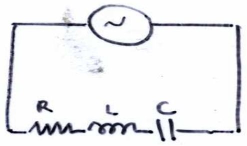
Circuito RLC em série



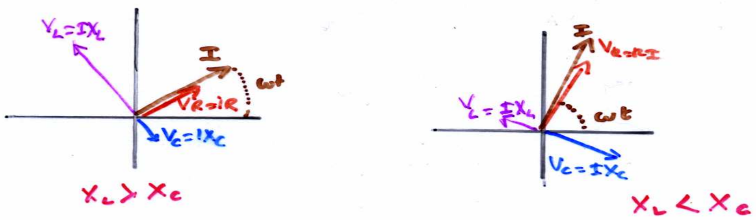
A fonte fornece uma corrente
$i = I\cos\omega t$ (em todo o circuito).
Sabemos calcular (cf. a aula anterior)
$v_R = V_R\cos\omega t$ com $V_R = RI$ $\leftarrow v_R = Ri$
$v_L = V_L\cos(\omega t + 90°)$ com $V_L = X_L I$ e $X_L = L\omega$ $\leftarrow v_L = L\frac{di}{dt}$
$v_C = V_C\cos(\omega t - 90°)$ com $V_C = X_C I$ e $X_C = \frac{1}{C\omega}$ $\leftarrow v_C = \frac{q}{C}$

Queremos calcular:

$$v = v_R + v_L + v_C$$

isto é, queremos conhecer sua amplitude V e sua fase φ em relação a i: $\boxed{v = \underset{??}{V}\cos(\omega t + \underset{??}{\varphi})}$

Isto pode ser representado pelos fasores seguintes:



A soma das projeções destes fasores é v.
Ela é também a projeção da soma vetorial dos fasores.

Inicialmente substraímos o fasor para C do fasor para L
obtemos um fasor de módulo $V_L - V_C$ ou $V_C - V_L$.
Com o teorema de Pitágoras: $V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$

Podemos re-escrever: $V = I\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2} = Z I$
com $Z = \sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$ se chama impedância e se expressa em Ohm.

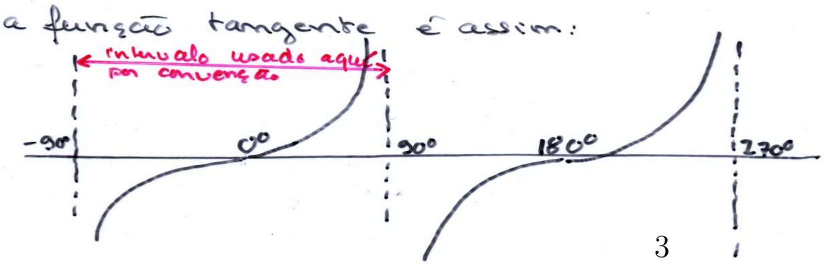
Obs.: para qualquer circuito, pode-se definir a impedância como a razão entre amplitude da voltagem que alimenta o conjunto de elementos do circuito e a amplitude da corrente que passa no circuito equivalente ao conjunto: $Z = \frac{V}{I}$ ← geral
mas
$Z = \sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$ só vale para RLC em série.

Com os diagramas de fasores obtemos também:

$$\tan\varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

se $X_L > X_C$, φ é positivo (entre 0 e 90°)
v é adiantada em relação a i "L domina"
se $X_C > X_L$, φ é negativo (entre -90° e 0)
v é atrasada em relação a i "C domina"

Obs. 1: a função tangente é assim:



Obs. 2:
se não tiver resistor, fazer $R=0$ ($\rightarrow v_R = 0$)
se não tiver capacitor, fazer $X_C = 0 \Leftrightarrow C = \infty \Rightarrow v_C = 0$
se não tiver indutor, fazer $X_L = 0 \Leftrightarrow L = 0 \Rightarrow v_L = 0$

Obs. 3: $V_{qm} = Z\, I_{qm}$

Exemplo

Supor um circuito RLC em série com $R = 300\Omega$, $L = 60mH$, $C = 0,50\mu F$, $V = 50V$, $\omega = 10000 rad/s$.

a) X_L, X_C, Z, I, φ, V_R, V_L, V_C ?

$X_L = \omega L = 600\Omega$

$X_C = \frac{1}{\omega C} = 200\Omega \Rightarrow$ L domina, φ deve ser > 0

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 500\Omega$

$I = \frac{V}{Z} = \frac{50}{500} = 0,10 A$

$\varphi = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R} = 53^o$ (entre 0 e 90^o como esperado)

$V_R = IR = 30V$, $V_L = I X_L = 60V$, $V_C = I X_C = 20V$

b) i, v_R, v_L, v_C, v ?

$i = I \cos\omega t$ com $I = 0,10A$ e $\omega = 10000 rad/s$

$v_R = V_R \cos\omega t$ com $V_R = 30V$ " "

$v_L = V_L \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ com $V_L = 60V$ " "

$v_C = V_C \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ com $V_C = 20V$ " "

$v = V \cos(\omega t + \varphi)$ com $V = 50V$, $\varphi = 53^o = 0,93 rad$ " "

Obs.: $v = v_R + v_L + v_C$ mas $V \neq V_R + V_L + V_C$ pois os fasores não estão em fase.

Circuitos AC usando números complexos

Consideremos um circuito qualquer com uma fonte c.a. que fornece uma corrente $i_{co} = I\cos\omega t$.

Esta corrente é a parte real da quantidade complexa: $\boxed{\tilde{i}_{co} = I e^{i\omega t}}$

A voltagem fornecida pela fonte deve ser do tipo $v = V\cos(\omega t+\varphi)$, pois espera-se que v oscila com a mesma frequência que i, porém não necessariamente com a mesma fase.
Isto é a parte real de

$\boxed{\tilde{v} = \bar{V} e^{i\omega t}}$ com $\bar{V}$ complexo que pode ser escrito $\boxed{\bar{V} = V_m e^{i\varphi}}$ com V real

(Obs.: considerar a projeção sobre x de um fasor é equivalente a olhar a parte real do complexo)

Circuito com resistor:

$Ri = v_R \rightsquigarrow R\tilde{i}_{co} = \tilde{v} \Leftrightarrow RIe^{i\omega t} = V_R e^{i\varphi} e^{i\omega t}$

daí (igualando as normas)

$V_R = RI$ e $\varphi = 0$ como esperado

Circuito com indutor

$v_L = L\frac{di_{co}}{dt} \rightsquigarrow \tilde{v}_L = L\frac{d\tilde{i}_{co}}{dt} \Leftrightarrow V_L e^{i\varphi}e^{i\omega t} = Li\omega I e^{i\omega t} = L\omega I e^{i\omega t + i\frac{\pi}{2}}$

daí (igualando as normas)

$V_L = L\omega I$ e $\varphi = \pi/2$ como esperado

Circuito com capacitor

$v_c = \frac{q}{c}$ e $i_{co} = \frac{dq}{dt} \rightsquigarrow \tilde{v}_c = \frac{\tilde{q}}{c}$ e $i_{co} = \frac{d\tilde{q}}{dt} = I e^{i\omega t}$

$\Rightarrow \tilde{q} = \frac{I}{i\omega} e^{i\omega t} = \frac{I}{\omega} e^{i\omega t - i\frac{\pi}{2}}$ e $\tilde{v}_c = \frac{I}{c\omega} e^{i\omega t - i\frac{\pi}{2}}$

daí (igualando as normas)

$V_c = \frac{I}{c\omega}$ e $\varphi = -\pi/2$ como esperado

13

Circuito RLC em série

$$v = v_R + v_L + v_C \rightsquigarrow V e^{i\varphi} e^{i\omega t} = V_R e^{i\omega t} + V_L e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} + V_C e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$$\Rightarrow V e^{i\varphi} = V_R + i(V_L - V_C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = I \underbrace{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}_{Z} \\ \operatorname{tn}\varphi = \dfrac{V_L - V_C}{V_R} = \dfrac{X_L - X_C}{R} \end{cases}$$ como esperado

P1

Física IV - 4320402

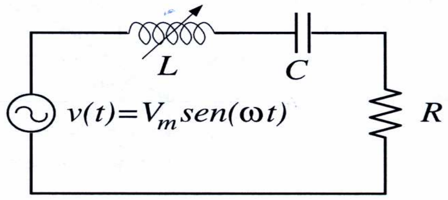
Escola Politécnica - 2010

GABARITO DA P1

31 de agosto de 2010

Questão 1

Considere o circuito RLC série mostrado na figura abaixo



O gerador de corrente alternada fornece uma tensão $v(t) = V_m \text{sen}(\omega t)$. A indutância L é variável e é ajustada de tal forma que a defasagem entre a voltagem do gerador e corrente no circuito é zero. Os valores de V_m, ω, C e R são conhecidos.

(a) (0,5 ponto) Qual é o valor de L? Justifique.

(b) (1,0 ponto) Construa o diagrama de fasores das voltagens no gerador, no indutor, no capacitor e no resitor, e da corrente no circuito. Qual a relação entre as voltagens máximas no resistor e no gerador? Justifique sua resposta.

(c) (0.5 ponto) Calcule a potência média dissipada no resistor. 7

(d) (0.5 ponto) Se substituirmos a resistência R por uma lâmpada de resistência $r < R$, para qual valor de L a lâmpada brilha com máxima intensidade?

P1

FÍSICA IV - FAP2204

Escola Politécnica - 2009

GABARITO DA P1

22 de setembro de 2009

Questão 1

Um circuito RLC em série é alimentado por uma fonte que fornece uma tensão $v(t) = V_m \cos \omega t$. O valor da tensão de pico no resistor (V_R) é igual ao valor da tensão de pico no indutor (V_L) e duas vezes maior do que o valor da tensão de pico no capacitor (V_C).

(a) (1,0 ponto) Desenhe o diagrama de fasores do circuito indicando claramente os fasores correspondentes a V_R, V_L, V_C, V_m e I_m (valor de pico da corrente no circuito).

(b) (1,0 ponto) A partir do diagrama de fasores, ou usando complexos, calcule a impedância Z (em módulo) e a defasagem ϕ da corrente em relação à tensão na fonte.

(c) (0,5 ponto) Para qual valor da capacitância C a potência dissipada no circuito é máxima? Expresse sua resposta em termos de ω e L.

8

P1

Física IV

Escola Politécnica - 2008

FAP 2204 - GABARITO DA P1

16 de setembro de 2008

Questão 1

Em um certo circuito RLC em série a corrente máxima e a voltagem máxima são dadas por $I_m = 9\,A$ e $V_m = 180\,V$, respectivamente. A corrente $i(t) = I_m \cos(\omega\, t)$ está adiantada de 45° em relação à voltagem da fonte $v(t) = V_m \cos(\omega\, t + \phi)$.

(a) (0.5 ponto) Desenhe o diagrama de fasores das correntes e voltagens em cada um dos elementos.

(b) (1,0 ponto) Calcule a impedância, a resistência e reatância $X_L - X_C$.

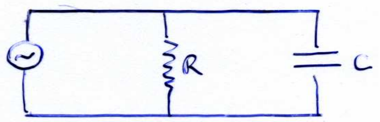
(c) (0,5 ponto) Calcule a potencia média fornecida pela fonte. ← próxima aula

(d) (0,5 ponto) Escreva a expressão da voltagem $v_L(t)$ no indutor, explicitando o ângulo de defasagem em relação à corrente. Dê sua resposta em função apenas do valor L da indutância e de ω.

16'

Circuito RC em paralelo (Tipler cap. 31, ex. 77)

Um resistor e um capacitor são ligados em série a uma fonte de tensão senoidal $v = V\cos\omega t$.



a) Mostre que a corrente no resistor é dada por $i_R = \frac{V}{R}\cos\omega t$.

b) Mostre que a corrente no capacitor é dada por $i_C = \frac{V}{X_C}\cos(\omega t + 90°)$

c) Mostre que a corrente total $i = i_R + i_C = I\cos(\omega t + \delta)$ com $\tan\delta = R/X_C$ e $I = V/Z$ com $\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{X_C^2} + \frac{1}{R^2}}$