A lei de Ampère

Na aula anterior vimos como calcular o campo magnético devido a uma corrente, usando a lei de Biot-Savart. Vimos o seguinte paralelo:

$$d\vec{E} = k\,\frac{dq}{r^2}\,\hat{r} \quad \longleftrightarrow \quad d\vec{B} = k_m\,\frac{I\,d\vec{s} \wedge \hat{r}}{r^2}$$

(Coulomb) (Biot-Savart)

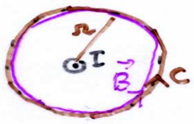
Sabemos que para casos com um alto grau de simetria, podemos usar a lei de Gauss p/ obter $\vec{E}$. Existe uma lei similar para B? sim.

$$\Phi_s = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{eiq}}{\varepsilon_0} \quad \longleftrightarrow \quad \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{eiq}$$

(Gauss) (Ampère)

Para entender bem uma lei, e saber suas limitações, é preciso ver primeiro sua derivação.

i) Caso de um fio reto no meio de C circular: $I \odot$



A orientação de C é antihorária por convenção.

Sabemos que as linhas de $\vec{B}$ são circulares e antihorárias (lei da mão direita).

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint_C B\,ds \quad \text{pois } \vec{B} \parallel d\vec{s}$$

$$= B \oint_C ds \quad \text{pois B tem o mesmo valor, } \forall ds$$

$$= B\,(2\pi r)$$

Por outro lado, sabemos pela lei de Biot-Savart, que $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Substituindo, obtemos:

Biot-Savart

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

(ii) mesmo caso que (i) mas I ⊗

$$\vec{B} /\!/ d\vec{s} \Rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = -B(2\pi r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot(2\pi r) = -\mu_0 I$$

(a usar na lei de Ampère)

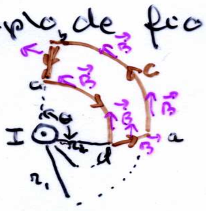
Assim obtemos uma 3ª lei de mão direita: encurve os dedos no sentido de integração sobre C, o polegar indica o sentido positivo da corrente. (Aquelas que atravessam a área delimitada por C no outro sentido são negativas)

(A 0ª lei é aquela que dá o sentido do vetor $\vec{u}\wedge\vec{v}$

A 1ª lei é aquela que dá o sentido de $\vec{B}$/$\vec{\mu}$ p/ espira c/ corrente

A 2ª lei é aquela que dá o sentido de $\vec{B}$ conhecendo o sentido de I num fio reto e numa espira.)

(iii) Exemplo de fio reto fora de C



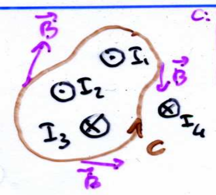
$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a$$

$$= B(r_1)\int_a^b ds + \int_b^c 0 - B(r_2)\int_c^d + \int_d^a 0$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} r_1\theta - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} r_2\theta = 0$$

i.e. $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$ se não houver corrente atravessando a área delimitada por C.

(iv) os resultados acima podem ser generalizados para C fechada qualquer e condutores quaisquer.



C: curva fechada

valor de $\vec{B}$ sobre $d\vec{s}$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{liq}$$

$d\vec{s}$ com módulo ds = pedaço de C, aponta ↺

com

I_{liq} = soma das correntes atravessando a área delimitada por C, contadas com sinal + ou − seguindo a lei de mão direita de cima

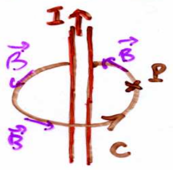
3

aqui $I_{liq} = I_1 + I_2 - I_3$

Aplicações da lei de Ampère

① Fio reto comprido*

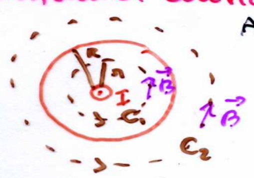
Por simetria e como as linhas de $\vec{B}$ são fechadas, elas são circulares. O sentido é dado pela lei da mão dir.



Escolhemos p/ C, um círculo centrado no fio e passando pelo ponto P onde queremos calcular $\vec{B}$.

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int B\cdot ds \text{ pois } \vec{B} \parallel d\vec{s} \text{ (cf. acima)}$$
$$= B \int ds \text{ pois } B \text{ não depende de } ds$$
$$= B\, 2\pi r$$
$$\underset{\text{Ampère}}{\overset{\uparrow}{=}} \mu_0 I_{enq} = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ como esperado}$$

② Condutor cilíndrico comprido



As linhas de $\vec{B}$ são circulares e ∮ como no ①

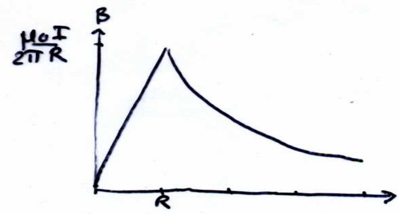
Se $r < R$:

$$\oint_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{s} = B(2\pi r) = \mu_0 I_{enq} = \mu_0 J(\pi r^2)$$

com $J = \dfrac{I}{\pi R^2}$

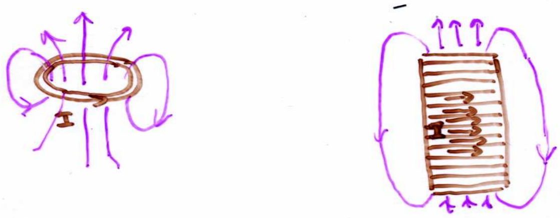
assim $B(2\pi r) = \mu_0 I \dfrac{r^2}{R^2} \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \dfrac{r}{R^2}$

Se $r > R$: $\oint_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{s} = B 2\pi r = \mu_0 I_{enq} = \mu_0 I \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$



3) Solenóide

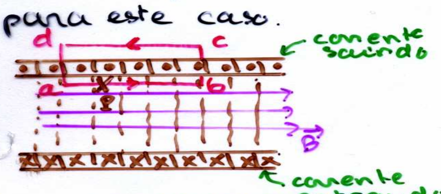
Um solenóide é um enrolamento helicoidal de fio, em geral com seção circular.
O campo magnético é parecido ao de um empilhamento de espiras:



(PARECIDO COM UM ÍMÃ-BARRA)

Os campos no meio das espiras se somam
Os campos entre espiras se cancelam, se bem próximas

Chamamos de solenóide ideal um solenóide longo que tem $\vec{B}$ uniforme dentro e nulo fora. Calculamos $|\vec{B}|$ para este caso.



(CORTE TRANSVERSAL

Sabemos que $\vec{B}$ é uniforme e achamos seu sentido com a lei de mão direita (p/ espira c/ corrente)
Escolhemos p/ C um retangulo de lado maior L, passando por P

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = B\int_a^b ds + \underbrace{\int_b^c 0}_{\vec{B}\perp d\vec{s} \text{ ou } \vec{B}=0} + \underbrace{\int_d^c 0}_{\vec{B}=0} + \underbrace{\int_d^d 0}_{\text{como } bc} = BL$$

$$= \mu_0 I_{eq} = \mu_0 n L I$$

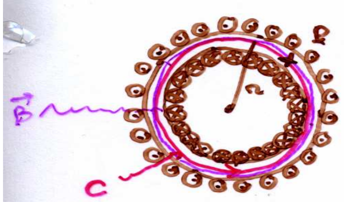
com n número de espiras por unidade de comprimento

$$\Rightarrow B = \mu_0 n I$$

(valor constante dentro do solenóide)

Toróide

É um solenóide encurvado em forma de pneu



As linhas de $\vec{B}$ formam círculos$_{r}$)

Usamos p/C um círculo passando pelo ponto R onde queremos obter $\vec{B}$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = -\int B\,ds \quad \text{pois } \vec{B} \text{ e } d\vec{s} \text{ anti//}$$
$$= -B\int ds \quad \text{pois } B \text{ não depende do ds}$$
$$= -B\,2\pi r$$
$$= \mu_0 I_{enq} = -\mu_0 N I \quad \text{com } N = \text{nº de espiras}$$
($\neq n$ do ③)

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

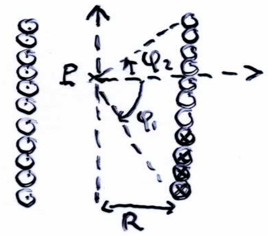
(valor dependendo de r)

Obs.: dentro ou fora do toróide $I_{enq} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$

Exercícios

① Solenóide não ideal: $\vec{B}$ sobre o eixo? (Serway §30.5)

Usando o campo de 1 espira mostrar:

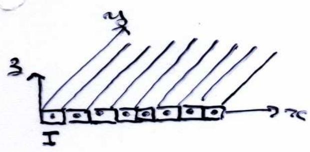


$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}(\operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1)$$

② Plano infinito conduzindo uma corrente (SEZ, exercício 29.65)

$\vec{B}$ acima e abaixo do plano?

n condutores por unidade de comprimento ao longo de Ox.



Resposta: $\vec{B}$ $\leftarrow$ se $z>0$, $\rightarrow$ se $z<0$

$$B = \frac{\mu_0 I n}{2}$$

2010

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \oint \epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_dA, \quad \vec{J} = n|q|\vec{v}_d,$$

$$\rho(T) = \rho_0[1+\alpha(T-T_0)], \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

8

2010

Questão 4

Um fio condutor na figura abaixo conduz uma corrente I no sentido indicado. Para $x \geq R$ e $y \geq R$ os trechos são retilíneos e estão ao longo de x e y, respectivamente (fios semi-infinitos). Para x e y menores do que R, o condutor forma um quarto de círculo com raio R, conforme a figura 1.

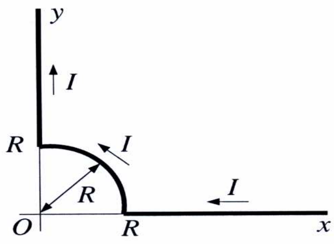


FIG. 1

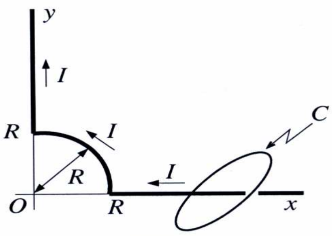


FIG. 2

(a) (1,0 ponto) Quais são os campos $\vec{B}$ no ponto O devido ao segmentos retilíneos do fio ?

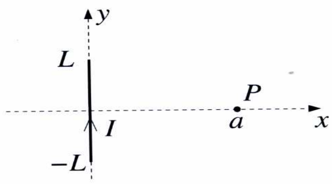
(b) (1,0 ponto) Qual é o campo $\vec{B}$ no ponto O devido ao segmento circular ?

(c) (1,0 ponto) Determine o valor da integral de linha do vetor $\vec{B}$ ao longo do percurso circular fechado C não coplanar com os fios e centrado no eixo x, conforme a figura 2.

9

Questão 4

Considere um fio retilíneo de comprimento $2L$, delgado, com uma corrente constante I, esticado ao logo do eixo y, como mostra a figura abaixo.



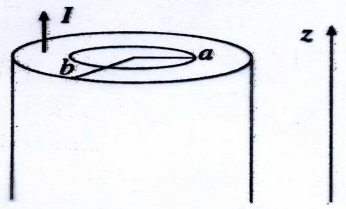
(a) (1,5 ponto) Usando a lei de Biot-Savart calcule o campo $\vec{B}$ gerado pelo fio num ponto P do eixo x a uma distância a do fio.

(b) (1,0 ponto) Suponha agora que o fio seja infinitamente longo, ou seja, que $L \to \infty$. Calcule o campo $\vec{B}$ gerado pelo fio no ponto P usando a lei de Ampère. Compare o resultado com o obtido fazendo o limite $L \to \infty$ na expressão do item (a).

2008

Questão 4

Por um cilindro reto, oco, muito longo de raio interno a e raio externo b, passa uma corrente I, uniformemente distribuida sobre sua seção reta.



(a) (0.5 ponto) Calcule o vetor densidade de corrente $\vec{J}$.

(b) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético B nas regiões $r < a$ e $r > b$.

(c) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético B na região $a < r < b$.