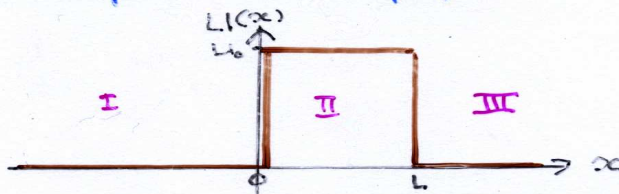


Barreira de potencial e efeito tunel (§ 42.5)

É o oposto de um poço:



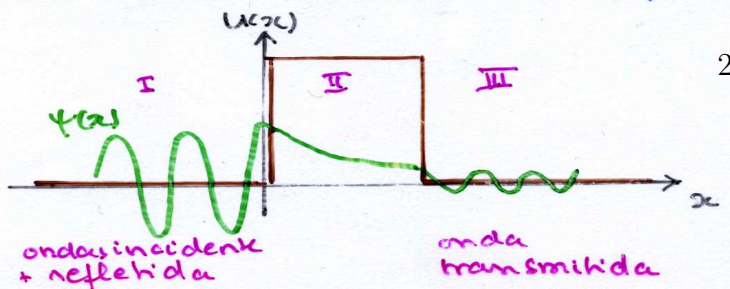
Classicamente, se uma partícula vem da esquerda com $E > U_0$, ela é freada entre $0 \leq x < L$ e continua além de L com sua velocidade inicial. Se uma partícula vem da esquerda com $E < U_0$, ela é refletida. Ela não pode ir além de $x=L$ pois naquela região $E = \hbar^2 k^2 < U_0 \Rightarrow k$ negativa.

Quanticamente, estudaremos o caso $E < U_0$. Veremos que ocorre um fenômeno novo.

Nas regiões I e III; $\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi = -k^2 \psi$
 $\Rightarrow \psi_I$ e ψ_{III} senoidais

Na região II: $\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2} \psi = c^2 \psi$
 $\Rightarrow \psi_{II}$ exponencial

Sem cálculos mais elaborados, podemos desenhar:



Quanticamente, existe alguma probabilidade que a partícula passa do outro lado da barreira, além de L. Isto se chama tunelamento.

A probabilidade ^(relativa) que a partícula atravessa a barreira é chamada coeficiente de transmissão T.

Pode-se mostrar que se $T \ll 1$:

$$T = G e^{-2CL}$$

com

$$C = \sqrt{2m(U_0 - E)} / \hbar$$

$$G = 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right)$$

O coeficiente de reflexão é $R = 1 - T$.

Como esperado, se L for grande ou $U_0 - E$ grande (i.e. E pequena), T será pequena.

Exemplo: calcular a probabilidade de tunelamento para um elétron de energia 2,0 eV, incidindo sobre uma barreira de altura 5,0 eV e espessura 0,5 nm.

Temos $E = 2,0$ eV (energia cinética)

$$U_0 = 5,0 \text{ eV}$$

$$L = 0,5 \text{ nm}$$

$$\Rightarrow G = 3,8$$

$$C = \frac{\sqrt{2 \times (9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) \times (3 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J})}}{1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 8,9 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$\Rightarrow T = 3,8 e^{-2 \times 8,9 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1} \times 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 5,2 \cdot 10^{-4}$$

Existem muitos exemplos de tunelamento:

(i) decaimento α

Uma forma de desintegração radioativa é a emissão de um α (núcleo de hélio) por núcleos pesados instáveis.

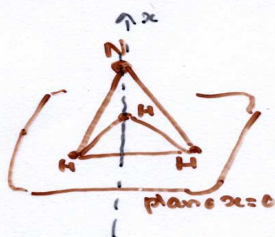
Para que o α possa escapar, ele tem que vencer uma barreira provocada pela combinação força nuclear atrativa - força coulombiana repulsiva.

Classicamente: o α não escapa.

Quanticamente: o α pode ser emitido de vez em quando em acordo com a observação.

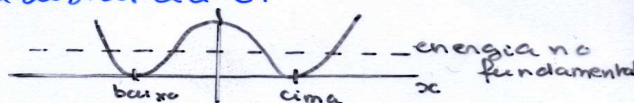
[foi a 1ª aplicação da ideia de tunelamento.]

(ii) Inversão periódica da molécula de NH_3 (amônia)



N pode estar acima ou abaixo em relação ao plano.

O potencial para N como função da distância é:



Classicamente: N fica onde está

Quanticamente: N oscila entre cima e baixo
(foi usado p/ fazer relógios.)

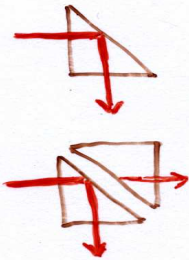
(iii)

diodo tunel: dispositivo semicondutor no qual elétrons tunelam através de uma barreira de potencial

junção Josephson: dispositivo onde há tunelamento de pares de elétrons entre 2 supercondutores

microscópio de varredura por tunelamento: entre ponta de prova e amostra, há uma corrente eletrônica de tunelamento.

O tunelamento também, é uma propriedade de onda em geral. Ocorre por exemplo para a luz.



Reflexão chamada de total da luz num bloco de vidro ($\theta_i \geq \theta_c = \text{sen}^{-1} \frac{n_2}{n_1}$) isto é baseado no tratamento geométrico. Na realidade, devido à sua natureza ondulatória, se colocarmos outro prisma, a luz pode tunelar no ar e aparece luz transmitida (= "frustrated total internal reflection" nos filmes por ex. em youtube, as aplicações como "multitouch display")

O oscilador harmônico (§42.6)

Olhamos o caso de uma partícula num campo de força associado à energia potencial $U(x) = \frac{1}{2} k' x^2$.

Classicamente $F = -k'x = m \frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ com $\omega = \sqrt{k'/m} \Rightarrow x(t) = A \text{sen}(\omega t + \phi)$: a partícula oscila a redor da posição de equilíbrio $x=0$ e sua trajetória é bem definida. Ela conserva sua energia $E = k'x^2$ (sendo $E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$ é só en. cinética em $x=0$ e $E = \frac{1}{2} k' A^2$ é só en. potencial em $x=\pm A$). Todos os valores de E são permitidos, fm partícula em $E=0$ (= partícula em repouso em $x=0$).

Quanticamente temos que resolver:

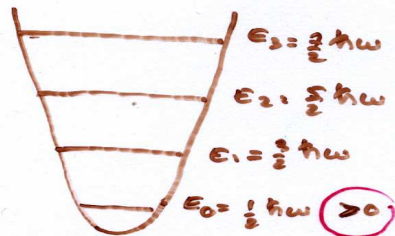
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = - \left[\frac{2m}{\hbar^2} E - \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 x^2 \right] \psi.$$

Este problema pode ser resolvido analiticamente.

As energias são quantizadas (claro):

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$$

com
 $n = 0, 1, \dots$
 $\omega = \sqrt{k'/m}$



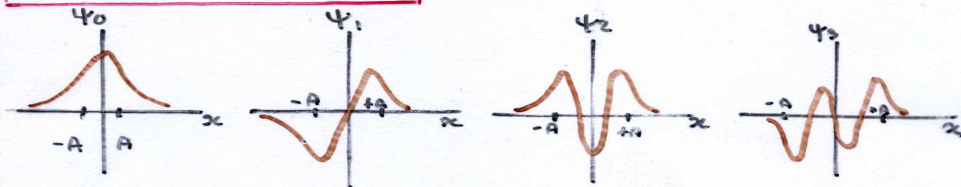
As funções de onda são do tipo:

$$\Psi_n(x) = P_n(x) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

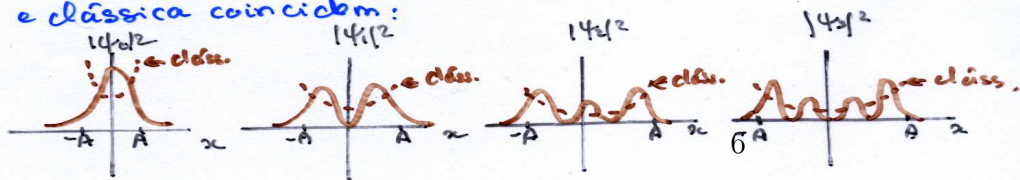
polinômio

(i) Cada Ψ_n tem n ^{de amp. máxima} nós.
 A é obtida resolvendo:
 $E = \frac{1}{2} k' A^2 = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$

(ii) Cada Ψ_n penetra em $|x| > A$ o que é proibido classicamente.



Para n grande, as distribuições de probabilidade quântica e clássica coincidem:



Vários problemas podem ser aproximados com um oscilador (ex. vibração de uma molécula diatômica)

Exemplo:

Um átomo de sódio de massa $3,82 \cdot 10^{-26}$ kg vibra com movimento harmônico simples no cristal.

A energia potencial cresce de 0,0075 eV quando o átomo é deslocado de 0,014 nm a partir de sua posição de equilíbrio.

- Calcule a frequência angular da mecânica clássica
- Determine o espaçamento entre níveis de energia consecutivos
- Se um átomo emite um fóton durante a transição de um estado vibracional ao seguinte mais baixo, qual é o comprimento de onda deste fóton.

$$a) U = \frac{1}{2} k' x^2 \Rightarrow k' = \frac{2U}{x^2} = \frac{2 \times 1,2 \cdot 10^{-21} \text{ J}}{(0,014 \cdot 10^{-9} \text{ m})^2} = 12,2 \text{ N/m}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{k'/m} = \sqrt{12,2 / (3,82 \cdot 10^{-26})} = 1,79 \cdot 10^{13} \text{ rad/s}$$

$$b) E_{n+1} - E_n = \hbar \omega = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \times 1,79 \cdot 10^{13} \text{ rad/s} = 1,89 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,0118 \text{ eV}$$

$$c) \text{ A energia do fóton é } 0,0118 \text{ eV mas isto vale para } \lambda = \frac{4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eV s} \times 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{0,0118 \text{ eV}} = 105 \mu\text{m}.$$

P3

Física IV
Escola Politécnica - 2006
FAP 2204 - GABARITO DA P3
5 de dezembro de 2006

Questão 1

Uma partícula de massa m executa oscilações harmônicas, em uma dimensão, num potencial $U(x) = m\omega^2 x^2/2$.

- (a) (0,5 ponto) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para a partícula.
- (b) (1,0 ponto) Considere a função de onda $\psi(x) = Ae^{-bx^2}$, onde A e b são constantes. Determine o valor de b para que ψ seja solução da equação do item (a). Qual é o valor da energia associada a esta função de onda?
- (c) (1,0 ponto) Calcule a constante de normalização A . Dado: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\pi/\alpha}$