As equações de Maxwell em notação diferencial

Lembrete

GRADIENTE (se aplica a uma função e retorna um vetor)

- Em 1 dimensão:

Se $x \to x + dx$, $f \to f + df$

com

$df = \frac{df}{dx} dx$, $\frac{df}{dx}$ { derivada de f / mede a inclinação de f(x)

Em 3 dimensões:

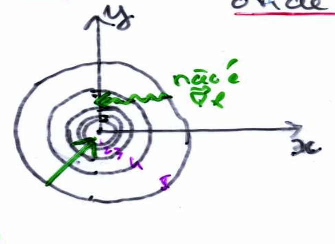
se $\vec{l} \to \vec{l} + d\vec{l}$, $f \to f + df$

com

$$\boxed{df = \underbrace{\vec{\nabla} f}_{\text{grad } f} \cdot d\vec{l}}$$

$\vec{\nabla} f$ { gradiente de f / vetor que aponta no sentido onde f cresce mais rápido

- exemplo:



f: altura do morro

1: $f(x,y) = 1$

2: $f(x,y) = \frac{1}{2}$

3: $f(x,y) = \frac{1}{4}$

4: $f(x,y) = \frac{1}{16}$

5: $f(x,y) = \frac{1}{32}$

- coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

(i) pode-se usar a notação $\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$ e reencontrar o resultado acima

(ii) se $f = f(x)$, $\vec{\nabla} f = \frac{df}{dx}\hat{x}$ (i.e. problema unidimens.)

coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

(i) se $f = f(r)$, $\vec{\nabla} f = \frac{df}{dr}\hat{r}$ (i.e. problema com sim. esférica)

coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

(i) se $f = f(\rho)$, $\vec{\nabla} f = \frac{df}{d\rho}\hat{\rho}$ (i.e. problema com sim. cilíndrica)

DIVERGÊNCIA (se aplica a um vetor e retorna um escalar)

- Consideramos um campo vetorial $\vec{F}$.

Pode-se definir

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \operatorname{div}\vec{F} = \lim_{V\to 0} \frac{\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{A}}{V}}$$

$\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{A}$ ← fluxo de $\vec{F}$ através S fechada

V ← vol. delimitado por S

- Esta expressão é geral. Ela pode ser calculada em vários tipos de coordenadas.

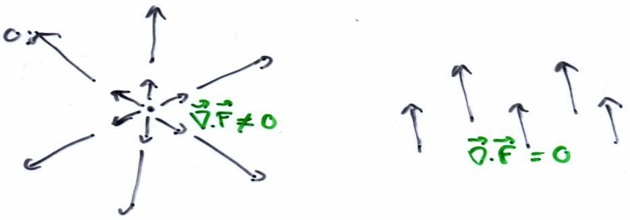
Em coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

(i) com a notação anterior para $\vec{\nabla}$ é fácil re-encontrar esta fórmula calculando $\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}\right)$

- A partir da definição geral, vemos que a divergência é um número que mede o quanto o campo vetorial se espalha ao redor de um ponto.

exemplo:



ROTACIONAL (se aplica a um vetor e retorna um vetor)

- Consideramos um campo vetorial $\vec{F}$
  Pode-se definir:
  a componente i de $\vec{rot}\,\vec{F}$ é:

integral ao longo do circuito C fechado, ⊥ direção i

$$\boxed{(\vec{\nabla}\times\vec{F})_i = (\vec{rot}\,\vec{F})_i = \lim_{S\to 0}\frac{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}}{S}}$$

S ← sfce delimitada por C

- Esta expressão é geral. Em coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial F_z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

o que pode ser re-encontrado calculando:

$$\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}\right) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

- A partir da definição geral, pode-se ver que o rotacional em um ponto mede o quanto o campo vetorial "gira" neste ponto.
  Imaginamos que temos como medidor de rotacional uma roda com pás. O eixo da roda deve ser colocado na direção onde queremos saber se há uma componente ≠ 0 do rotacional. Se a roda gira, o componente é ≠ 0 mesmo.

exemplo:

$\vec{rot}$ tem componente ≠ 0 na direção ⊥ folha

TEOREMAS E IGUALIDADES ÚTEIS

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{\ell} = f(\vec{b}) - f(\vec{a}) \quad * \\ &\int_{V_S} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\, dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} \\ &\int_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \end{aligned}}$$

teorema do gradiente

teorema da divergencia ou de Gauss, ou de Green

teorema do rotacional ou de Stokes

lado com derivada

lado com a função ou vetor integrado com uma dimensão a menos

Existem muitas igualdades úteis:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

etc.

Com isto, podemos passar a extrair a forma diferencial das equações de Maxwell a partir da sua forma integral.

* Demonstração: para $\vec{\nabla} f$, aplicar a definição e integrar de $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Para $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$, cortar V_S em pequenos volumes e aplicar a def. Para $\vec{\nabla} \times \vec{F}$, cortar S_C em pequenas

Forma diferencial das equações de Maxwell

(4Z)

GAUSS

Podemos re-escrever:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{V_S} (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\, dV$$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_S} \rho \; dV \quad , \forall V_s$$

$$\Leftrightarrow \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Da mesma maneira

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

Interpretação geométrica

Como a divergencia mede o quanto um campo vetorial se espalha, os resultados acima não surpreendem:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ é grande se houver muita carga num volume pequeno

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ é nulo pois não tem fontes pontuais do campo magnético.

FARADAY

Podemos re-escrever

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{S_c}(\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{A}$$

$$\shortparallel$$

$$-\frac{d}{dt}\int_{S_c}\vec{B}\cdot d\vec{A} = -\int_{S_c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{A}\ ,\ \forall S_c \text{ com } c \text{ estático}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Interpretação geométrica

Um campo magnético variável cria um campo elétrico que tem propriedades especiais, por exemplo lembramonos das linhas de campo elétrico circulares da última aula, elas tem $\vec{\nabla}\times\vec{E}\neq 0$. Por outro lado, o campo elétrico de uma carga pontual estática tem $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$.

AMPÈRE - MAXWELL

Podemos re-escrever

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{S_c}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{A}$$

$$\shortparallel$$

$$\mu_0\left(i + \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\right) = \mu_0\left(\int_{S_c}\vec{J}\cdot d\vec{A} + \varepsilon_0\int_{S_c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{A}\right) \qquad \forall S_c$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Interpretação geométrica

Ambos a corrente e o campo elétrico variável podem criar um campo magnético que tem propriedade de "girar" ($\vec{\nabla}\times\vec{B}\neq 0$). ~~(linhas de campo circulares)~~

Observação sobre meios materiais

As equações de Maxwell na forma anterior sempre valem. Com tudo, na presença de meio material, ρ e $\vec{J}$ (ou Q e i) são complicados:

$$\rho = \rho\left(\begin{smallmatrix}\text{cargas}\\\text{livres}\end{smallmatrix}\right) + \rho\left(\begin{smallmatrix}\text{cargas de}\\\text{polarização}\end{smallmatrix}\right)$$

$$\vec{J} = \vec{J}(\text{condução}) + \vec{J}\left(\begin{smallmatrix}\text{devido á}\\\text{magnetização}\end{smallmatrix}\right) + \vec{J}\left(\begin{smallmatrix}\text{devido á}\\\text{mudança de}\\\text{polarização}\end{smallmatrix}\right)$$

"Felizmente" para os meios lineares, o efeito disto é só mudar

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \to \varepsilon \text{ e } \mu_0 \to \mu \\ \rho \to \rho_{livre} \text{ e } \vec{J} \to \vec{J}_{condução} \end{cases}$$

Complementos para a aula sobre equações de Maxwell

As derivadas segundas

Usando o gradiente, a divergência ou o rotacional, aplicamos "$\vec{\nabla}$" uma vez. E se fizermos isto duas vezes?

(1a) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f)$ ≡ div. do gradiente

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (a fazer!)

≡ laplaciano de f: $\nabla^2 f$

(1b) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} f)$ ≡ rot. do gradiente

$= 0$ sempre (cf aula anterior)

(como $\vec{\nabla} f$ é vetor, não se pode fazer grad do grad)

(2) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})$ = grad. da divergência

(como $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ é escalar, só podemos pegar sua div.)

(3a) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})$ = div. do rotacional

$= 0$ sempre (cf aula anterior)

(3b) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F})$ = rot. do rot.

$= \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})}_{\text{grad. da div}} - \underbrace{\nabla^2\vec{F}}_{\text{laplaciano do vetor } \vec{F}}$

com $\nabla^2\vec{F} = \nabla^2 F_x\,\hat{x} + \nabla^2 F_y\,\hat{y} + \nabla^2 F_z\,\hat{z}$

(Em resumo, só tem 2 tipos de derivadas segundas não nulas: grad da div (2) (3b) e laplaciano (1a) (3b))

(Precisaremos destes tipos de derivadas p/ as ondas eletromagnéticas.)

Colocando "ordem na casa" (não "cai" nas provas)

Teorema para campos de rot. nulo:
Temos equivalência entre as condições seguintes

(a) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ em cada ponto

(b) $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$ qualquer que seja C

(ou $\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}\cdot d\vec{l}$ é independente do caminho de $\vec{a}$ a $\vec{b}$)

(c) $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ "$\vec{F}$ é conservativo"

[Obs. (a) ⇔ (b) pelo teorema do rot.
(c) ⇒ (a) (cf. seção anterior)
(a) ⇒ (c) (escolher $V(\vec{r}) = -\int_{ref}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{l}$)]

exemplo: o campo elétrico de cargas

Teorema para campos de div. nula
Temos equivalência entre as condições seguintes

(a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$ em cada ponto

(b) $\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{A} = 0$ qualquer que seja S

(ou $\int \vec{F}\cdot d\vec{A} = 0$ é independente da superfície, para um contorno fixo)

(c) $\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

[Obs (a) ⇔ (b) pelo teorema da div.
(c) ⇒ (a) (cf. seção anterior)
(a) ⇒ (c) (não é trivial)

exemplos: o campo magnético (devido a $\vec{J}$ ou $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$)
o campo elétrico induzido por um $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

EXERCÍCIOS

① Determine a expressão da densida volumétrica de carga que dá origem ao campo
$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} e^{4x} e^{-5y} e^{-2z} (2\hat{x} - 2{,}5\hat{y} - \hat{z})$$

② Mostrar que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ no caso de uma carga pontual

[Em coordenadas esféricas:
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\operatorname{sen}\theta\, F_\varphi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r F_\varphi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta} \right] \hat{\varphi} \; .$$
]

③ Supondo $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$, qual é a densidade de corrente que gera $\vec{B} = \mu_0 [y^2 z\, \hat{x} + 2(x+1) y z\, \hat{y} - (x+1) z^2\, \hat{z}]$?

④ Determinar se o campo seguinte satisfaz as equações de Maxwell com $\rho = 0$ e $\vec{J} = \vec{0}$
$$\vec{E} = \frac{1}{2{,}5\varepsilon_0} (z + 36\; 10^7\, t)\, \hat{x}$$
$$\vec{B} = (-181 z - 4{,}52\; 10^{10}\, t)\, \hat{y}$$