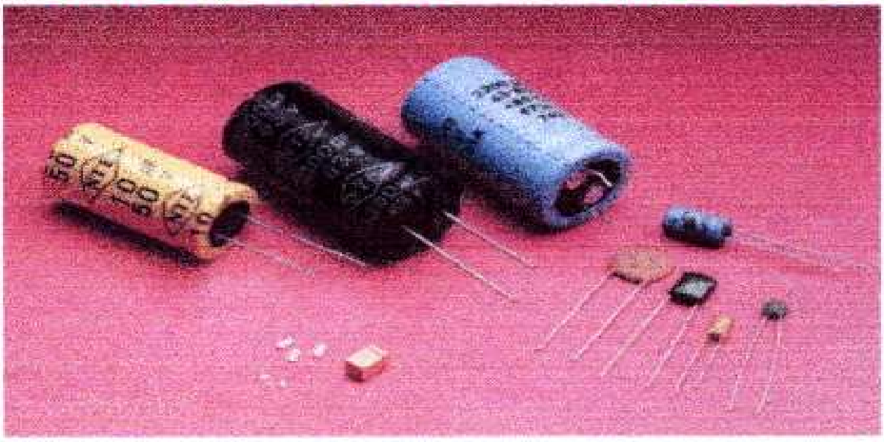
CAPACITÂNCIA e DIELÉTRICOS



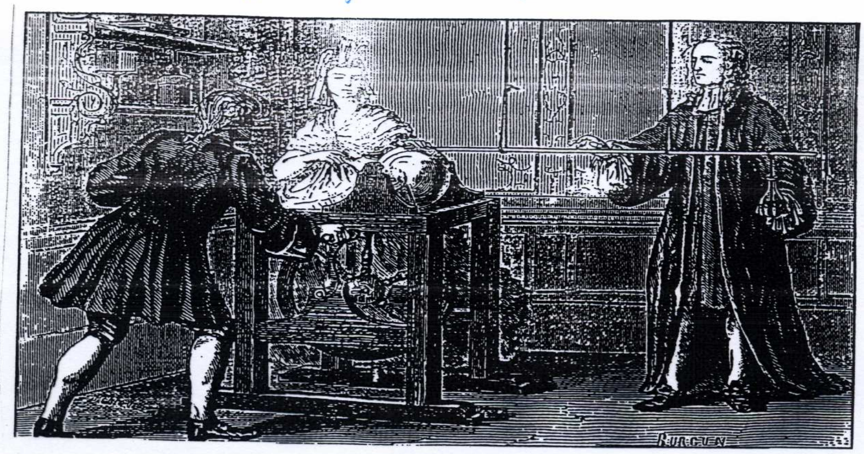
Introdução

Pode-se armazenar energia sob forma de energia potencial ao comprimir uma mola ou puxar a flecha para trás encurvando um arco. Um capacitor é um dispositivo para armazenar energia sob forma de energia potencial elétrica.

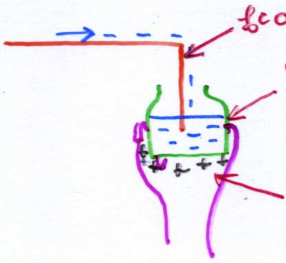
Capacitores tem muitos usos: nos "flashes" de máquina fotográfica, sintonizar rádios, amortecer "ondulações" ao se converter corrente alternada em corrente contínua, etc.

Eles vem numa grande variedade de tamanhos e formas.

OBJETIVO: calcular capacitancia e energia armazandada

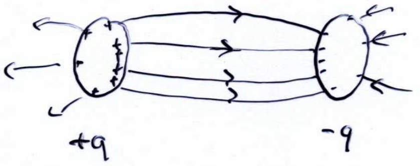


20 de abril de 1746, leyden (Holanda):
O Prof. Pieter van Musschenbroek tentava introduzir carga elétrica num frasco de água. Ele carregava a bengala metálica com a esfera isolante atritada e um estudante segurava o frasco. Quando o estudante esbarrou na bengala com a outra mão, levou um violento choque. Repetiram a experiência, trocando de papeis e Pieter levou um choque ainda maior (o estudante se desforrou...)
O frasco de água carregada foi o primeiro capacitor. Pieter e o estudante levaram um choque quando este capacitor se descarregou via seus corpos.



Capacitância

Os elementos básicos de qualquer capacitor são dois condutores isolados separados por vácuo ou um isolante.
Quando o capacitor é carregado, suas placas adquirem cargas cargas iguais $+q$ e $-q$.



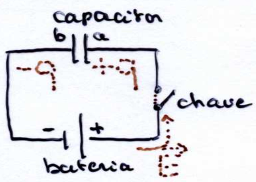
Chamamos V a diferença de potencial entre os condutores.
Por definição $\boxed{C = \frac{q}{V} \quad \text{capacitância}}$

No S.I. a unidade é 1 farad $= 1F = \frac{1C}{1V}$

Em geral aparecem submúltiplos como o $\mu F = 10^{-6} F$, o $pF = 10^{-12} F$, ...)

V é proporcional a q, de modo que a carga some de C. C só depende da geometria.

[Como carregar um capacitor?
Pode-se usar uma bateria (dispositivo que mantem uma certa ddp entre seus terminais, por causa de reações eletroquímicas internas)



O lado da bateria com menor potencial é denotado $-$ e o de maior potencial $+$. Inicialmente o capacitor é descarregado (S aberta). Com S fechado, uma carga $+q$ se acumula em a e $-q$ em b. (A corrente cessa quando a ddp entre as placas iguala a da bateria.)]

Cálculo da capacitância (capacitor no vácuo)

Estratégia:

(i) supor que a carga sobre as placas é $\pm q$

(ii) calcular $\vec{E}$ entre as placas em função de q (em geral com a lei de Gauss)

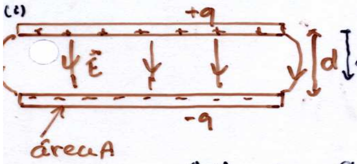
(iii) usar $\vec{E}$ para calcular V, a ddp entre as placas ($V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E}\cdot d\vec{l}$ *)

(iv) calcular $C = q/V$

* $+q \rightarrow V_+$
$-q \rightarrow V_-$ ($< V_+$)

• Capacitor de placas paralelas

(i)



(ii) Usando a lei de Gauss, obtém-se $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}$
aqui $\sigma = \frac{q}{A}$

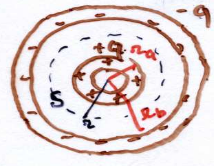
(iii) $\underbrace{V = V_+ - V_-}_{>0} = -\int_-^+ \vec{E}\cdot d\vec{l} = -E\int_-^+ dz = Ed$

(iv) $C = \frac{q}{V} = \frac{q}{Ed} = \frac{q}{qd}A\varepsilon_0 = \varepsilon_0\frac{A}{d}$ | capacitor de placas paralelas, no vácuo |

Obs.: C só depende da geometria.

• Capacitor esférico

(i)



(ii) Com a lei de Gauss aplicada a S: $\vec{E} = \frac{+q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\hat{r}$

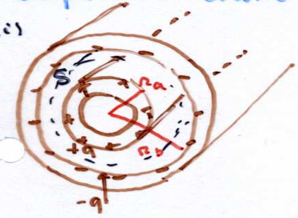
(iii) $V = -\int_{r_b}^{r_a} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_b}^{r_a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}\right)$

(iv) $C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0\frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$

• Capacitor cilíndrico

(i)



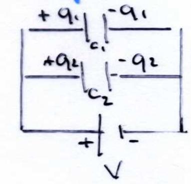
(ii) com a lei de Gauss aplicada a S
$\Phi = E\,2\pi r\ell = \frac{q\ell/L}{\varepsilon_0}$ com ℓ comprimento do cilindro de Gauss $\Rightarrow \vec{E} = \frac{q/L}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$

(iii) $V = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{q/L}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{q/L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$

(iv) $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(r_b/r_a)}$

Combinações de capacitores

• Capacitores em paralelo

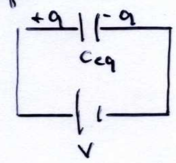


Quando a bateria está ligada, as placas de esquerda de C_1, C_2 e os fios condutores de esquerda adquirem o potencial do terminal +. Da mesma maneira, as placas e fios da direita adquirem o potencial do terminal -.

Assim a ddp de C_1, C_2 e da bateria são iguais. (quando os capacitores estão carregados).

Chamamos $q = q_1 + q_2$. Esta é a carga "bombada" pela bateria.

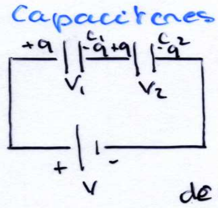
Procuramos o capacitor equivalente C_{eq} que tenha o mesmo efeito no circuito do que C_1 e C_2 em paralelo.



$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{q_1}{V} + \frac{q_2}{V} = C_1 + C_2$$

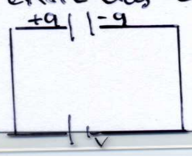
de modo geral $\boxed{C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i \text{ para } N \text{ capacitores em paralelo}}$

• Capacitores em série



Primeiro mostramos que $q_1 = q_2 = q$.

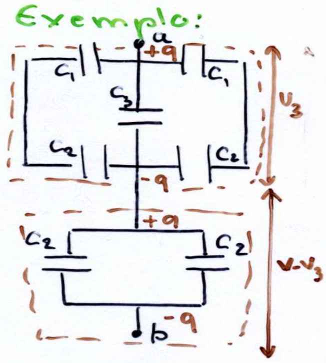
Quando a bateria é ligada, ela age como uma "bomba" de eletrons, transferindo eletrons da placa esquerda de C_1 para a placa direita de C_2. A medida que cargas negativa se acumulam na placa direita de C_2, cargas negativas em mesma quantidade saem da placa esquerda de C_2 e vão para a placa direita de C_1. Daí o resultado anunciado. Além disto, a placa esquerda de C_1 chega ao pot. do terminal + e a placa direita de C_2 ao pot. do terminal -. As placas direita de C_1, esquerda de C_2 e fio condutor entre elas estão no mesmo potencial. Assim $V = V_1 + V_2$



$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{q}{V_1 + V_2} = \frac{1}{\frac{V_1}{q} + \frac{V_2}{q}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

de modo geral $\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \text{ para } N \text{ capacitores em série}}$

Exemplo: $|V_a - V_b| = 60V$ $C_1 = 5\mu F$ $C_2 = 10\mu F$ $C_3 = 2\mu F$.
Carga armazenada em C_3?



$q_3 = C_3 V_3 \Rightarrow$ Precisamos calcular V_3.

Podemos dividir o circuito em 2.
Para o circuito de baixo:

$C_2^{eq} = 2C_2 = \frac{q}{V-V_3}$ com $V = |V_a - V_b|$

Para o circuito de cima

$C_{123}^{eq} = 2C_{12}^{eq} + C_3 = \frac{q}{V_3}$ com $C_{12}^{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$

assim:

$q = 2C_2(V-V_3) = \left(2\frac{C_1C_2}{C_1+C_2} + C_3\right)V_3 \Rightarrow V_3 = \frac{2C_2V}{2\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}+C_3+2C_2}$

e

$q_3 = C_3V_3 = \frac{2C_3C_2V}{2\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}+C_3+2C_2} = 83,7\ \mu C$

86

Energia armazenada num capacitor carregado

Para carregar um capacitor, um agente externo deve realizar trabalho. Este trabalho é armazenado sob forma de energia potencial elétrica e pode ser recuperado: $W_{ext} = U_{armazenada}$

Suponhamos que $q' \geq 0$ já tem sido transferida da placa − para a +. Tem um campo el. entre as placas e uma ddp V'. Para transferir dq' temos que fazer o trabalho $dW_{ext} = V'dq' = \frac{q'}{C}dq'$ daí $W_{ext} = \int dW_{ext} = \frac{1}{C}\int_0^q q'dq' = \frac{1}{C}\left[\frac{q'^2}{2}\right]_0^q = \frac{q^2}{2C}$, assim:

$$\boxed{U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2}$$

energia pot. armazena

(= trabalho p/ carregar)

Podemos supor que esta energia é armazenada no campo elétrico entre as placas. No caso de um capacitor de placas paralelas, a energia ocuparia um volume dA daí a densidade de energia:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{U}{d \cdot A} = \frac{1}{dA}\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{A}{d}(dE)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

Esta relação vale para qualquer capacitor no vácuo e mesmo para qualquer campo elétrico no vácuo.

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

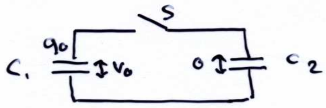
densidade de energia elétrica no vácuo

Exemplo

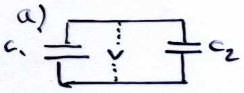
Um capacitor C_1 de $3{,}55\,\mu F$ é carregado e chega a uma ddp $V_0 = 6{,}30\,V$. Ele é então ligado como mostra a figura, a um capacitor descarregado C_2 de $8{,}95\,\mu F$. Quando a chave S é fechada, carga flui de C_1 para C_2 até os capacitores ter a mesma ddp V.

a) Valor de V?

b) Energia potencial de C_1 e C_2 antes e depois de fechar S.



a)



$$\begin{cases} q_1 = C_1 V \\ q_2 = C_2 V \\ q_1 + q_2 = q_0 = C_1 V_0 \end{cases} \Rightarrow (C_1 + C_2)V = C_1 V_0 \Rightarrow V = \frac{C_1 V_0}{C_1 + C_2} = 1{,}79\,V$$

b) Inicialmente só C_1 está carregado: $U_i = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 = 7{,}04\, 10^{-5}\,J$

Depois de fechar S: $U_f = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2 = 2{,}00\, 10^{-5}\,J$

($U_f < U_i$ pois parte da en. pot. inicial aparece como en. térmica nos fios de ligação.)

EXEMPLO DE FORMULARIO

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \quad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$\vec{p} = q\vec{d}, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad U = qV, \quad C = Q/V,$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

P2

Física III - 4320203

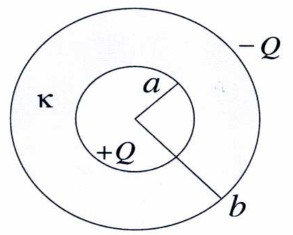
Escola Politécnica - 2010

GABARITO DA P2

13 de maio de 2010

Questão 1

Considere um capacitor esférico formado por um condutor interno de raio a e um condutor externo de raio b, conforme a figura. ~~O espaço entre os condutores é preenchido com material de constante dielétrica κ.~~



Carrega-se o condutor interno com carga $+Q$ e o externo com carga $-Q$ (cargas livres). O campo elétrico devido apenas a essas cargas livres é

$$\vec{E}_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r}\,,$$

onde r é a distância ao centro do capacitor esférico.

(a) (0,5 ponto) Derivar ~~Escreva~~ a expressão do vetor campo elétrico ~~dentro do dielétrico~~ ($a < r < b$).

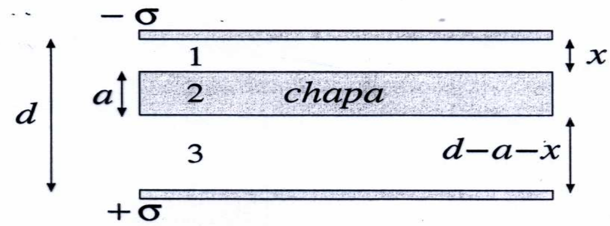
(b) (1,0 ponto) Calcule a energia U_0 armazenada no capacitor na ausência de dielétrico (em função de a, b, Q e ϵ_0), e a energia U na presença do dielétrico (em função de a, b, Q, ϵ_0 e κ).

~~(c) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}_i$ devido somente às cargas induzidas (ligadas) no dielétrico.~~

2009

Questão 4

As placas condutoras de um capacitor plano têm área A, estão separadas por uma distância d, e têm uma densidade superficial de carga σ. Entre estas placas coloca-se uma chapa condutora de área A e espessura a, conforme mostra a figura.



Nos itens abaixo, ignore o campo elétrico nas bordas dos condutores.

(a) (1,0 ponto) Usando a lei de Gauss, calcule o campo nas regiões 1, 2 e 3 entre as placas do capacitor (veja a figura). Em seguida, calcule a diferença de potencial entre as placas.

(b) (0,5 ponto) Mostre que a capacitância do sistema formado pelo capacitor e pela chapa metálica independe da distância x entre a chapa e a placa superior do capacitor.

(c) (1,0 ponto) Usando a expressão para a densidade de energia por unidade de volume, $u_e = \epsilon_0 E^2/2$, calcule a energia armazenada no capacitor.

P2

Física III

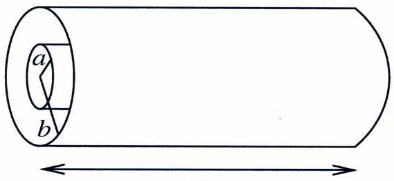
Escola Politécnica - 2009

FGE 2203 - GABARITO DA P2

14 de maio de 2009

Questão 1

Considere um capacitor cilíndrico de raio interno $\underline{a}$, raio externo $\underline{b}$ e comprimento $L >> b$, conforme a figura.



Sejam $+Q$ e $-Q$ as cargas livres nos cilindros de raios a e b, respectivamente. ~~O espaço entre os cilindros é inteiramente preenchido com um material de constante dielétrica~~ $\cancel{\kappa}$~~.~~ Ignorando-se a região das bordas, campo elétrico entre os cilindros na ausência do dielétrico é dado por

$$\vec{E}_0 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}\,\hat{e}_r.$$

(a) (0,5 ponto) Deriver ~~Determine~~ o vetor campo elétrico ~~dentro do dielétrico~~ $(a < r < b)$.

(b) (1,0 ponto) Calcule, a partir da definição, a capacitância na ausência do dielétrico ~~e com o dielétric~~o.

~~(c) (1,0 ponto) Determine as densidades superficiais de carga induzidas~~ $\cancel{\sigma_i}$ ~~no dielétrico devido à polarização em~~ $\cancel{r = a}$ ~~e em~~ $\cancel{r = b}$~~.~~

2008

Questão 4

Considere um capacitor de placas paralelas de área A separadas por uma distância d.

(a) (1,0 ponto) Entre as placas do capacitor há um campo elétrico $E = \sigma/\epsilon_0$, onde σ é a densidade superficial de carga nas placas. A partir de E, calcule a diferença de potencial entre as placas e deduza a expressão da capacitância para o capacitor de placas paralelas. Dê sua resposta em termos de ϵ_0, d e A.

Este capacitor é carregado com um bateria até que a diferença de potencial entre as placas seja igual a V. Em seguida, a bateria é desconectada e as placas do capacitor são separadas até uma distância $2d$.

(b) (0,5 ponto) Calcule a razão V'/V, onde V' é a diferença de potencial entre as placas após elas serem afastadas.

(c) (1,0 ponto) Calcule o trabalho gasto para separar as placas.