \frac{\pi}{4}$

Obs.1: $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não estão em fase devido as fatores $\cos\omega t$ vs. $\operatorname{sen}\omega t$.

Obs.2: $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfazem eq. de onda (do tipo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$) e as eq. de Maxwell.

Obs.3: Uma vez determinado $\vec{E}(x,t) = [E_m \cos(kx + \omega t) - E_m \cos(-kx + \omega t)]\hat{y}$ pode-se obter $\vec{B}$ também da maneira seguinte:

GO

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ com $\vec{E}_1 = E_m \cos(kx + \omega t)\hat{y}$, $\vec{E}_2 = -E_m \cos(-kx + \omega t)\hat{y}$

$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ com $\vec{B}_1 = \frac{E_m}{c}\cos(kx + \omega t)(\hat{z})$, $\vec{B}_2 = \frac{E_m}{c}\cos(-kx + \omega t)(-\hat{z})$

$-\hat{x}, \hat{y}, -\hat{z}$

$+\hat{x}, -\hat{y}, -\hat{z}$

DUAS PLACAS

Podemos introduzir um segundo plano condutor em $x=L$. Os dois planos condutores tem que ser planos nodais para $\vec{E}$: uma onda estacionária poderá se formar somente se L é múltiplo de $\frac{\lambda}{2}$. Ou seja, os comprimentos de onda que satisfazem $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ $(n=1,2\ldots)$ permitem que haja uma onda estacionária. Isto também é similar as cordas.

Podemos calcular $S(x,t) = \frac{E(x,t)\,B(x,t)}{\mu_0}$

$$= \frac{4E_mB_m}{\mu_0}\cos kx \,\mathrm{sen}\, kx \cos\omega t \,\mathrm{sen}\,\omega t$$

assim $\langle S\rangle = I = 0$. Isto é esperado, não há transporte de energia numa onda estacionária.

Isto não impede que há lugares com $u=0$ e outros com $u\neq 0$. Isto explica porquê num forno microonda sem mesa giratória, a comida não esquenta uniformemente: tem ondas estacionárias e nos nós, a comida não esquenta.

Este ovo só foi cozido em 2 pontos onde a densidade de energia é máxima ⇒ pontos separados de $\frac{\lambda}{2}$

[Para medir a velocidade da luz:
Medir a distância entre 2 pontos bem cozidos adjacentes, por ex. 6 cm ⇒ $\lambda = 2 \times 6$ cm.
Procurar a frequência de operação do microonda, em geral 2450 MHz.
$c = \lambda f = 0{,}12\,m \times 2450\, 10^6 s^{-1} = 2.94\, 10^8 m s^{-1} \ldots$]

O espectro eletromagnético

Vivemos num banho de ondas. Elas tem frequências diferentes (e então comprimento de onda $\lambda = c/f$ também). Todas se propagam com velocidade c no vácuo.

Ondas rádio $f \sim 10^6$ a 10^8 Hz
usadas nos sistema de comunicação de rádio e TV
[provocadas por cargas aceleradas em antenas]

Microondas $f \sim 10^9$ a 10^{12} Hz
por exemplo: forno microonda
[geradas por dispositivos como osciladores LC]

infravermelho $f \sim 10^{12}$ a 10^{14} Hz
emitidas por corpos quentes

visível $f \sim 10^{14}$ Hz $\lambda = 400$ a 700 nm
violeta vermelho
[gerada por rearranjo do e^- nos átomos e moléculas.]

UV $f \sim 10^{15}$ a 10^{17} Hz
ex. sol

X $f \sim 10^{16} - 10^{21}$ Hz
usados na medicina

gamma $f \gtrsim 10^{18}$ Hz
emitidos por ex. por núcleos radiativos (perigosos).

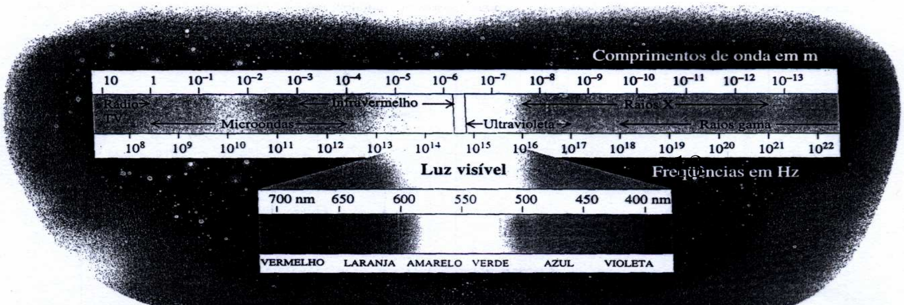


FIGURA 33.15 O espectro eletromagnético. As freqüências e os comprimentos de onda existentes na natureza se estendem sobre um intervalo tão elevado que é necessário usar uma escala logarítmica para mostrar todas as bandas importantes. O limites entre as diversas bandas são ligeiramente arbitrários.

2010

Formulário

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad V_m = Z I_m,$$

$$P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi, \quad V_{qm} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, \quad I_{qm} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}.$$

<u>No vácuo</u>: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A},$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad E = cB.$$

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \quad \text{onde} \quad \Phi_e = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

$$\vec{E} = E_m \cos(kx - \omega t + \phi)\hat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m \cos(kx - \omega t + \phi)\hat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad k\,c = \omega.$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

$$I = < S > = \frac{E_m B_m}{2\mu_0}, \quad \text{média temporal: } < cos^2(kx - \omega t + \phi) > = 1/2.$$

$$P_{rad} = \frac{2I}{c} \text{ e } P_{rad} = \frac{I}{c}.$$

14

2016

Questão 4

Uma onda eletromagnética plana senoidal no vácuo tem as seguintes características: (1) A freqüência é 100 MHz ($= 10^8 s^{-1}$), (2) propaga-se no sentido negativo do eixo x, (3) a intensidade é 240 W/m^2 e (4) o campo elétrico está na direção do eixo y e atinge o valor máximo para $x = 0$ e $t = 0$. São dados: a velocidade da luz no vácuo $c = 3 \times 10^8$ m/s e a permeabilidade magnética do vácuo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

(a) (0,5 ponto) Determine o comprimento de onda.

(b) (0,5 ponto) Determine o módulo da força que a onda exerce sobre uma superfície quadrada perfeitamente refletora de 1 km de lado e perpendicular ao eixo x.

(c) (1,0 ponto) Escreva a expressão do campo elétrico.

(d) (0,5 ponto) Escreva a expressão do campo magnético.

15

Questão 4

Uma nave espacial é impulsionada por uma "vela" que reflete a luz do Sol. A vela tem a forma de um quadrado com lados de 1Km de comprimento, é perfeitamente refletora e está sempre orientada perpendicularmente à luz do Sol. Suponha que nas vizinhanças da Terra a intensidade da luz solar $I = 1,35 \times 10^3$ W/m^2.

(a) (1,0 ponto) Calcule a pressão de radiação exercida pela luz solar sobre a vela próximo da Terra? Dado: a velocidade da luz $c = 3 \times 10^8$ m/s.

(b) (1,0 ponto) Se a massa da nave $M = 4,5$ toneladas, calcule a aceleração a da nave produzida pela força de radiação.

(c) (0,5 ponto) Ignorando-se os efeitos da atração gravitacional, calcule o tempo gasto em dias para percorrer uma distância equivalente à separação Terra-Lua (360.000 km) partindo do repouso. Dado: 1s = $1,2 \times 10^{-5}$ dias

Questão 3

O campo elétrico de uma onda eletromagnética no vácuo é dado por

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(\alpha x)\cos(\beta t)\hat{e}_y$$

(a) (1,0 ponto) Deduza a relação existente entre as constantes α e β sabendo-se que o campo elétrico satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\,,$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

(b) (1,0 ponto) Deduza a expressão do campo magnético da onda a partir da lei de Faraday.

(c) (0,5 ponto) Escreva a expressão analítica das ondas que se compõem para produzir esta onda estacionária.

17