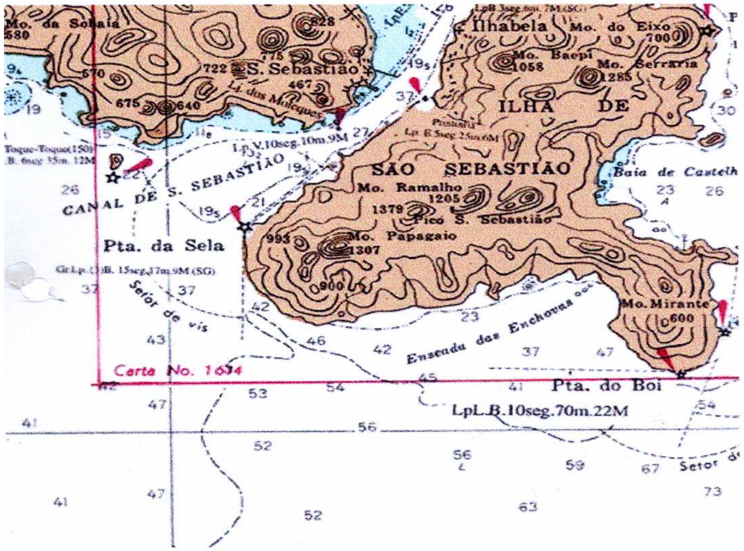
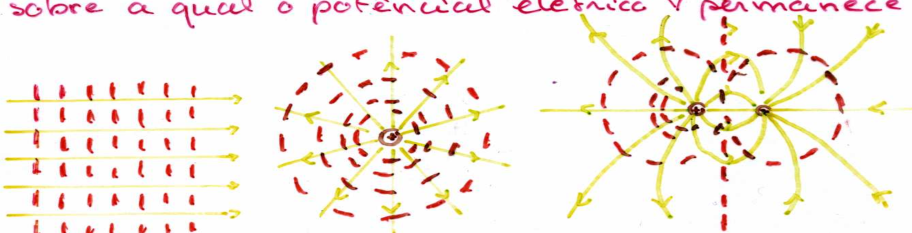
Superfícies equipotenciais

Num mapa topográfico, as linhas de contorno ligam pontos com a mesma altura, i.e. correspondendo a uma mesma energia potencial gravitacional mgy.



As linhas de contorno muito agrupadas indicam variações de altura grandes.

Por analogia, na eletricidade, uma superfície equipotencial é uma superfície em 3 dimensões sobre a qual o potencial elétrico V permanece constante.



Propriedades:

(1) Não precisa fazer trabalho para deslocar uma carga sobre uma equipotencial [$\Delta V = 0 : W$]

(2) V decresce no sentido onde $\vec{E}$ aponta [cf. aula anterior e embaixo]

(3) As equipotenciais são $\perp \vec{E}$

[Para qualquer deslocamento $d\vec{l}$ dentro de uma equipotencial, $\underbrace{dV = 0}_{(1)} = -\underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{l}}_{(3)}$]

REVISÃO: GRADIENTE

Derivada "ordinária"

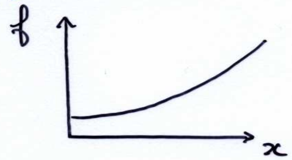
Para uma função $f(x)$ de 1 variável, o que faz $\frac{df}{dx}$?

Se mudarmos x de dx i.e. $x \to x + dx$

então f muda de df i.e. $f \to f + df$

com $\boxed{df = \frac{df}{dx}\, dx}$

Graficamente:



$\frac{df}{dx}$ é a inclinação

Gradiente

Para uma função $f(x,y,z)$ de 3 variáveis,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

[soma das variações nas 3 direções]

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\right)}_{\equiv \vec{\nabla} f} \cdot \underbrace{\left(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}\right)}_{d\vec{\ell}}$$

daí $\boxed{df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{\ell}}$

Interpretação gráfica do gradiente

$df = |\vec{\nabla} f| \times |d\vec{\ell}| \times \cos\theta$ com θ ângulo entre $\vec{\nabla} f$ e $d\vec{\ell}$.

Mantemos $|d\vec{\ell}|$ com valor fixo e procuramos em várias direções (i.e. mudamos θ) quando df é máximo. Isto ocorre para $\theta = 0$.

Assim por $|d\vec{\ell}|$ fixo, df é máximo quando o deslocamento $d\vec{\ell}$ ocorre paralelamente a $\vec{\nabla} f$. Em outras palavras:

$\vec{\nabla} f$ aponta no sentido para o qual f cresce mais rápido com a variação da posição.

$|\vec{\nabla} f|$ dá a inclinação (taxa de aumento) ao longo desta "direção maximal".

6h

Se formos sobre um morro e acharmos onde a altura $h(x,y)$ aumenta mais rápido esta dá a direção e o sentido do gradiente (da altura e do pot. grav.) e a inclinação dá o módulo do gradiente.

$g\vec{\nabla}h$

$g\vec{\nabla}h$

← contorno de altura fixa (e pot. grav. fixo)

Gradiente nos vários sistemas de coordenadas

Já vimos:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Em coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{\ell} \\ d\vec{\ell} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} df = \frac{\partial f}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ d\vec{\ell} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\,d\varphi\,\hat{\varphi} + dz\,\hat{z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Cálculo de $\vec{E}$ à partir do potencial

Vimos (por definição) que: $\Delta V = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

assim

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$
$$= \vec{\nabla} V \cdot d\vec{\ell} \qquad \text{(cf. "Revisão sobre gradiente")}$$

e

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

Em cada ponto, a direção e o sentido de $\vec{E}$ correspondem à direção e ao sentido em que V decresce mais rapidamente ($\vec{E}$ sendo sempre $\perp$ equipotencial passando pelo ponto considerado).

<u>Obs.</u>: para calcular V, conhecendo a dist. de cargas, só precisa fazer 1 integral $V = \int \frac{k\,dq}{r}$, enquanto para calcular $\vec{E}$ precisa fazer 3 integrais, uma para cada direção x, y, z, $\vec{E} = \int \frac{k\,dq}{r^2}\hat{r}$. Assim muitas vezes é mais rápido calcular V e depois $-\vec{\nabla} V$ para obter um campo elétrico.

Casos particulares úteis:

- problema unidimensional $V = V(x) \Rightarrow E_x = -\frac{dV}{dx}$
- problema com sim. esférica $V = V(r) \Rightarrow E_r = -\frac{dV}{dr}$ $\quad E_\varphi = E_\theta = 0$
- problema com sim. cilíndrica $V = V(\rho) \Rightarrow E_\rho = -\frac{dV}{d\rho}$ $\quad E_\varphi = E_z = 0$

Exemplos:

- Carga esférica:

vimos que $V = \frac{kq}{r}$

V só depende de r (raio nas coord. esféricas)

$\Rightarrow E_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{kq}{r^2}$ (E_φ e E_θ nulas pois $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ e $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ nulas)

$\vec{E} = E_r \hat{r} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$ como esperado

- Anel

vimos que $V = \frac{kQ}{\sqrt{a^2+x^2}}$ sobre o eixo Ox do anel

$\Rightarrow E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{kQx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$ (por sim. $\vec{E} \parallel \hat{x}$)

$\vec{E} = E_x \hat{x} = \frac{kQx}{(a^2+x^2)^{3/2}}\hat{x}$ como esperado

- Disco

vimos que $V = k\sigma 2\pi \left[\sqrt{a^2+x^2} - x\right]$ sobre seu eixo Ox

$\Rightarrow E_x = -\frac{dV}{dx} = k\sigma 2\pi \left[-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + 1\right]$ (por sim. $\vec{E} \parallel \hat{x}$)

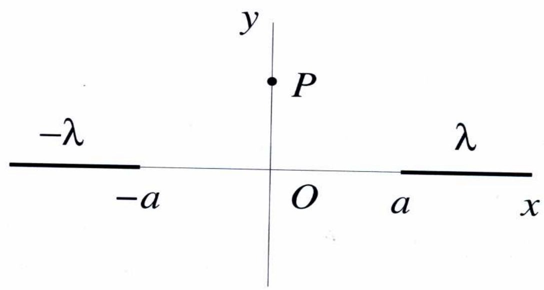
$\vec{E} = E_x\hat{x} = k\sigma 2\pi \left[1 - \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]\hat{x}$ como esperado (transp. 16)

Questão 3

A densidade linear de carga ao longo do eixo x é dada por

$$\lambda(x) = \begin{cases} -\lambda, & \text{se } x < -a, \\ \lambda, & \text{se } x > a, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ e $a > 0$ são constantes.



(a) (1,0 ponto) Calcule o campo elétrico $\vec{E}$ num ponto P sobre o eixo y.

(b) (1,0 ponto) Adotando-se potencial nulo na origem O, calcule o potencial num ponto P sobre o eixo y.

(c) (0,5 ponto) Considere os pontos $O = (0, 0, 0)$, $A = (a/2, 0, 0)$ e $P = (0, a, 0)$. Qual é o trabalho efetuado pela força elétrica para levar uma carga q ao longo do percurso fechado $OAPO$?

Questão 4

O potencial elétrico devido a uma esfera carregada de raio a é

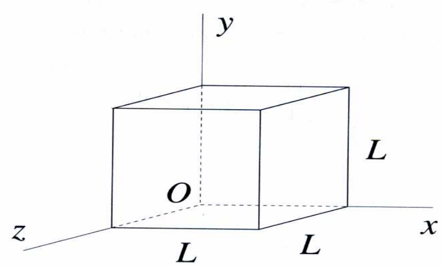
$$V(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{V_0\, a}{r}, & \text{se } r \geq a, \\ \\ 2V_0 - \dfrac{V_0\, r}{a}, & \text{se } r < a, \end{cases}$$

onde $V_0 > 0$ é constante e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância ao centro da esfera.

(a) (1,0 ponto) Determine o campo elétrico $\vec{E}$ para $r > a$ e $r < a$.

(b) (1,0 ponto) Determine a carga total Q da esfera.

(c) (0,5 pontos) Calcule o fluxo através da face superior do cubo de lados $L > a$ mostrado na figura que tem três arestas ao longo dos eixos x, y e z. Expresse o resultado em termos da carga total Q da esfera e de ϵ_0.



2007

(67)

Questão 3

(A) (1,0 ponto) Considere um anel de raio R, com uma carga Q uniformemente distribuida, colocado no plano xy, com seu centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Calcule o potencial devido ao anel em um ponto qualquer do eixo z.

(B) Um disco de raio R, no plano xy, com seu centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas, tem densidade superficial de carga $\sigma(r) = Cr^2$, onde r é a distância até o centro do disco e C é uma constante.

(a) (1,0 ponto) Calcule o potencial devido ao disco no eixo z.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico produzido pelo disco no semi-eixo $z > 0$.

Dado: $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2+a^2}$

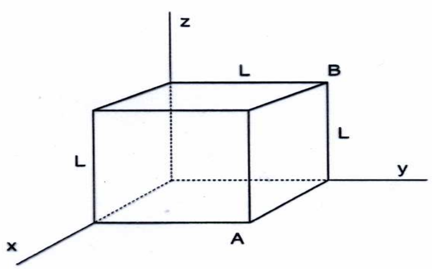
Questão 2

O potencial elétrico numa certa região do espaço é

$$V = axy + by^2 + cyz.$$

(a) (0,5 ponto) Determine o campo elétrico $\vec{E}$ nessa região.

(b) (1,0 ponto) Determine o fluxo do campo elétrico na face superior do cubo de lado L mostrado na figura. Adote a normal apontando para fora do cubo.



(c) (0,5 ponto) Calcule o trabalho que deve ser realizado por um agente externo para levar uma carga q do vértice A ao vértice B do cubo.

(d) (0,5 ponto) Se uma carga q for colocada no centro do cubo em quanto mudará o fluxo através da face superior do cubo?

2006

68

Questão 3

Duas cargas pontuais $+q$ e $-q$ estão situadas em $(0,0,d)$ e $(0,0,-d)$, respectivamente.

(a) (1,0 ponto) Determine o potencial produzido pelas cargas num ponto do espaço com coordenadas (X,Y,Z).

(b) (0,5 ponto) Qual é o potencial sobre o eixo x ?

(c) (1,0 ponto) Determine a componente E_z do campo elétrico sobre o eixo x, a partir da função potencial $V(X,Y,Z)$.

2006

68

Questão 3

Duas cargas pontuais $+q$ e $-q$ estão situadas em $(0,0,d)$ e $(0,0,-d)$, respectivamente.

(a) (1,0 ponto) Determine o potencial produzido pelas cargas num ponto do espaço com coordenadas (X,Y,Z).

(b) (0,5 ponto) Qual é o potencial sobre o eixo x ?

(c) (1,0 ponto) Determine a componente E_z do campo elétrico sobre o eixo x, a partir da função potencial $V(X,Y,Z)$.