Circuitos:

RL § 31.5
LC § 31.6
RC § 27.5
RLC § 31.7

Introdução

Chama-se nó, a junção de dois ou mais condutores num circuito,
malha, um caminho condutor fechado.

→ Os circuitos obedecem as leis de Kirchhoff.

① Lei dos nós:

$$\sum_k I_k = 0$$: soma das correntes entrando ou saindo num nó nula

Esta lei é uma consequência da conservação de carga: "o que entra, sai"

② Lei das malhas:

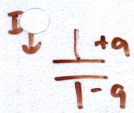
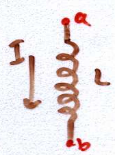
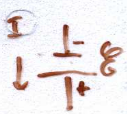
$$\sum_k V_k = 0$$: soma das ddps ao longo de uma malha nula

Esta lei é uma consequência da natureza conservativa das forças eletrostáticas.

→ Além disto, tem que respeitar convenções de sinais ao aplicar estas leis.

<u>Lei dos nós</u>: correntes que entram tem sinal +
saem " " -

<u>Leis das malhas</u>: as ddps V_i são contadas assim

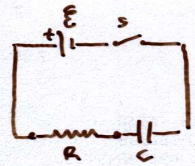
	Percurso ↓	Percurso ↑	
	$-IR$	$+IR$	vem do fato que o potencial abaixa ao percorrer R no sentido i
	$-\frac{q}{C}$	$+\frac{q}{C}$	vem do fato que a placa com +q tem pot. + elevado do que a placa com -q ($\therefore \vec{E}$ aponta para V decrescente)
	$-L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_L$ ↓ $\mathcal{E}^R_{ec}$	$+L\frac{dI}{dt}$ ↓ $\mathcal{E}^R_{ec}$	vem do fato que a ddp V_{ab} muda de $L\frac{dI}{dt}$ ao atravessar L no sentido de I* $V_{ab} = L\frac{di}{dt} \Rightarrow V_b = V_a - L\frac{di}{dt}$
	$+\mathcal{E}$	$-\mathcal{E}$	vem do fato que o pot. se eleva ao passar da placa - à placa +

Obs.: $R_{tot} = \sum R_i$ se resistores em série
$1/R_{tot} = 1/(\sum R_i)$ " " " paralelo
$1/C_{tot} = 1/(\sum C_i)$ se capacitores em série
$C_{tot} = \sum C_i$ " " " paralelo

* Alt.: percorrendo o circuito no sentido de I, se I ↗, $\mathcal{E}_L$ é oposta e o potencial ↘ (de $-L\frac{dI}{dt}$). Se I ↘, $\mathcal{E}_L$ tem sentido de I e o potencial ↗ (de $-L\,dI/dt$).

Circuito RC

① Carregando um capacitor:



Em $t=0$, S é fechada e C começa a ser carregado.

Queremos achar $q(t)$ e $i(t)$.

Percorrendo o circuito no sentido anti-horário:

$$\mathcal{E} - Ri - \frac{q}{C} = 0$$

(i) observamos que como $q(t=0)=0$, $i(t=0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Isto é razoável pois inicial^{te}. a ddp em C é nula.

(ii) observamos que como $i(t=\infty)=0$, $q(t=\infty) \equiv Q = C\mathcal{E}$. isto é razoável pois no final a ddp em R é nula.

Podemos re-escrever: $\mathcal{E} - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{q - C\mathcal{E}}{RC} \Leftrightarrow \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}$

Integrando: $\ln(q - C\mathcal{E}) = \frac{-t}{RC} + \ln \text{cste} \Leftrightarrow q(t) = C\mathcal{E} + \text{cste}\, e^{-\frac{t}{RC}}$

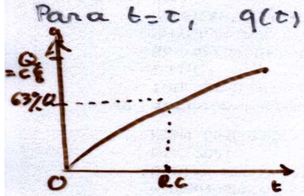
"cste" pode ser determinada com $q(0) = C\mathcal{E} + \text{cste} = 0 \Leftrightarrow \text{cste} = -C\mathcal{E}$

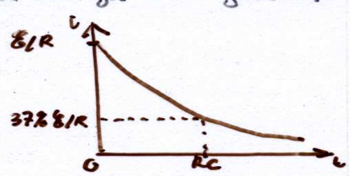
daí

$$\boxed{q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)} \Rightarrow i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$\tau \equiv RC$ é chamada constante de tempo.

Para $t=\tau$, $q(\tau) = \underbrace{C\mathcal{E}}_{q(\infty)} \underbrace{(1 - e^{-1})}_{0,63}$: a carga atingiu 63% do seu valor final.





$e^{-1} = 0,37$

A bateria fornece energia com a taxa:

$$P = \mathcal{E} i = \underbrace{Ri^2}_{\text{dissipado por R}} + iq/C$$

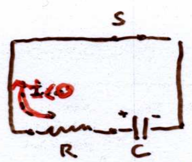
$\hookrightarrow$ armazenado por C $\left(\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = iq/C\right)$

No final, a energia de C é: $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\mathcal{E}$

enquanto a bateria forneceu: $\int_0^t P(t)\,dt = \mathcal{E}\int_0^t \frac{dq}{dt}\,dt = \mathcal{E}\int_0^Q dq = \mathcal{E}Q$

de modo que R dissipou $\frac{1}{2}Q\mathcal{E}$.

② Descarregando um capacitor



Em $t=0$, C com carga Q_0 é colocado no circuito. Sua carga vai diminuir.

No sentido horário

$$\frac{q}{C} + Ri(t) = 0 \; : \; = \frac{q}{C} + Ri$$

pois $i = \frac{dq}{dt} < 0$

(i) Em $t=0$, $q(t=0) = Q_0 \Rightarrow i(0) = -\frac{Q_0}{RC}$

(ii) Em $t \to \infty$, $q(t=\infty) = 0 \Rightarrow i(\infty) = 0$

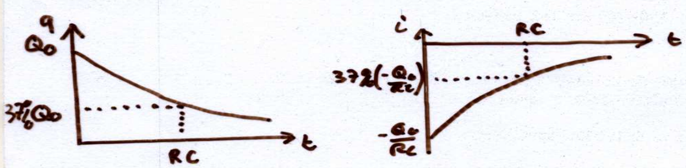
Re-escrevemos: $-R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \Leftrightarrow q(t) = \underbrace{cste}_{Q_0}\, e^{-\frac{t}{RC}}$

daí:

$$\boxed{q(t) = Q_0\, e^{-\frac{t}{RC}}} \Rightarrow i(t) = -\frac{Q_0}{RC}\underbrace{e^{-\frac{t}{RC}}}_{>0} < 0$$

Este sinal negativo é devido ao fato que carga + deixa a placa esquerda.

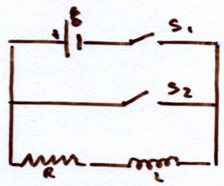
[Alguns livros definem $i = -\frac{dq}{dt}$, que é >0].



Em termo de potência (fazendo $\mathcal{E}=0$ no caso de "carga"): $0 = \underbrace{Ri^2}_{\text{dissipado por R, >0}} + \underbrace{iq/C}_{\text{fornecido por C, <0}}$

* O sentido positivo é aquele da corrente que carregaria C. Acharemos na verdade uma corrente negativa, o que é esperado pois $i = dq/dt < 0$.

Circuito RL



fechando S_1, RL é conectada à fonte de fem $\mathcal{E}$ (S_2 aberto)
fechando S_2, RL é num circuito sem fonte de fem (S_1 aberto)

1 Aumento da corrente

Em $t=0$, S_1 é fechada. A corrente não passa de 0 a seu valor final instantaneamente por causa de L.

Percorrendo no sentido anti-horário:

$$\mathcal{E} - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

(i) Em $t=0$, $i(0)=0 \Rightarrow \left.\frac{di}{dt}\right|_0 = \frac{\mathcal{E}}{L}$ ($\mathcal{E}_L$ se opõe exatamente a $\mathcal{E}$)

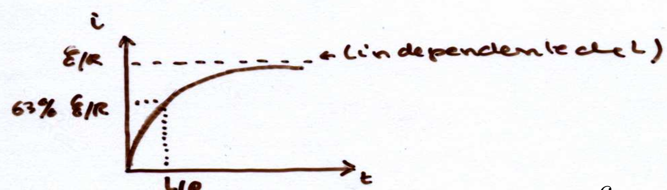
(ii) Em $t=\infty$ $\left.\frac{di}{dt}\right|_\infty = 0 \Rightarrow i(\infty) = \frac{\mathcal{E}}{R}$ (como esperado)

Reescrevemos: $\frac{di}{i-\mathcal{E}/R} = -\frac{R}{L}dt \Leftrightarrow \ln\left(i-\frac{\mathcal{E}}{R}\right) = -\frac{R}{L}t + \ln cste$

$\Leftrightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R} + \frac{cste}{-\mathcal{E}/R}e^{-\frac{R}{L}t}$

$$\boxed{i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

$\tau = L/R$ é chamada constante de tempo.



A bateria fornece energia com a taxa:

$$P = \mathcal{E}i = Ri^2 + Li\frac{di}{dt}$$

Ri^2: dissipado por R

$Li\frac{di}{dt}$: armazenado por L $\left(\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = Li\frac{di}{dt}\right)$

② Diminuição da corrente

Supomos que S_1 ficou fechada (e S_2 aberta) até a corrente atingir um valor I_0. Agora S_1 é aberta e S_2 fechada. Chamamos $t=0$ este instante. A corrente vai diminuir.

A lei das malhas fornece: $-Ri - L\frac{di}{dt} = 0$

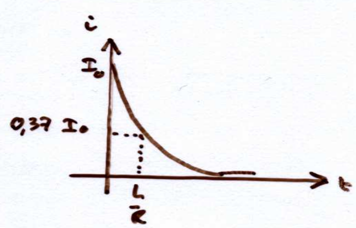
(i) Em $t=0$, $i(0) = I_0$ $\Rightarrow$ $\left.\frac{di}{dt}\right|_0 = -\frac{RI_0}{L}$

(ii) Em $t=\infty$, $i(\infty)=0$ $\Rightarrow$ $\left.\frac{di}{dt}\right|_\infty = 0$

Re-escrevemos $\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \iff i(t) = \underbrace{cste}_{I_0}\, e^{-\frac{R}{L}t}$

daí

$$\boxed{i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$$



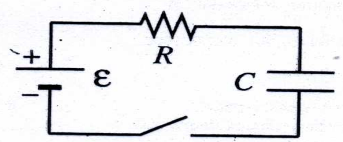
Em termos de potência:

$$0 = \underbrace{Ri^2}_{\substack{\text{dissipado} \\ \text{por } R,\ >0}} + \underbrace{Li\frac{di}{dt}}_{\substack{\text{fornecido} \\ \text{por } L,\ <0}}$$

2009

Questão 4

Um capacitor descarregado e um resistor são ligados em série a uma bateria como vemos na figura. Em $t = 0$ a chave é ligada.



(a) (0,5 ponto) Escreva a equação para a soma das quedas de tensão (voltagens) através dos elementos do circuito. Lembrando que o capacitor estava inicialmente descarregado, mostre que $I(0) = \mathcal{E}/R$.

(b) (1,0 ponto) Obtenha a equação diferencial para a corrente $I(t)$ no circuito. Resolva a equação e determine a corrente $I(t)$.

(c) (1,0 ponto) Calcule a potência $P_b(t)$ fornecida pela bateria e potência $P_R(t)$ dissipada pela resistência. Se não forem iguais, explique o por quê.

FORMULÁRIO

$$C = Q/V, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad V = RI, \quad P = RI^2, \quad P = VI,$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I,$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = (1 + \chi_m)\vec{B}_0,$$

$$\mu = (1 + \chi_m)\mu_0 \equiv K_m \mu_0, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

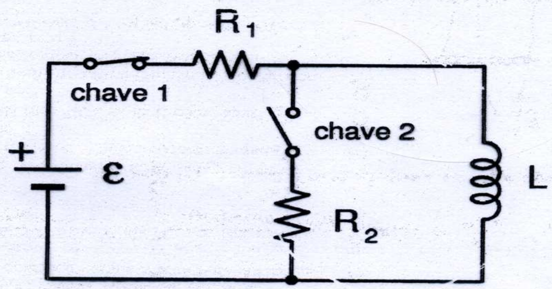
$$\Phi^{total} = N\phi^{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi^{espira} = M_{21}I_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}.$$

P3/2007

215

Questão 4

No circuito da figura a chave 2 está aberta e a chave 1 está fechada há muito tempo, encontrando-se o circuito numa situação estacionária.



(a) (1,0 ponto) Determine a corrente I_0 através do indutor.

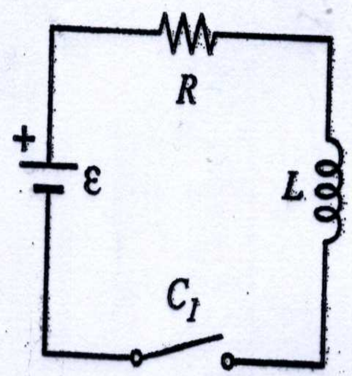
(b) (1,0 ponto) No instante $t = 0$ a chave 2 é fechada e simultaneamente a chave 1 é aberta. Escreva a equação diferencial e obtenha a corrente $I(t)$ através do indutor para $t \geq 0$.

(c) (0,5 pontos) Mostre que a energia total dissipada no resistor R_2 para $t \geq 0$ é igual à energia que estava armazenada no indutor .

P3 /2008

Questão 3

Um circuito elétrico é formado por um resistor de resistência R, uma bobina com indutância L, uma bateria com fem ε e uma chave C_1. No instante $t = 0$ a chave C_1 é ligada.

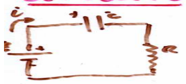
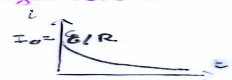
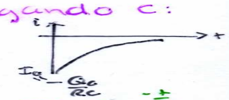
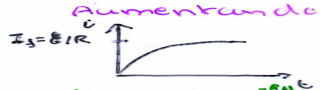
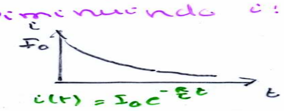


(a) (1,0 ponto) Escreva a equação diferencial para a corrente $I(t)$ no circuito.

(b) (1,0 ponto) Calcule a corrente $I(t)$ no circuito.

(c) (0,5 ponto) Escreva as seguintes potências em função de $I(t)$ e de suas derivadas: $P_b(t)$ fornecida pela bateria, $P_R(t)$ dissipada no resistor e $P_L(t)$ que fornece a variação de energia no indutor.

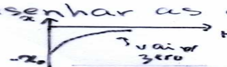
REVISÃO : RC e RL

Circuito	Lei das malhas	Descrição
	$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - Ri = 0$ $\left(\text{com } i = \frac{dq}{dt} > 0\right)$	Carregando C:   $q(t) = Q_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ $\quad i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$
 atua como uma fonte de fem $i < 0$	$-R(-i) + \frac{q}{C} = 0$ $\left(\text{com } i = \frac{dq}{dt} < 0\right)$	Descarregando C:   $q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ $\quad i(t) = \underbrace{I_0}_{<0} e^{-\frac{t}{RC}}$
	$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} - Ri = 0$ $\left(\text{com } i = \frac{dq}{dt} > 0\right)$	Aumentando i:  $i(t) = I_f(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$
	$-L\frac{di}{dt} - Ri = 0$ $\left(\text{com } i = \frac{dq}{dt} > 0\right)$	Diminuindo i:  $i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$

Obs.1: Dica para desenhar as curvas

$x(t) = x_0 e^{-at}$

$\Rightarrow$



$x(t) = -x_0 e^{-at}$

: fazer $x \to -x$ na fig. esq.

$\Rightarrow$

$x(t) = x_0(1 - e^{-at})$

: adicionar x_0 na fig. anterior

Obs. 2: no Serway p/ descarga

$-Ri + \frac{q}{C} = 0$ com $i = -dq/dt$

21/05

MÉTODOS DE SOLUÇÃO

I $\boxed{\frac{df}{dt} + af = 0}$ (descarga no circuito RC, decaimento da corrente no LC)

① $\frac{df}{dt} = -af$: eu sei que funções que, derivadas, são proporcionais a si, são exponenciais

$\Rightarrow f(t) \propto e^{-at} \Rightarrow f(t) = \underbrace{cste}_{f(0)} e^{-at}$

② $\frac{df}{f} = -a\,dt \Rightarrow \int_{f(0)}^{f(t)} \frac{df}{f} = -a\int_0^t dt \Leftrightarrow [\ln f]_{f(0)}^{f(t)} = -at$

$\Leftrightarrow \ln f(t) = -at + \ln f(0) \Leftrightarrow f(t) = f(0)e^{-at}$

③ $\frac{df}{f} = -at \Rightarrow \ln f(t) = -at + \ln cste \Leftrightarrow f(t) = \underbrace{cste}_{f(0)} e^{-at}$

II $\boxed{\frac{df}{dt} + af + b = 0}$ (carga no circuito RC, aumento da corrente no LC)

① $F = f + \frac{b}{a}$ A eq. a resolver se re-escreve: $\frac{dF}{dt} + aF = 0$ e podemos usar os métodos do I.

② $\frac{1}{a}\frac{df}{dt} = -(f + \frac{b}{a}) \Leftrightarrow \frac{df}{f + \frac{b}{a}} = -a\,dt \Leftrightarrow \frac{d(f+\frac{b}{a})}{f+\frac{b}{a}} = -a\,dt$

$\Rightarrow \left[\ln(f + \frac{b}{a})\right]_{f(0)}^{f(t)} = -at \Leftrightarrow \ln[f(t) + \frac{b}{a}] = -at + \ln[f(0) + \frac{b}{a}]$

$\Leftrightarrow f(t) = -\frac{b}{a} + [f(0) + \frac{b}{a}]e^{-at}$

③ $\frac{1}{a}\frac{df}{dt} = -(f + \frac{b}{a}) \Leftrightarrow \frac{df}{f + \frac{b}{a}} = -a\,dt \Leftrightarrow \frac{d(f+\frac{b}{a})}{f+\frac{b}{a}} = -a\,dt$

$\Rightarrow \ln[f(t) + \frac{b}{a}] = -at + \ln cste$

$\Leftrightarrow f(t) = -\frac{b}{a} + \underbrace{cste}_{f(0)+\frac{b}{a}} e^{-at}$