REVISÃO: OSCILAÇÕES

: movimento que se repete

- fenômeno comum ao redor de nós:
  - barcos ancorados (com ondas do mar)
  - cordas de violão
  - elétrons numa antena de rádio
  - (modelização de muitos fenômenos físicos)

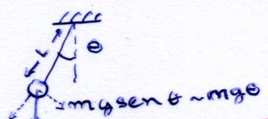
- Pode ser: harmônico simples
  - amortecidas (o movimento se atenua)
  - forçadas (tem uma força externa periódica
    ex.: criança empurrada num balanço)

- Movimento harmônico simples

$$\underline{\underline{F = -kx = m\ddot{x}}} \iff \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

x: deslocamento de m (em rel. ao equi.)
k: cste da mola

ex.: massa-mola 

pêndulo 

$s = L\theta$ = arco, faz papel de x

$k = mg/L$

Solução: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

amplitude → A; freq. ang. → ω; fase → $\omega t + \varphi$; cste de fase → φ

$\dot{x} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$ e $\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \equiv -\frac{k}{m}x$

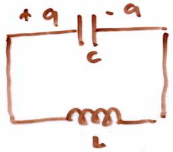
daí precisamos escolher $\boxed{\omega^2 = k/m}$

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ frequência (em s^{-1})

$T = 1/f$ período (obs.: $x(t) = x(t+T)$)

$E = K + U$ é conservada.

circuito LC



Colocamos um capacitor carregado num circuito com um indutor. O que acontece?

Chamamos Q_0 a carga inicial da placa esq.

C se descarrega, sua en. elétrica, $U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \searrow$
e se estabelece uma corrente

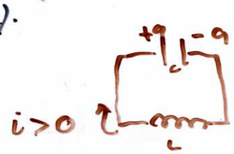
$\Rightarrow$ L se opõe isto, sua en. magn. $U_m = \frac{1}{2} L i^2 \nearrow$
(a energia total se conserva)

Quando C é descarregado, a corrente não cai a zero (instantaneamente, devido a L), o transfer de carga continua até a placa esq. adquirir carga $-Q_0$. Assim de novo C tem en. $\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$ e L tem en. magn. nula.
A corrente é nula de novo.

O processo de descarga pode reiniciar (com corrente de sentido oposto).
Isto se chama <u>oscilação elétrica</u>.

O problema pode ser resolvido escrevendo a eq. das malhas ou com consideração de conservação de energia.

Como o sentido da corrente varia, escolher o sentido positivo é arbitrário. Escolho como positivo o sentido que corresponde a aumentar a carga da placa esq. (onde havia $+Q$ inicialmente).



Daí:

$$\boxed{-L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0}$$

Re-escrevemos isto usando $i = \frac{dq}{dt}$

Assim: $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{LC} q = 0$

As eq. do tipo $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ tem como solução $x = A\cos(\omega t + \varphi)$.

$\left[\dfrac{dx}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) \Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi) = -\omega^2 x\right]$

(ver também o circuito RC c/ $\varphi=0$)

$\Rightarrow$

$q(t) = Q\cos(\omega t + \varphi)$ com $\omega = 1/\sqrt{LC}$

as constantes Q e φ são determinadas pelas condições iniciais $q(0) = Q\cos\varphi$ e $i(0) = -Q\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi$.

Por exemplo se $q(0) = Q_0$ e $i(0) = 0$ temos $Q = Q_0$, $\varphi = 0$.

[Alternativa:

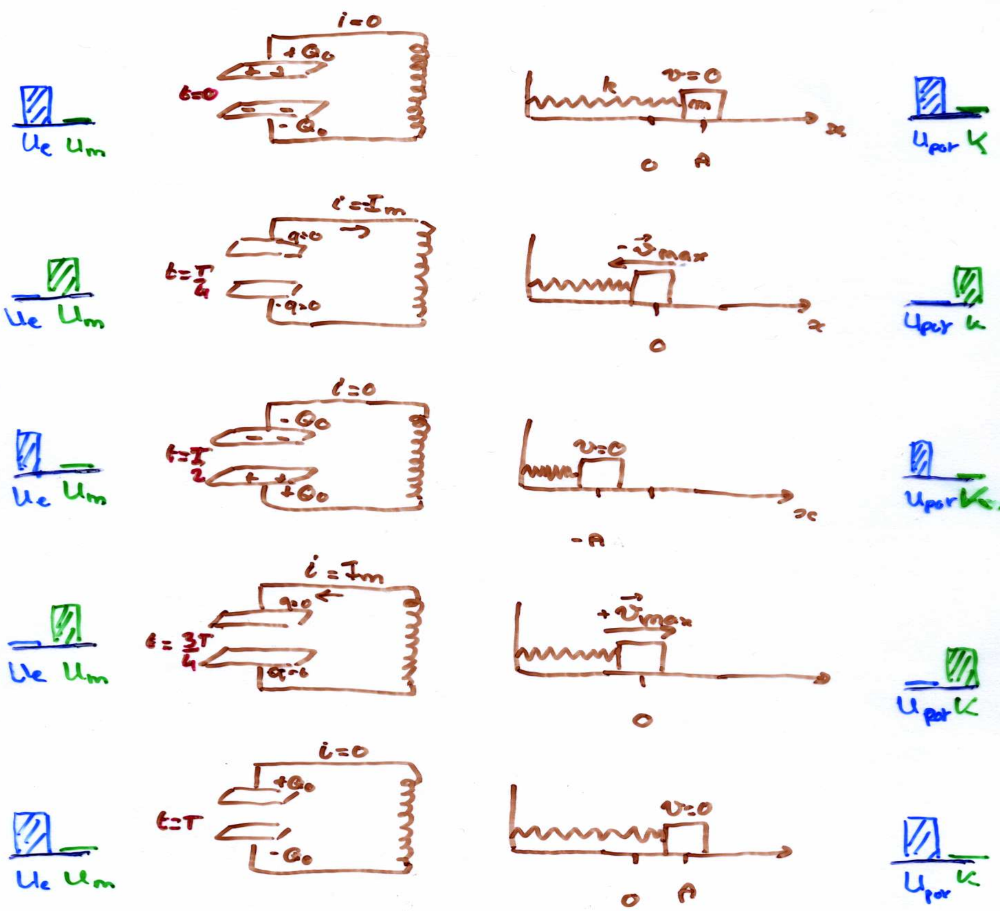
A energia $U = U_e + U_m = \dfrac{q^2}{2C} + \dfrac{L}{2} i^2$ é conservado

$\Rightarrow \dfrac{dU}{dt} = 0 = \dfrac{qi}{C} + Li\dfrac{di}{dt}$

$\Rightarrow \dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{LC} q = 0$ como antes.]

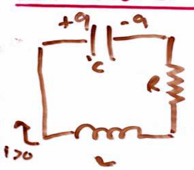
Este sistema é similar ao sistema massa-mola da mecânica:

q	$\longleftrightarrow$	x
$i = \dfrac{dq}{dt}$		$v = \dfrac{dx}{dt}$
$U_e = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$		$K = \dfrac{1}{2} m v^2$
$U_m = \dfrac{L}{2} i^2$		$U_{pot} = \dfrac{1}{2} k x^2$
$\dfrac{1}{C}$		m
L		k
$\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$		$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$
$q(t) = Q\cos(\omega t + \varphi)$		$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$
$\Rightarrow i(t) = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2}$		$\Rightarrow v(t) = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$



i=0
+Q0
-Q0
t=0
k
v=0
m
x
O
A
Ue Um
Upot K
i=Im
t=T/4
q=0
-v max
t=T/2
-A
t=3T/4
+v max
t=T

Circuito RLC



Colocamos um capacitor carregado em série com um indutor e um resistor. O que acontece?

C se descarrega logo após a conexão. Mas devido as perdas Ri^2 do resistor, a en. magn. adquirida por L depois que C é completamente descarregado é menor do que a en. el. inicial de C. De maneira análoga, a en. cin. de C quando a en. magn. de L tende a zero é ainda menor do que a en. cin. inicial de C e assim por diante.

O problema pode ser resolvido escrevendo a lei das malhas ou com consideração de energia.

$$-iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad : \text{a resolver}$$

[Alternativa:

$$\frac{dU}{dt} \neq 0 \;, \; = -Ri^2$$

$$= \frac{qi}{C} + Li\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{\gamma}\frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega^2}q = 0 \quad]$$

isto é similar a eq. do oscilador amortecido

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{\rho}{m}}_{\gamma}\frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2}x = 0$$

$R \longleftrightarrow \rho$
resistência — cste de amortecimento

Eq. similares tem soluções similares

Uma técnica para resolver nossa equasão, é resolve-lá para funções complexas (e depois pegar a parte real como sendo o que nos interessa):

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\frac{dz}{dt} + \omega^2 z = 0 \quad \text{com } z(t) \text{ função complexa.}$$

Procuramos z da forma: $z = Ce^{pt}$

inserindo na equa. dif., C e p tem que satisfazer:

$$Cp^2e^{pt} + C\gamma p e^{pt} + C\omega^2 e^{pt} = 0 \quad \forall t$$

$$\Leftrightarrow \quad p^2 + \gamma p + \omega^2 = 0.$$

isto é uma equa. do 2ª grau em p e existem 3 possibilidades, correspondendo a 3 casos físicos:

$$\Delta \equiv \gamma^2 - 4\omega^2 \quad < 0, \quad = 0, \quad > 0.$$

(a) $\Delta < 0$ i.e. $\frac{\gamma}{2} < \omega$:

Para o circuito RLC isto é o caso: $\frac{1}{2}\frac{R}{L} < \sqrt{\frac{1}{LC}} \Leftrightarrow \boxed{R^2 < 4\frac{L}{C}}$

Temos como soluções: $p = -\frac{\gamma}{2} \pm i\underbrace{\sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}_{\omega'}$

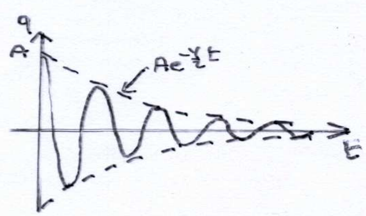
daí: $z = C e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\omega' t}$

(basta pegar a solução com + se escolhermos $C = Ae^{i\varphi}$, pois assim já temos 2 constantes arbitrárias para satisfazer as c.i.) (a alternativa seria fazer uma combinação linear das 2 soluções: $A'e^{\dots t} + B'e^{\dots}$)

Agora obtemos: $q(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$

$$= Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega' t + \varphi)$$

Para o circuito RLC: $\gamma = \frac{R}{L}$ e $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{R^2}{4L^2}} < \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$



($\varphi = 0$)

- Se R não for muito grande ($R^2 < 4\frac{L}{C}$), ainda temos oscilações.
- Elas tem freq. angular $\omega' < \omega$
- Sua amplitude é exponencialmente diminuida.

Isto é chamado oscilações com <u>amortecimento subcrítico.</u>

(b) $\Delta = 0$ i.e. $\frac{\gamma}{2} = \omega$

Para o circuito RLC isto é o caso: $R = 4\frac{L}{C}$

Temos como solução: $p = -\frac{\gamma}{2}$

daí: $z = C e^{-\frac{\gamma}{2}t}$

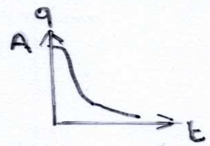
Outra solução independente (neste caso) é:

$t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$

Daí a solução geral

$$q(t) = (A + Bt)\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

(Precisa 2 ctes arbitrárias.)



O sistema deixa de oscilar.

∴ Isto é regime de amortecimento crítico.

(c) $\Delta > 0$ i.e. $\frac{\gamma}{2} > \omega$

Para o circuito RLC isto é o caso: $R > 4\frac{L}{C}$

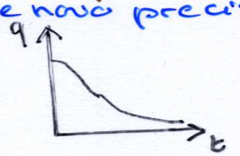
Temos como soluções: $p = -\frac{\gamma}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega}}_{\to\ \beta}$

Daí:

$$z = \tilde{A}\, e^{-(\frac{\gamma}{2}+\beta)t} + \tilde{B}\, e^{-(\frac{\gamma}{2}-\beta)t}$$

$$q = A\, e^{-(\frac{\gamma}{2}+\beta)t} + B\, e^{-(\frac{\gamma}{2}-\beta)t} \quad (A = \mathrm{Re}\,\tilde{A},\ B = \mathrm{Re}\,\tilde{B})$$

(De novo precisa 2 ctes arbitrárias.)



- O sistema não oscila.
- Ele tende a zero mais devagar do que no caso (b) devido a $e^{+\beta t}$

Isto é o regime de amortecimento supercrítico.

[Referência para oscilações amortecidas: Nussenzveig, V.2 §4.1 e 4.2.]

2010

Questão 4

Um solenóide de auto-indutância L é percorrido por uma corrente estacionária I_0.

(a) (0,5 ponto) Qual é o valor da energia magnética armazenada no indutor?

(b) (1,0 ponto) Por meio de um chaveamento, no instante $t = 0$, o indutor é colocado em série com um capacitor de capacitância C de modo a formar um circuito LC. A corrente inicial no indutor é $I(0) = I_0$ e a carga inicial no capacitor é $Q(0) = 0$. Use a lei de conservação de energia para determinar a carga máxima $Q_{máx}$ que pode ser atingida no capacitor.

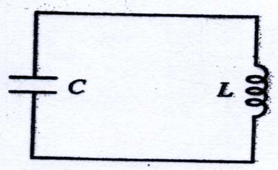
(c) (1,0 ponto) Escreva a equação diferencial para a carga Q do capacitor e determine a frequência angular de oscilação ω.

9

P3 2008

Questão 4

Na figura abaixo vemos um circuito elétrico formado por um capacitor de capacitância C e uma bobina com indutância L. No instante $t = 0$ o capacitor tem carga máxima Q_m e a corrente no circuito é zero.



(a) (0,5 ponto) Escreva a equação diferencial para a carga $Q(t)$ no capacitor.

(b) (1,0 ponto) Calcule a corrente I(t) no circuito.

(c) (1,0 ponto) Mostre que a energia se conserva.