Ondas eletromagnéticas (cap. 33)

Neste capítulo, veremos que as eq. de Maxwell no vácuo, admitem soluções do tipo ondas. Por isto, começamos esta aula com uma revisão sobre ondas.

Resumo sobre ondas

Equação de onda em 1 dimensão

Consideramos uma corda esticada por uma tensão $\vec{T}$. Em equilíbrio, a corda coincide com o eixo x. Mas se a corda for sacudida, uma onda se propaga ao longo dela.

Chamamos $f(x,t)$ o deslocamento transversal da corda

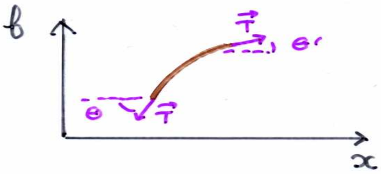


imagem a t fixo

Pode-se mostrar que para pequenas perturbações, f satisfaz a eq. seguinte, chamada eq. de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad \text{com } v = \sqrt{T/\mu} \leftarrow \text{massa por u. de comprimento}}$$

Este tipo de eq. é também satisfeita (com outro v) pelo deslocamento do ar numa onda sonora, pelos componentes $\vec{E}$ e $\vec{B}$ de uma onda eletromagnética no vácuo, etc.

[Dem. para corda cf. Nussenzveig V.2 Cap.5 ou Griffiths §8.1

A força transversal líquida sobre um pedaço de corda entre x e $x+dx$ é:

$$F = T\,\mathrm{sen}\,\theta' - T\,\mathrm{sen}\,\theta \sim T(\mathrm{tg}\,\theta' - \mathrm{tg}\,\theta)$$

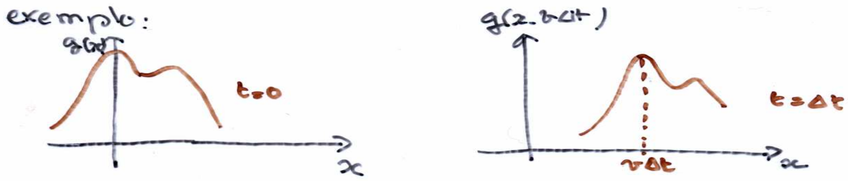
$$= T\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x}\right) \approx T\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_x \Delta x$$

$$= \mu\,\Delta x\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Rightarrow \text{cqfd}\ ]$$

A eq. de onda admite como solução qualquer função do tipo $g(x-vt)$ ou $h(x+vt)$

$g(x-vt)$: onda progressiva p/ direita; $h(x+vt)$: id. p/ esquerda

exemplo:



obs.1: $f(x,t) = g(x-vt) + h(x+vt)$ com g e h quaisquer, é a sol. mais geral da eq. de onda unidimensional (pois depende de 2 funções arbitrárias.

obs.2: dar as condições iniciais significa dar o deslocamento transversal inicial $f(x,0)$ e a velocidade inicial $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0)$.

Dem: $f(x,t) = g(x-vt) \equiv g(z)$ solução?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dg}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dg}{dz} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dg}{dz}\right) = \frac{d^2 g}{dz^2}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2 g}{dz^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{dg}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = -v\frac{dg}{dz} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v\frac{dg}{dz}\right) = -v\frac{d^2 g}{dz^2}\frac{\partial z}{\partial t} = v^2\frac{d^2 g}{dz^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 g}{dz^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad]$$

Ondas harmônicas são um caso particular de ondas progressivas, então é sol. da eq. de onda

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,t) &= A\cos[k(x-vt)+\delta] \\ &= A\cos[kx-\omega t+\delta] \quad \text{com } \omega \equiv kv \end{aligned}}$$

Esta função tem periodicidade espacial e temporal:

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kv}$ é período temporal pois

$$f(x,t+T) = A[\cos[kx-\omega(t+T)+\delta] = A\cos[kx-\omega t-\omega\tfrac{2\pi}{\omega}+\delta] = f(x,t)$$

$\lambda = \frac{2\pi}{k} = vT$ é período espacial e é chamado comprimento de onda pois

$$f(x+\lambda,t) = A[\cos k(x+\lambda)-\omega t+\delta] = A\cos[kx+k\tfrac{2\pi}{k}-\omega t+\delta] = f(x,t)$$

A: amplitude da onda
k: número de onda
δ: constante de fase

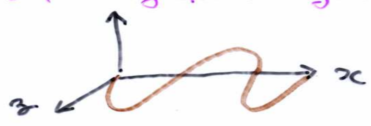
Polarização

Ondas como as numa corda são chamadas ondas transversais pois o deslocamento f é perpendicular à direção de propagação da onda, o eixo x. As ondas eletromagnéticas no vácuo, também são ondas transversais. (Existe ondas longitudinais onde o deslocamento é na direção da propagação. Isto é o caso das ondas sonoras por exemplo.)

Para as ondas transversais, existe 2 possibilidades independentes para o sentido do deslocamento (as outras são combinações).

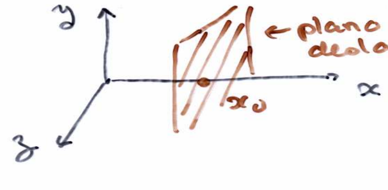
Deslocamento vertical ou "polarização vertical"

Deslocamento horizontal ou "polarização horizontal"



Ondas em mais dimensões

Normalmente as ondas se propagam no espaço 3dimensional.
No caso particular de uma onda que se desloca por exemplo na direção x, sem depender de y e z, dizemos que a onda é plana pois qualquer ponto no plano yz passando por um certo x_0, tem o mesmo valor $f(x_0,t)$ para t fixo.



(Existem ondas esféricas, ondas cilíndricas etc.)

As ondas eletromagnéticas

No vácuo, $\rho=0$ e $\vec{J}=0$ e as eq. de Maxwell se reescrevem

(i) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ (iii) $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

(ii) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ (iv) $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Aplicamos o rot. a (iii) e (iv):

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}_{\text{grad div}} - \underbrace{\nabla^2\vec{E}}_{\text{Lapl.}} = \vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \underset{\text{usando (iv)}}{=} -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \nabla^2\vec{B} = \vec{\nabla}\times\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E}) \underset{\text{usando (iii)}}{=} -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Usando (i) e (ii) temos:

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

isto é uma notação compacta para:

$$\nabla^2 E_x = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 B_x = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2 E_y = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 B_y = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2 E_z = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 B_z = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

: eq. de onda p/ cada componente de $\vec{E}$ e $\vec{B}$

Agora vem a surpresa: a vel. de propagação desta onda formada por um campo $\vec{E}$ e um campo $\vec{B}$ é :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2{,}99792\ 10^8\ m/s = c$$

ε_0: $8{,}85\ 10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}$; μ_0: $4\pi\ 10^{-7}\ \frac{N}{A^2}$

isto levou Maxwell a supor que um exemplo de onda eletromagnética era a luz visível. Desta maneira, ele unificou o eletromagnetismo e a ótica, que antes eram dois campos distintos (~1862). Para esta descoberta, o termo de "corrente de deslocamento" foi crucial.

Obs. 1: uma diferencia com as ondas (em cordas por ex.) com as quais estamos mais acostumados, é que as ondas eletromagnéticas se propagam no vácuo.

Obs.2: Neste curso, nossa preocupação será com as propriedades das ondas eletromagnéticas e não com o problema (mais complexo) de como elas são produzidas. Porém é importante saber que ondas eletromagnéticas são geradas por cargas aceleradas, como por exemplo, cargas oscilando numa antena.

Obs.3: Hertz (físico alemão) foi o primeiro a gerar ondas eletromagnéticas que não sejam luz visível. No caso, ele gerou ondas rádio, mostrou explicitamente que eram devidas a cargas oscilando e que sua velocidade era c. Assim ele comprovou a descoberta teórica de Maxwell.

Obs.4: a ligação entre as eq. de Maxwell e a ótica é muito profunda. Por ex., pode se derivar leis da ótica (leis de Snell, etc) a partir das eq. de Maxwell para 2 meios dielétricos (c/ condições de contorno adequadas).

Agora queremos estudar as propriedades destas ondas eletromagnéticas. Supomos ondas planas
condições ↓
Podemos escrever :

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E_0} \cos(kx - \omega t)$$
$$\vec{B}(x,t) = \vec{B_0} \cos(kx - \omega t)$$

(o caso com $kx + \omega t$ pode ser feito depois).

6cr Sabemos que estes campos serão sol. das eq. de onda, as quais são derivadas das eq. de Maxwell. Isto não implica que eles são sol. das eq. de Maxwell. Na verdade isto vai impor restrições:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad = E_{0x} \frac{\partial \cos(kx-\omega t)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad E_{0x} = 0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad = B_{0x} \frac{\partial \cos(kx-\omega t)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad B_{0x} = 0$$

Isto significa que as ondas eletromagnéticas são transversais.

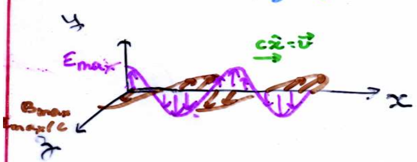
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow$$

3 componentes:

- $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad = -B_{0x}\, \omega \,\mathrm{sen}(kx-\omega t)$: satisfeita pois $B_{0x} = 0$
- $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -E_{0y} k \,\mathrm{sen}(kx-\omega t) = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -B_{0z}\, \omega \,\mathrm{sen}(kx-\omega t) \Leftrightarrow E_{0y} = c B_{0z}$
- $-\frac{\partial E_z}{\partial x} = E_{0z} k \,\mathrm{sen}(kx-\omega t) = -\frac{\partial B_y}{\partial t} = -B_{0y}\, \omega \,\mathrm{sen}(kx-\omega t) \Leftrightarrow E_{0z} = -c B_{0y}$

Existem 2 soluções independentes* (as outras são combinasões lineares)

$\vec{E}$ tem polarização ao longo de y



$(E_x = E_z = 0$

$$\vec{E} = \overset{E_{0y}}{E_{max}} \cos(kx-\omega t)\,\hat{y}$$

$B_x = B_y = 0$

$$\vec{B} = \overset{B_{0z}}{B_{max}} \cos(kx-\omega t)\,\hat{z}$$

$B_{max} = E_{max}/c$

$\Rightarrow \vec{E}\times\vec{B}$ fornece a direção e o sentido de propagação $\vec{v} = c\hat{x}$, da onda

* A eq. de Ampère-Maxwell não traz mais restrições

A outra solução é: $\vec{E}$ tem polarização ao longo de $\hat{z}$ (56)

$E_x = E_y = 0$

$\vec{E} = E_{max} \cos(kx - \omega t)\,\hat{z}$

$B_x = B_z = 0$

$\vec{B} = -B_{max} \cos(kx - \omega t)\,\hat{y}$

$B_{max} = + E_{max}/c$

$\Rightarrow$ $\vec{E} \times \vec{B}$ fornece a direção e o sentido de propagação $\vec{v} = c\hat{x}$ da onda.

Obs.: no livro, estes resultados são derivados a partir das eq. de Maxwell na forma integral (com mais hipóteses)

De modo geral: $\begin{cases} \vec{v}, \vec{E}, \vec{B} \text{ formam um triedro direto} \\ B_{max} = \dfrac{E_{max}}{c} \end{cases}$

2016

Questão 4

Uma onda eletromagnética plana senoidal no vácuo tem as seguintes características: (1) A freqüência é 100 MHz ($= 10^8 \mathrm{s}^{-1}$), (2) propaga-se no sentido negativo do eixo x, (3) a intensidade é 240 $\mathrm{W/m^2}$ e (4) o campo elétrico está na direção do eixo y e atinge o valor máximo para $x = 0$ e $t = 0$. São dados: a velocidade da luz no vácuo $c = 3 \times 10^8$ m/s e a permeabilidade magnética do vácuo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

(a) (0,5 ponto) Determine o comprimento de onda.

(b) (0,5 ponto) Determine o módulo da força que a onda exerce sobre uma superfície quadrada perfeitamente refletora de 1 km de lado e perpendicular ao eixo x.

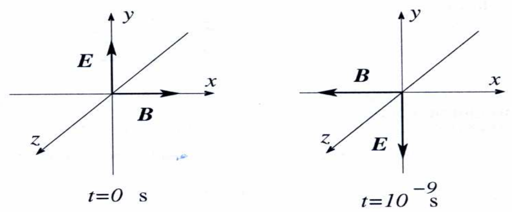
(c) (1,0 ponto) Escreva a expressão do campo elétrico.

(d) (0,5 ponto) Escreva a expressão do campo magnético.

2005

Questão 3

A figura abaixo representa os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ de uma onda eletromagnética plana monocromática, no vácuo, na origem do sistema de coordenadas em dois instantes diferentes. O campo elétrico está na direção do eixo y vale em módulo 1 V/m no instante $t = 0$ s e $\sqrt{3}$ V/m no instante $t = 10^{-9}$ s. A freqüência da onda é $f = 0,25 \times 10^{9}$ Hz. São dadas ainda a velocidade da luz $c = 3 \times 10^{8}$ m/s e a permeabilidade magnética no vácuo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.



(a) (0,5 ponto) Determine o comprimento de onda λ, a freqüência angular ω e o número de onda k.

(b) (1,0 ponto) Usando a figura e os valores em módulo do campo elétrico nos instante $t = 0$ s e $t = 10^{-9}$, determine E_m, a constante de fase ϕ (veja o formulário) e escreva a expressão do campo elétrico $\vec{E}$ dessa onda.

(c) (1,0 ponto) Determine o campo magnético $\vec{B}$, ~~o vetor de Poynting $\vec{S}$ e a intensidade I da onda.~~

10

2008

Questão 3

O campo elétrico de uma onda eletromagnética no vácuo é dado por

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(\alpha x)\cos(\beta t)\hat{e}_y$$

(a) (1,0 ponto) Deduza a relação existente entre as constantes α e β sabendo-se que o campo elétrico satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

(b) (1,0 ponto) Deduza a expressão do campo magnético da onda a partir da lei de Faraday.

(c) (0,5 ponto) Escreva a expressão analítica das ondas que se compõem para produzir esta onda estacionária.

11