Lei de Gauss

A lei de Gauss em eletrostática é equivalente à lei de Coulomb.
Qual delas usar dependerá do tipo de pba.

$\begin{cases} \text{sem simetria} \Rightarrow \text{Coulomb} \\ \text{simetria} \Rightarrow \text{Gauss} \end{cases}$ (para calcular um campo eletr.)

fluxo elétrico

- Fluxo de um líquido através de uma superfície
  $\vec{v}$; vel. do fluido através o pequeno elemento de superfície ΔA.
  $\Delta\Phi$: massa por unidade de tempo através ΔA
  = fluxo de massa através ΔA

Se $\vec{v} \perp \Delta A$:

ΔA

$\underbrace{\Delta m}_{\text{atravessa } \Delta A \text{ durante } \Delta t} = v\Delta t\, \Delta A \times \rho$ com ρ dens. vol.

$\Delta\Phi = \rho v \Delta A$

Se $\vec{v} \parallel \Delta A$

$\Delta\Phi = 0$

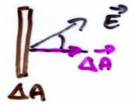
Se $\vec{v}$ inclinado em relação a ΔA:

$\Delta m = v\Delta t \cos\varphi\, \Delta A \times \rho$

$\Delta\Phi = \rho v \Delta A \cos\varphi$

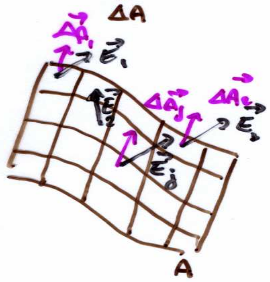
$= \rho\vec{v} \cdot \Delta\vec{A}$ com $\Delta\vec{A}$ vetor $\perp \Delta A$ de módulo ΔA

• fluxo elétrico



da mesma maneira definimos

$$\Delta\Phi = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}$$

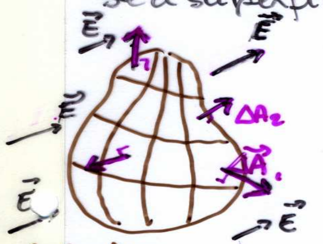


Para uma superfície qualquer:

$$\Phi = \lim_{\Delta\vec{A}_j \to 0} \vec{E}_j \cdot \Delta\vec{A}_j$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi = \underbrace{\int}_{\text{int. de superfície}} \vec{E}\cdot d\vec{A}}$$

Se a superfície for fechado ou Gaussiana:

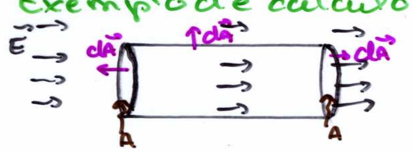


(pele de uma pera)

$$\boxed{\Phi = \underbrace{\oint}_{\text{int. sobre toda a superfície}} \underbrace{\vec{E}}_{\text{campo em } \Delta A} \cdot \underbrace{d\vec{A}}_{\text{vetor} \perp dA\text{, de módulo } dA \text{, por convenção aponta para fora}}}$$

Unidade $\frac{N}{C}\times m^2$

Exemplo de cálculo de fluxo elétrico:



O fluxo de $\vec{E}$ (uniforme) através da sfce cilíndrica é:

$$\Phi = \oint_{\text{cil.}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{\text{tampa esq.}} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{\text{corpo do cil.}} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{\text{tampa dir.}} \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

Para a tampa esq. $\vec{E}$ é antiparalelo a $d\vec{A}$

$$\int_{\text{tampa esq.}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = -\int E\, dA \underset{\vec{E}\text{ uniforme}}{=} -E\int dA = -E\times A \quad \text{e} \quad \int_{\text{tampa dir.}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\times A$$

Para o corpo do cil. $\int \vec{E}\, d\vec{A} = 0$ pois $\vec{E} \perp d\vec{A}$ $\Rightarrow$ $\Phi = 0$ "tudo o que entra, sai"

Lei de Gauss

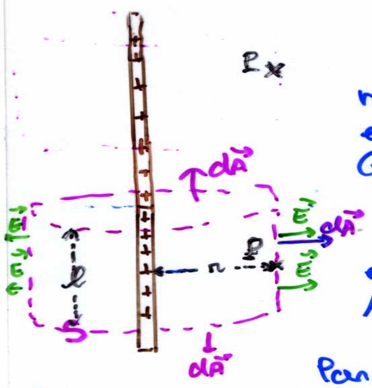
Enunciado:

$$\Phi = \underbrace{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{fluxo}} = \frac{q_{liq}}{\varepsilon_0}$$

S superfície imaginário fechada
$\vec{E}$ valor do campo sobre o elemento dA de S
$d\vec{A}$ vetor normal a dA, de módulo dA, sentido para fora
q_{liq} carga líquida dentro do vol. delimitado por S

Obs: $\vec{E}$ é o campo elétrico devido a todas as cargas dentro ou fora do volume delimitado por S

Exemplo de uso: o fio reto infinito



Valor do campo em P?

① Devido à simetria do fio, esperamos que $\vec{E}$ seja radial e como $\lambda > 0$, ele aponta para fora. A lei de Gauss permite calcular $|\vec{E}|$

② Escolhemos S passando por P e que facilita o cálculo do fluxo.
Aqui: $\Phi = \oint_{cil.} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{\text{tampa cima}} + \int_{\text{tampa baixo}} + \int_{\text{corpo cil.}}$

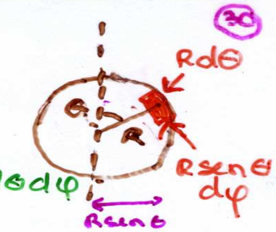
Para as tampas, as $\int = 0$ pois $\vec{E} \perp d\vec{A}$

Para o corpo do cil. $\int_{corpo} \vec{E}\cdot d\vec{A} \underset{\vec{E}\parallel d\vec{A}}{=} \int E\, dA \underset{E \text{ não depende de } dA}{=} E\int dA = E\,2\pi r\,\ell$

② Calculamos $q_{liq} = \lambda \ell$ daí

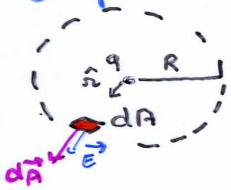
$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ como esperado.

Derivação da lei de Gauss



[Lembrete:
o elemento de superfície da esfera é $dA = R^2 \,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\varphi$
o elemento de ângulo sólido é $d\Omega = \text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\varphi$
$\int d\Omega = 4\pi$ e $\int dA = 4\pi R^2$]

- carga pontual positiva interna

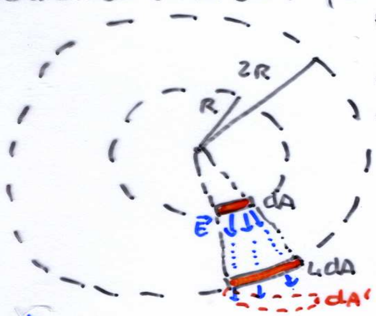


Primeiro, supomos que S é uma sfce de raio R centrada em q. Queremos verificar $\Phi = q/\varepsilon_0$. Sabemos que $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\hat{r}$.

Temos $\Phi = \oint_{esf} \vec{E}\cdot d\vec{A} \underset{\vec{E}\parallel d\vec{A}}{=} \int E \cdot dA \underset{\substack{E \text{ indep.}\\ \text{do } dA}}{=} E\int dA = E\, 4\pi R^2$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ cqfd.

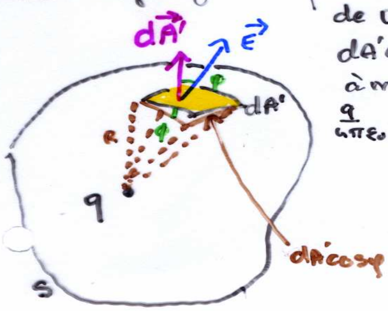
Podemos entender porquê Φ não depende de R (e só de q), em termo de linhas de campo: cada linha de campo que passa pela esfera menor, passa pela esfera maior. Isto vale também para elementos de sfce. Matematicamente podemos espressar isto assim. Sobre a esfera menor $dA = R^2 d\Omega$, isto se projeta na esfera maior como $4R^2 d\Omega = 4dA$.



O fluxo sobre dA é $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\times R^2 d\Omega$ e sobre $4dA$: $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 4R^2}4R^2 d\Omega$ i.e. são iguais.

Na figura, vemos que este fluxo é também o de dA'.

Usamos esta observação para tratar o caso de uma superfície fechada qualquer. O fluxo sobre dA' de uma superfície qualquer é o fluxo sobre $dA'\cos\varphi = R^2 d\Omega$ da sfce esférica (localizada à mesma distancia): $d\Phi_{dA'} = \vec{E}\cdot d\vec{A}' = E\,dA'\cos\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}R^2 d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{d\Omega}{4\pi} \Rightarrow \Phi = \oint_{A' \text{ qualquer}} \vec{E}\cdot d\vec{A}' = \frac{q}{\varepsilon_0}$ cqfd.

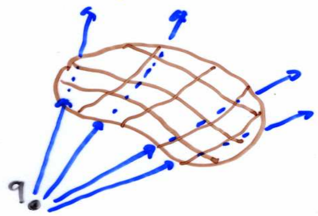


Podemos generalizar este resultado:

- **Carga pontual negativa interna**

$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ ainda vale mas ambos lados são negativos ($\vec{E}\cdot d\vec{A} < 0$ pois $\vec{E}$ aponta para dentro e $d\vec{A}$ para fora)

- **Carga pontual externa**



Tudo o que entra, sai. No total o fluxo é nulo.

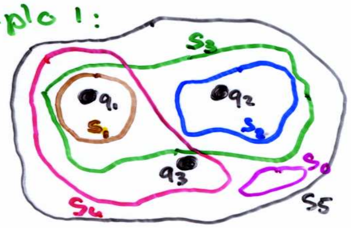
- **Para várias cargas, internas e externas:**

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{liq}}{\varepsilon}$$

$\vec{E}$: criado por todas as cargas

q_{liq}: somente as cargas no volume delimitado por S

Exemplo 1: [exercício S&Z: 23.6]



O fluxo através de S_0 é : 0

S_1 : $\frac{q_1}{\varepsilon_0}$

S_2 : $\frac{q_2}{\varepsilon_0}$

S_3 : $\frac{q_1+q_2}{\varepsilon_0}$

S_4 : $\frac{q_1+q_3}{\varepsilon_0}$

S_5 : $\frac{q_1+q_2+q_3}{\varepsilon_0}$

isto não depende de como as cargas q_1, q_2, q_3 são repartidas no volume delimitado pelas superfícies.

Exemplo 2: [Sez 23-7]

a) Uma superfície fechada contém uma carga líquida -3,60μC. Qual é o fluxo através da superfície?

b) O fluxo elétrico através de uma superfície fechada é 780 Nm²/C. Qual é a quantidade de carga no interior da sfa?

c) A superfície do b) é um cubo de aresta 2,50cm. Você pode dizer onde a carga se encontra?

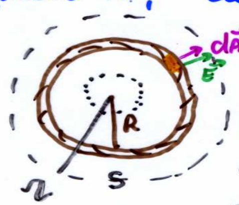
a) $\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \dfrac{-3{,}60 \; 10^{-6}\,C}{8{,}854 \; 10^{-12}\,C^2/(N \cdot m^2)} = -4{,}07 \; 10^{5} \; \dfrac{Nm^2}{C}$

b) $\Phi = 780 \; Nm^2/C = \dfrac{q_{enq}}{\varepsilon_0} \Rightarrow q_{enq} \; 8{,}854 \; 10^{-12} \dfrac{C^2}{Nm^2} \times 780 \dfrac{Nm^2}{C} = 6{,}91 \; \underbrace{10^{-9}}_{nC} C$

c) Não. O fluxo para qualquer superfície fechada ao redor da carga será 780 Nm²/C e não importa onde se encontra a carga no interior.

Exemplos de aplicação da lei de Gauss

- Casca esférica uniformemente carregada (raio R, carga total positiva Q): campo elétrico para $r > R$ e $r < R$?



a) Devido à simetria, esperamos que $\vec{E}$ seja radial e apontando para fora se $r > R$. Escolhemos para S, uma esfera de raio r (traços na fig.)

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} \underset{\vec{E} /\!/ d\vec{A}}{=} \int E\, dA \underset{\substack{\text{módulo de } E \\ \text{cste para os } dA}}{=} E\int dA = E\,\underbrace{4\pi r^2}_{\text{área de } S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

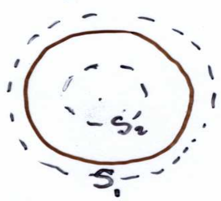
$\Rightarrow E = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$ i.e. o campo elétrico para $r > R$ é o mesmo do que para uma carga Q puntiforme

b) Espera-se $\vec{E}$ radial (mas não precisamos saber o sentido). Pegamos para S uma esfera de raio $r < R$ (centrado como a casca) (pontinhos na fig.)

$$\Phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} \underset{\vec{E}\, d\vec{A} \,/\!/ \text{ ou antiparalelo}}{=} \int_S E\cdot dA = \underset{E \text{ não depende do } dA}{E}\int dA = E\, 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$$

$\Rightarrow \vec{E} = 0$

- Esfera uniformemente carregada (isolante) (raio R, carga total positiva Q): campo elétrico a) para $r > R$ b) para $r < R$



Devido à simetria, esperamos $\vec{E}$ radial. Como $Q > 0$, $\vec{E}$ aponta para fora

a) $\Phi = \oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} \underset{\vec{E} /\!/ d\vec{A}}{=} \int E\, dA = \underset{E \text{ independente do } dA}{E}\int dA = E\, 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$ i.e. campo el. de uma carga puntiforme Q

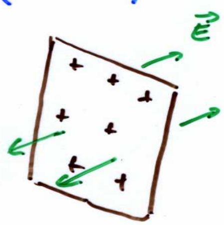
b) $\Phi = \oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{\vec{E}\parallel d\vec{A}} E\,dA = \underbrace{E\int dA}_{E \text{ indep. do } dA} = E\,4\pi r^2 = \frac{q_{liq}}{\varepsilon_0}$

Precisa calcular q_{liq} com CUIDADO.

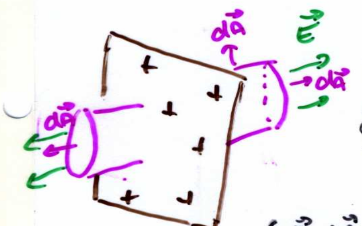
$q_{liq} = \underbrace{\rho}_{\text{dist. vol. de carga}} \times \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3}\,\frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{r^3}{R^3}Q$

daí $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{kQr}{R^3}\,\hat{r}$

• Plano uniformemente carregado (isolante) ($\sigma > 0$)



Por simetria, esperamos $\vec{E} \perp$ plano infinito. Como $\sigma > 0$, $\vec{E}$ aponta para fora



Escolhemos para S uma caixa cilíndrica que atravessa o plano perpendicularmente

$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{\text{tampa esq}} + \int_{\text{corpo}} + \int_{\text{tampa direita}}$

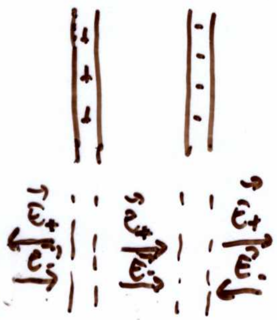
$\int_{\text{tampa esq}} \vec{E}\,d\vec{A} = \int_{\vec{E}\parallel d\vec{A}} E\,dA = \underbrace{E\int dA}_{E \text{ indep. do } dA} = EA = \int_{\text{tampa dir.}}$

e $\int_{\text{corpo}} \vec{E}\,d\vec{A} = 0$ pois $\vec{E} \perp d\vec{A} \Rightarrow \Phi = 2EA = \frac{q_{liq}}{\varepsilon_0}$

q_{liq} é σA daí $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ como esperado.

$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\pm\hat{x})$

• Dois planos infinitos com carga oposta (isolantes)



O plano de esquerda tem campo de módulo $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ apontando para fora e o plano de direita, campo de módulo $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ apontanda para dentro

Usando o princípio de superposição

entre as placas: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ apontando p/ direita

fora: $E = 0$

(Pode-se também usar a lei de Gauss com superfícies do tipo para o plano.)

De modo geral

dist. de carga	tipo de superfície
simetria esférica	esfera concêntrica
simetria cilíndrica	cilindro coaxial
simetria plana	caixa cilíndrica atravessando perpend. e

P1 / 2008

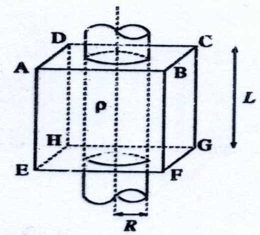
Questão 2

Um cilindro isolante, infinito, com raio R tem uma densidade volumétrica de carga uniforme igual a ρ.

(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico dentro do cilindro.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico fora do cilindro.

(c) (1,0 ponto) Considere um cubo de lado $L > R$ com centro no eixo do cilindro e com as faces ABCD e EFGH perpendiculares ao eixo do cilindro, conforme a figura ao lado. Qual é fluxo do campo elétrico através de toda a superfície do cubo? Qual é o fluxo através da face ABCD? Qual é o fluxo através da face ABFE?



37

P1

Física III

Escola Politécnica - 2007

FGE 2203 - GABARITO DA P1

12 de abril de 2007

Questão 1

(a) (1,5 ponto) Determine a força (módulo e direção) exercida sobre uma carga $q > 0$, situada a uma distância d da extremidade de um fio semi-infinito carregado com uma densidade linear de carga $\lambda > 0$. A carga está situada no prolongamento do fio.

(b) (1,0 ponto) Considere agora uma superfície esférica S, de raio $2d$, centrada na posição da carga q (veja a figura). Determine o fluxo do vetor campo elétrico sobre a superfície S .