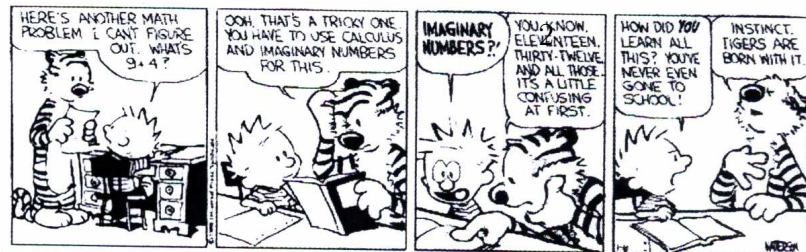


Mudança de sala de aula:

a partir de 09/08/11: 02-04 sala



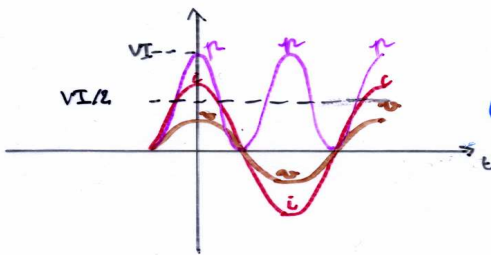
Potência em circuitos de c.a.

gerador + resistor

A potência fornecida ao resistor é $p = vi$ com $v = v_R$

Supomos $i = I \cos \omega t$, de modo que $v_R = V_R \cos \omega t$ assim

$p = V I \cos^2 \omega t$ (sempre positivo \Rightarrow energia fornecida a R, $\forall t$)



$p_{med} = \overline{VI \cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} VI$

(pois $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$, numericamente ou graficamente)

Usando valores quadráticos médios, pode-se escrever:

$p_{med} = V_{qm} I_{qm} = \frac{V_{qm}^2}{R} = R I_{qm}^2$

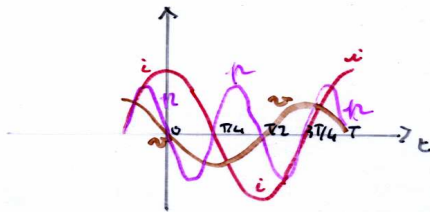
i.e. as mesmas expressões do que para corrente contínua.

gerador + indutor

Nesta vez, a potência fornecida ao indutor é $p = vi$ com $v = v_L$

com $i = I \cos \omega t$ e $v_L = V_L \cos(\omega t + 90^\circ)$

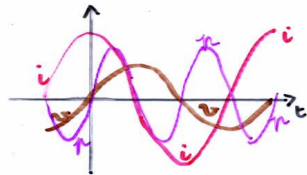
$\Rightarrow p = -V I \cos \omega t \sin \omega t = -VI (\frac{1}{2} \sin 2\omega t) \Rightarrow p_{med} = 0$
O que significa isto?



de 0 a $T/4$, $p < 0$: L perde en. p/ fonte
de $T/4$ a $T/2$, $p > 0$: L recebe en. da fonte
de $T/2$ a $3T/4$, $p < 0$: L perde en. p/ fonte
de $3T/4$ a T , $p > 0$: L recebe en. da fonte
em média: $p_{med} = 0$

gerador + capacitor

A potência fornecida ao capacitor é:
 $p = v i$ com $i = I \cos \omega t$ e $v = v_c = V_c \cos(\omega t - 90^\circ)$
 $\Rightarrow p = \frac{V_c I}{2} \cos \omega t \sin \omega t \Rightarrow \boxed{p_{med} = 0}$

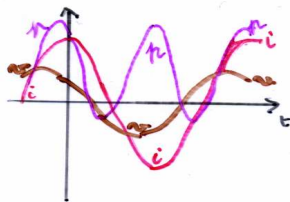


de 0 a $\pi/4$, $p > 0$: o capacitor armazena.
de $\pi/4$ a $\pi/2$, $p < 0$: " " restitua "
de $\pi/2$ a $3\pi/4$, $p > 0$: " " armazena "
de $3\pi/4$ a π , $p < 0$: " " restitua "
em média: $p_{med} = 0$

gerador + RLC em série

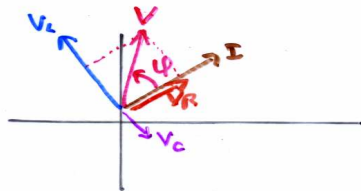
A potência fornecida a RLC é:
 $p = v i = \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t = \sqrt{2} \cos \omega t (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi)$
 $\Rightarrow p_{med} = \frac{V_c I}{2} \cos \varphi \frac{\cos^2 \omega t}{2} - \frac{V_c I}{2} \sin \varphi \frac{\cos \omega t \sin \omega t}{2}$
 $\Rightarrow \boxed{p_{med} = \frac{1}{2} V I \cos \varphi = V_{qm} I_{qm} \cos \varphi}$
fator de potência

Obs:



Como $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$: $p_{med} \geq 0$

[Obs.: podemos re-encontrar os resultados anteriores
resistor puro $\Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow p_{med} = V_{qm} I_{qm}$
indutor puro $\Rightarrow \varphi = 90^\circ \Rightarrow p_{med} = 0$
capacitor puro $\Rightarrow \varphi = -90^\circ \Rightarrow p_{med} = 0$]



Podemos calcular $\cos \varphi$.
 $V \cos \varphi = V_R$ com $V = \sqrt{2} I$ e $V_R = R I$
 $\Rightarrow \boxed{\cos \varphi = \frac{R}{Z}}$

\Rightarrow Outras maneiras de escrever p_{med} (onde p_{med} é potência média):
 $p_{med} = V_{qm} I_{qm} \frac{R}{Z} = \left(\frac{Z I_{qm}}{Z} \right) I_{qm} \frac{R}{Z} = R I_{qm}^2 \Rightarrow$ dissipa-
 $\left(\frac{V_{qm}}{Z} \right) \frac{R}{Z} = V_{qm}^2 \frac{R}{Z^2} \Rightarrow$ pode ser $\frac{R}{Z}$

Ressonância em circuitos de ca.

(20)

Lembrete sobre oscilações

Oscilações são um fenômeno comum (cordas vibrantes de um violão, oscilações das moléculas do ar que transmitem a sensação de som, oscilações dos elétrons nas antenas das transmissões de rádio e televisão, etc). O formalismo que descreve as ondas é universal. Podemos ter:

(i) oscilações livres não amortecidas descritas por:

$$A \frac{d^2x}{dt^2} + Cx = 0 \Rightarrow x(t) \text{ senoidal com freq. angular } \omega_0 = \sqrt{CA}$$

ex.: massa-mola



(ii) oscilações livres amortecidas descritas por:

$$A \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Cx = 0 \Rightarrow x(t) \begin{cases} \text{subcrítico} \\ \text{crítico} \\ \text{super-crítico} \end{cases}$$

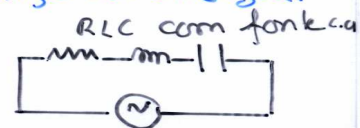
ex.: massa-mola com atrito



(iii) oscilações forçadas

Nas oscilações livres amortecidas, a en. está continuamente dissipada. Para manter um tal sistema oscilando, é preciso injetar energia.

Por ex.: massa-mola com vibrador



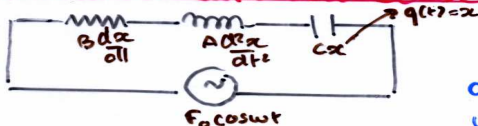
Estes sistemas são descritos por

$$A \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + C x = \underbrace{F_0 \cos \omega t}_{\text{fonte}}$$

ω é uma frequência que depende só da fonte e não do sistema (R, L ou C).

Uma característica dos sistemas com oscilações forçadas é o fenômeno de ressonância: para um certo valor de ω , a resposta do sistema é máxima. Olhamos isto no caso do circuito RLC com fonte de c.a.

Ressonância no circuito RLC com fonte de c.a.



Supomos que a fonte tem amplitude V e freq. ang. ω variável.

Sabemos que :

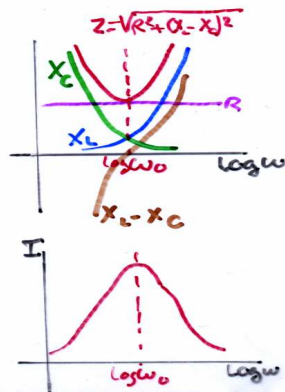
$$v = V \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{tensão da fonte e de RLC})$$

$$i = I \cos \omega t \quad (\text{corrente no circuito})$$

$$V = Z I \text{ com } Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

Podemos desenhar em função de ω :



Z é mínimo quando $X_L = X_C$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0$$

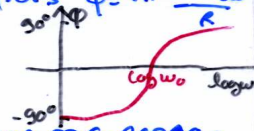
6

Assim I é máximo se $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0$ pois $I = V/Z$.
O fenômeno no qual a amplitude de I atinge seu máximo é chamado "ressonância".

Resonância; $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \Rightarrow Z = R$ e $I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R}$.

ϕ também varia em função de ω pois $\phi = \tan^{-1} \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$ de modo que na ressonância

$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \Rightarrow \phi = 0^\circ$



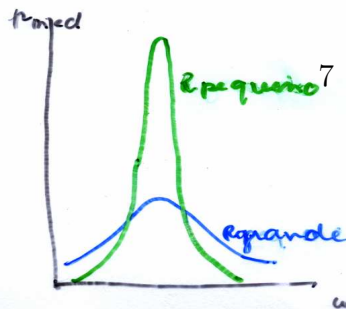
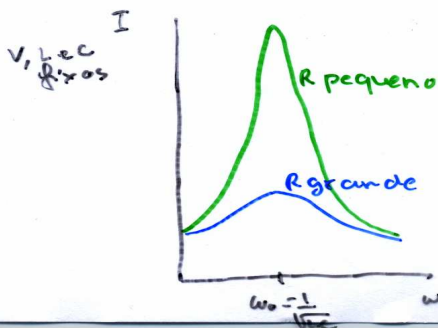
É interessante estudar as voltagens na ressonância. $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \Leftrightarrow X_L = X_C \Leftrightarrow V_L = V_C$. Como a fase entre L e C é 180° ($= +90^\circ - (-90^\circ)$) temos $V_L + V_C = 0$ e $V = V_R$ na ressonância. O circuito se comporta como se não tiver nem L nem C. Assim entendemos melhor porque $\phi = 0^\circ$.

Também é interessante olhar a potência média fornecida pela fonte: $P_{med} = V_{qm} I_{qm} \cos\phi = \frac{V_{qm}^2}{Z} \frac{R}{Z}$
 $= \frac{V_{qm}^2 R}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$

Vemos que P_{med} é máxima na ressonância e vale $\frac{V_{qm}^2}{R}$

Exemplo de aplicação:

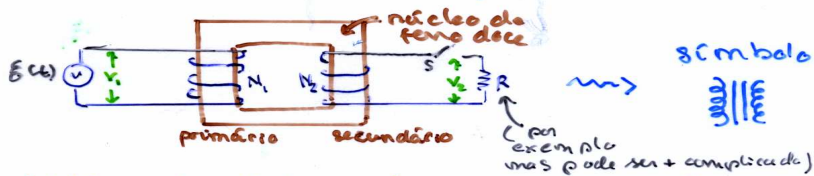
Se podemos variar L ou C, podemos variar a frequência de oscilação. Isso fornece o método para "sintonizar" um receptor de rádio ou televisão para receber uma estação particular. Neste caso ω é fixo mas podemos obter $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ mudando L ou C. Assim obtemos o valor máximo de I.



Um pico agudo (R pequeno) permite discriminar entre 2 estações com freq. adjacentes

Transformadores

Agora vemos que a corrente alternada permite elevar e abaixar o valor da tensão facilmente. isto é útil para transmitir energia elétrica através de distância grande como usina-casa. Para a transmissão é desejável uma corrente pequena (para minimizar as perdas $R I_{qm}^2$ mas como $P_{med} = V_{qm} I_{qm} \cos \phi$ para P_{med} (e R) fixas, precisamos V_{qm} grande. Por outro lado, numa casa, não queremos V_{qm} grande por razão de segurança. A conversão de uma dada voltagem para qualquer outra tensão é obtida por meio de um transformador.



Obs. 1: o objetivo do núcleo de ferro comum aos 2 enrolamentos é aumentar o fluxo magnético e o concentrar de modo que ele passe quase inteiramente de um enrolamento para outro.

Obs. 2: No que segue, supomos um transformador ideal i.e sem perdas de energia de potência (correntes de Foucault, magnetização remanescente, efeito Joule, ...)

Primeiro supomos S aberta. como \mathcal{E} varia existe uma fem induzida no enrolamento primário $-N_1 \frac{d\phi_m}{dt} = \mathcal{E}_1$ e uma fem induzida $-N_2 \frac{d\phi_m}{dt} = \mathcal{E}_2$ no enrolamento secundário. Assim $\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1}$. (\mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 em fase pois vem do mesmo $\frac{d\phi_m}{dt}$)

$\Rightarrow V_2 = V_1 \frac{N_2}{N_1}$ ($\leftarrow \phi_m$ fluxo ^{mesmo} por espira)

Se $N_2 > N_1 \Rightarrow V_2 > V_1$ o transformador é elevador

Se $N_2 < N_1 \Rightarrow V_2 < V_1$ " " " abaixador.

Quando a chave S está fechada, a situação pode ser mais complicada de analisar* (pois passa uma corrente induzida no secundário, daí entra fluxo magnético variável, a fonte tem que mudar a corrente no primário para manter F, etc). Mas em termo de potência é simples. No secundário, há dissipação de energia com uma taxa $V_2 I_2$ (o enrolamento secundário age como fonte). No primário, pode-se mostrar* que a fonte fornece energia com a taxa $V_1 I_1$. Supondo o transformador ideal:

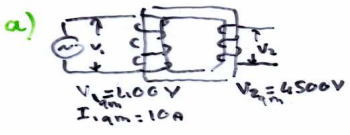
$$V_2 I_2 = V_1 I_1 \quad \text{ou} \quad \boxed{V_2 I_2 = V_1 I_1}$$

Obs.: $I_1 = I_2 \frac{N_2}{N_1} = I_2 \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} \frac{N_2}{N_1} = \frac{V_1}{R} \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = \frac{V_1}{R_{eq}}$ com $R_{eq} = R \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$
 i.e. é como se a fonte fosse ligada a uma resistência R_{eq} .

Exemplo:

um gerador produz uma corrente quadrática média de 10A a 400V. A voltagem é elevada a 4500V por um transformador ideal e transmitida longa distância, através de uma linha de transmissão cuja resistência total é 30Ω

- a) porcentagem da potência original perdida na linha de transmissão?
- b) mesma pergunta se não houvesse elevação da voltagem.



A potência dissipada na linha de transmissão é $R I_2^2$ com $R = 30\Omega$ e $I_2 = I_1 \frac{V_1}{V_2} = 0,89A$, é 24W
 A potência fornecida é $I_1 V_1 = 4000W$

daí a porcentagem $\frac{24}{4000} = 0,6\%$

b) Neste caso a potência dissipada é $30 \times 10^2 = 3000W$ e a porcentagem $\frac{3000}{4000} = 75\%$. isto ilustra a vantagem de usar linhas de transmissão em alta voltagem.

* a seguir

Explicação mais precisa (Tipler v.2 4ª ed. 1995!)

(23')

Com S aberta: a corrente alt. i no circuito 1 está atrasada de 90° em relação a \mathcal{E} (só tem \leftarrow) e

$\pi_{\text{fonte}} = 0$ e não $V_1 I_1$!

Mas aparece duas fems induzidas \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 , em fase pois vem do mesmo $d\Phi_m/dt$: $-\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\mathcal{E}_2}{N_2} = \frac{\mathcal{E}_1}{N_1}$. Sejam V_1 e V_2 suas amplitudes: $V_2 = V_1 \frac{N_2}{N_1}$.

Com S fechada: uma corrente i_2 se estabelece no circuito 2. Ela induz seu próprio fluxo magn. $N_2 \Phi_m$ no núcleo e uma fem em oposição no circuito 1.

Esta fem em oposição deve manter $\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{N_1}$ constante \Rightarrow aparece uma corrente adicional i_1 , causando um fluxo no núcleo. i_1 cancelando $N_2 \Phi_m$.

$\Rightarrow i_1$ e i_2 em oposição de fase

$\Rightarrow i_2$ em fase com $+\mathcal{E}_2$, \mathcal{E}_1 e $-\mathcal{E}$

$\Rightarrow i_1$ em fase com $\mathcal{E} \Rightarrow \pi_{\text{fonte}} = I_1 \cos \phi_1$

No circuito 2, $\pi_2 = I_2 \cos \phi_2$. Supondo $\pi_{\text{fonte}} = \pi_2 \Rightarrow \underline{V_2 I_2 = V_1 I_1}$

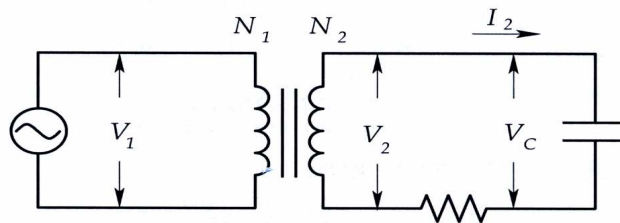


Em geral: $I_1 \gg I_2$ e não se fala de i .

Obs.: para ver como ter um dispositivo de impedância Z no lugar de \mathcal{E} ver por ex. Reitz, Milford e Christy § 13.5.

Questão 3

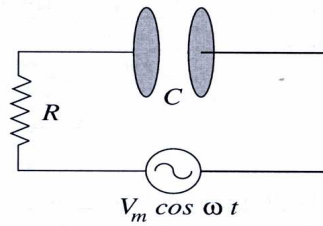
O enrolamento primário de um transformador ideal é alimentado por um gerador de corrente alternada de tensão eficaz (também chamada quadrática média) $V_1 = 200 \text{ V}$ e frequência angular $\omega = 500 \text{ rd/s}$. O secundário é ligado a uma associação em série de um capacitor de $5 \mu\text{ F}$ e um resistor de 300Ω . A corrente eficaz no secundário é $I_2 = 0,1 \text{ A}$.



- (a) (1,0 ponto) Determine a impedância Z_2 (somente o módulo) da associação em série do capacitor e do resistor no secundário, e a tensão eficaz V_2 no secundário.
- (b) (1,0 ponto) Determine a razão N_1/N_2 entre os números de espiras no primário e secundário, e a corrente eficaz no primário.
- (c) (0,5 pontos) Determine a tensão eficaz V_C entre os terminais do capacitor.

Questão 2

O circuito RC mostrado na figura abaixo está ligada a uma fonte de corrente alternada que fornece uma tensão $v(t) = V_m \cos \omega t$.

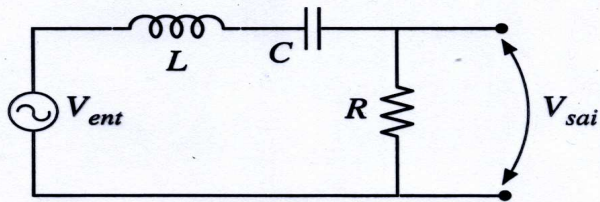


- (a) (0,5 ponto) Qual é a impedância (em módulo) do circuito e o valor de pico da corrente que por ele circula?
- (b) (1,0 ponto) Calcule a razão V_C/V_m entre os valores de pico das tensões no capacitor e na fonte. Se tomarmos a tensão de saída entre os terminais do capacitor, o circuito funciona como um filtro passa-baixas ou como um filtro passa-altas?
- (c) (1,0 ponto) O capacitor da figura é formado por duas placas circulares de raio r no vácuo. Ignore o efeito de bordas. Seja $Q(t) = Q_m \sin(\omega t + \phi)$, onde Q_m é constante, a carga em uma das placas do capacitor. Calcule a corrente de deslocamento I_D entre as placas do capacitor. Dado: o campo elétrico entre as placas do capacitor $E = \sigma/\epsilon_0$, onde σ é a densidade superficial de carga na placa do capacitor.

P2/2008

Questão 2

Em um circuito RLC, a corrente $i = I \cos(\omega t)$ e a voltagem da fonte $v(t) = V_{ent} \cos(\omega t + \phi)$.



- (1,0 ponto) Calcule V_{sai}/V_{ent} , onde V_{sai} é a voltagem máxima no resistor, em função de R , L , C e ω .
- (1,0 ponto) Calcule a frequência de ressonância. Esboce o diagrama V_{sai}/V_{ent} em função de ω , indicando a posição da frequência de ressonância.
- (0,5 ponto) Qual o valor de V_{sai}/V_{ent} quando o circuito está em uma situação de ressonância?