

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

**UM ESTUDO SOBRE A QUEBRA E A RESTAURAÇÃO DA  
SIMETRIA DE LORENTZ EM TEORIAS DE CALIBRE COM  
DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR**

**Fabricio Marques do Carmo**

*Orientador:* Prof. Dr. Adilson José da Silva

Tese apresentada ao Instituto de Física da  
Universidade de São Paulo para obtenção do título de  
Doutor em Ciências.

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Adilson José da Silva (USP)  
Prof. Dr. Pedro Rogério Sergi Gomes (UEL)  
Prof. Dr. Alysson Fábio Ferrari (UFABC)  
Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (USP)  
Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho (USP)

SÃO PAULO  
2017

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Carmo, Fabricio Marques do

Um estudo sobre a Quebra e a Restauração da Simetria de Lorentz em Teorias de Calibre com Derivadas de Ordem Superior. São Paulo, 2017.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física.  
Depto de Física Matemática  
Orientador: Prof. Dr. Adilson José da Silva  
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Física; 2. Física Teórica; 3. Física Matemática; 4. Teoria de Campos e Ondas; 5. Teoria Quântica de Campo.

USP/IF/SBI-049/2017

*À minha querida esposa Luciana, amor da minha vida,  
que encontrei uma certa vez, há muito tempo, na final de um torneio de  
damas.*



*Ao meu amado filho Alexandre, que muito desejavelmente vem, sem pedir licença, obrigar seu pai a incluir uma página a mais de dedicatória.*



Certa vez falei ao meu pai:

– Papai, eu aprendi na escola que Newton, com sua lei da gravitação, explica a atração entre os corpos, mas o que me parece é que ele afirma que essa atração acontece e depois diz *como* ela acontece, mas não diz *porque* ela acontece...

– E daí? – retrucou meu pai.

– E daí que eu quero saber o *porquê*!

– Ah, eu também quero! Então, essa é uma resposta que eu vou incumbir você de procurar, mas eu já vou lhe avisando: um *porquê* é somente o último *como* a que se tem acesso em uma infinita cadeia de *comos*...

Dedicado à memória de Edson Marques do Carmo

1946 – 2000



## Agradecimentos

Ao Prof. Adilson José da Silva, orientador, pela paciência e compreensão nos diversos momentos difíceis e pela valiosa ajuda e constante estímulo;

Ao Prof. Marcelo Otavio Caminha Gomes, pela intensa participação na fase final do trabalho e pela cuidadosa verificação dos cálculos;

Ao Enrique Alberto Gallegos, pela generosa ajuda em várias das etapas, ainda que a distância quisesse atrapalhar;

À Profa. Lucy Vitoria Credidio Assali, por toda a atenção e disposição em ouvir e ajudar;

Aos meus amigos e professores do IFUSP, que estiveram sempre dispostos a ajudar de forma relevante na resolução de problemas, em geral, totalmente não relacionados com seja lá o que for que eles faziam e cuja lista de nomes é, felizmente, extensa demais para ser aqui colocada;

Aos meus amigos do Colégio Etapa, pela fantástica oportunidade de trabalhar em um ambiente estimulante e academicamente diverso e por me apoiarem e muitas vezes me cobrirem, contribuindo tanto com a conclusão desta tese como com meu desenvolvimento como professor;

Ao meu grande amigo Claudio Padilha e à mãe dele, Dona Tatiana, pela hospitalidade ímpar ao terem me acolhido em sua casa;

À minha grande amiga Maria Fernanda Araújo de Resende por ser uma das poucas pessoas que me apoiaram em tudo até o fim;

Aos meus amigos Thiago Sanches, Fernanda Rosa e Danilo Necchi pelo pronto auxílio diante da derradeira pane que se acometeu sobre o meu computador a poucas semanas do término do prazo para depósito da tese;

À minha querida esposa Luciana, pelo extremamente relevante e enorme (com ênfase em enorme) amor que, de tão grande, ao não caber mais, nos trouxe, para permitir guardar o excedente, o nosso filho Alexandre;

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), pelo apoio concedido durante o período de realização deste trabalho.



---

## RESUMO

Neste trabalho estudamos uma teoria de calibre escalar que viola a simetria de Lorentz. Inicialmente, apresentamos conceitos gerais sobre invariância de Lorentz e sobre teorias de calibre em  $(d + 1)$  dimensões. Então, introduzimos a quebra suave da simetria de Lorentz, que consiste na inclusão de termos anisotrópicos na lagrangiana. Depois, discutimos a introdução de termos de quebra com maior número de derivadas espaciais. Após revisar brevemente o formalismo de integrais de trajetória, analisamos o procedimento de contagem de potências na presença de derivadas de ordem superior. Em seguida, construímos o nosso modelo em analogia com a eletrodinâmica escalar de acordo com a proposta de Horava e Lifshitz. A teoria resultante contém uma grande quantidade de termos de interação permitidos pelas simetrias remanescentes. Com o objetivo de analisar a restauração da simetria de Lorentz em uma escala de baixas energias, as integrais de 1-loop foram expandidas em séries de potências dos momentos externos ao redor de  $p = 0$ . As contribuições divergentes a essas integrais foram determinadas e esse resultado foi usado para fixar os contratermos no esquema MS. Por fim, determinamos as funções do grupo de renormalização e passamos a analisar a evolução dos parâmetros em 3 casos distintos. Em um desses casos, foi determinado um intervalo de valores relativos entre os pesos dos termos de derivadas mais altas para o qual a simetria de Lorentz pode ser restaurada.



---

## ABSTRACT

In this work we study a scalar gauge field theory which violates Lorentz Symmetry. Initially, we present general concepts on Lorentz invariance and gauge theories in  $(d + 1)$  dimensions. Then, we introduce soft breaking of Lorentz Symmetry, which consists of the inclusion of anisotropic terms in the Lagrangian. After that, we discuss the introduction of breaking terms with a higher number of spatial derivatives. After briefly reviewing the formalism of path integrals, we analyze the power counting procedure in the presence of higher derivatives. Following this, we built our model in analogy with the scalar electrodynamics according to the proposal of Horava and Lifshitz. The resulting theory contains a huge amount of interaction terms allowed by the remaining symmetries. In order to analyze the restoration of the Lorentz Symmetry in a scale of low energies, the 1-loop integrals were expanded in power series of the external momenta around  $p = 0$ . The divergent contributions to these integrals were found and this result was used to fix the counterterms in the  $\overline{\text{MS}}$  scheme. Finally, we determined the renormalization group functions and then started to analyze the evolution of the parameters in 3 distinct cases. For one of these cases, we determined an interval for the ratio between the weights of the higher derivative terms for which the Lorentz Symmetry can be restored.



# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1. Aspectos Gerais</b>	<b>7</b>
1.1. Teorias de Campos e a Simetria de Lorentz . . . . .	7
1.1.1. Notação e Convenções . . . . .	7
1.1.2. Transformações de Lorentz . . . . .	8
1.1.3. Invariância de Lorentz . . . . .	12
1.2. Teorias de Calibre . . . . .	14
1.2.1. Teorias de Campos de Calibre . . . . .	14
1.2.2. Conjugação de Carga . . . . .	19
1.2.3. Fixação de Calibre . . . . .	20
1.3. Teorias com Derivadas de Ordem Superior . . . . .	21
1.4. Quebra da Simetria de Lorentz em Teorias de Calibre . . . . .	26
<b>2. Renormalização</b>	<b>29</b>
2.1. O Formalismo de Integrais de Trajetória . . . . .	29
2.1.1. Funcionais Geradores e Funções de Green . . . . .	29
2.1.2. Expansões Perturbativas . . . . .	33
2.2. Divergências Ultra-violeta . . . . .	35
2.2.1. Contagem de Potências e Invariância de Escala . . . . .	35

2.2.2. Grau de Divergência Superficial . . . . .	37
2.2.3. Subtração de Divergências . . . . .	40
2.2.4. Regularização Dimensional . . . . .	41
2.3. Grupo de Renormalização . . . . .	45
2.3.1. Equações do Grupo de Renormalização . . . . .	45
2.3.2. Restauração da Simetria de Lorentz . . . . .	49
<b>3. Eletrodinâmica Escalar com Derivadas de Ordem Superior</b>	<b>51</b>
3.1. Definindo uma Teoria de Campos com Derivadas de Ordem Superior . . . . .	51
3.1.1. Lagrangiana Clássica e Definição da Teoria . . . . .	52
3.1.2. Regras de Feynman: Propagadores Livres e Vértices . . . . .	55
3.1.3. Escala Anisotrópica e Análise Dimensional . . . . .	59
3.1.4. Contagem de Potências e Grau de Divergência Superficial . . . . .	61
3.1.5. Critérios para o Cálculo das Funções de Green . . . . .	63
3.2. Divergências nas Correções Radiativas de 1-Loop ao Setor de Calibre . . . . .	65
3.2.1. Função de Green de 2-Pontos dos Campos de Calibre . . . . .	65
3.2.2. Expansão em Taylor para Baixas Energias . . . . .	68
3.2.3. Resíduos das Correções do Setor de Calibre . . . . .	70
3.3. Divergências no Setor de Matéria . . . . .	72
3.3.1. Função de Green de 2-Pontos dos Campos de Matéria . . . . .	72
3.3.2. Resíduo da Correção do Setor de Matéria . . . . .	75
3.4. Divergências nas Correções aos Vértices de Interação . . . . .	76
3.4.1. Funções de Green de 3-Pontos . . . . .	76
3.4.2. Resíduos das Funções de 3-Pontos . . . . .	83
3.5. Identidades de Ward . . . . .	85

---

<b>4. Estudo do Grupo de Renormalização</b>	<b>89</b>
4.1. Contratermos . . . . .	89
4.2. Equações do Grupo de Renormalização . . . . .	93
4.3. Solução Perturbativa das Equações do Grupo de Renormalização . . . . .	99
4.4. Análise da Evolução dos Parâmetros com a Escala de Energia . . . . .	108
<b>5. Considerações Finais</b>	<b>117</b>
<b>A. Equações de Euler-Lagrange e o Teorema de Noether</b>	<b>121</b>
<b>B. Ação Fixadora de Calibre e Ação de Fadeev-Popov</b>	<b>123</b>
<b>C. Cálculo das Integrais em 1-Loop</b>	<b>129</b>
C.1. Cálculo da Parte Divergente das Integrais . . . . .	129
C.2. Truque de Feynman e Integrais com Mais de um Propagador . . . . .	132
C.3. Cálculo Exato na Ausência de Termos Usuais . . . . .	133
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>137</b>



# Introdução

## A Simetria de Lorentz

O estudo da física sob a perspectiva das simetrias compõe um dos mais profundos e fascinantes campos de pesquisa teórica, além de funcionar como uma poderosa ferramenta capaz de guiar e delimitar a análise de experimentos. Não apenas uma porção considerável, mas possivelmente a maioria esmagadora do conhecimento físico construído desde o final do século XIX até os dias de hoje se apoia em argumentos de simetria e nas consequências que deles decorrem. Nesse sentido, as simetrias podem ser pensadas como o conjunto de propriedades fundamentais da natureza e a física funciona então como o conjunto das regras que decorrem de tais propriedades. Esse caráter conectivo entre as simetrias e a física foi formalmente estabelecido em 1918 quando a matemática Emmy Noether apresentou seu célebre teorema [1], determinando que, para cada simetria da ação ( $S = \int dtL$ ), deve haver uma grandeza conservada associada. Se realizamos um experimento hoje ou daqui a um ano, reproduzindo as mesmas condições, esperamos obter os mesmos resultados. Conforme o teorema de Noether, dessa simetria sob traslações no tempo, resulta a conservação da energia. Da mesma maneira, da simetria sob traslações espaciais, que está associada à homogeneidade do espaço, vem a conservação do momento. Da simetria sob rotações, associada à isotropia do espaço, vem a conservação do momento angular.

Do ponto de vista matemático, as simetrias devem ser entendidas como grupos de

transformações que, ao agirem sobre um determinado funcional, mantêm o mesmo invariante. Os funcionais de interesse da física, por sua vez, são em geral as ações que obedecem ao princípio de Hamilton já que, de sua minimização, decorrem as equações de movimento que descrevem os fenômenos de interesse. A conexão entre a física e o estudo das simetrias se faz central, em especial na formulação das teorias quânticas de campos, possibilitando, por exemplo, delimitar as formas permitidas dos elementos da ação que pretende ser compatível com determinado conjunto de regras impostas pela natureza. Por outro lado, a relaxação de determinada imposição pode ser implementada por meio da introdução de termos na ação que violam determinada simetria. Nesse caso, dizemos que a teoria em questão apresenta uma *quebra explícita de simetria*. Outro cenário possível ocorre quando um sistema possui diversos estados subsequentes com iguais probabilidades de ocorrência mas, como apenas um desses estados deve de fato ocorrer, quando isso acontece a probabilidade de ocorrência dos demais é reduzida a zero e dizemos que houve uma *quebra espontânea de simetria*. De fato, o mecanismo de Higgs, segundo o qual é descrita a geração de massa dos bósons do Modelo Padrão, é um modelo de quebra espontânea de simetria.

Ainda no século XIX, a formulação moderna das equações de Maxwell por Heaviside e Gibbs em 1884, utilizando cálculo vetorial, produziu uma representação matemática que destacava a percepção das simetrias físicas entre os vários campos. Por exemplo, a lei de Gauss destaca a inexistência de monopólos magnéticos enquanto a lei de Faraday carece de um termo de corrente. Essa aparente assimetria entre as equações convidava a estudar a possibilidade da existência de monopólos magnéticos. Em 1931, Dirac demonstrou [2] que, se algum monopólo magnético existisse no universo, então, como consequência, toda a carga elétrica deveria ser quantizada. Como sabemos, embora nenhum monopólo magnético tenha sido observado até o momento, a carga elétrica é de fato quantizada. Assim, com base em um argumento de simetria, várias tentativas

de detectar tais monopólos têm sido sistematicamente realizadas.

As equações de Maxwell também podem ser escritas em termos de tensores e quadri-vetores de modo a produzir uma forma manifestamente covariante sob transformações de Lorentz. De fato, a relatividade restrita é uma teoria do espaço-tempo que permite uma descrição unificada da eletrodinâmica e a mecânica clássica que, nesse caso, emerge como um limite de baixas velocidades. Essa teoria, porém, não é capaz de descrever de forma satisfatória a física na escala de pequenas distâncias, onde efeitos quânticos devem ser considerados. Para isso, a mecânica quântica constitui uma abordagem mais apropriada. Nesse sentido, podemos dizer também que a mecânica clássica emerge como um limite de longas distâncias da mecânica quântica. Entretanto, para descrever o mundo das coisas muito pequenas e muito rápidas, ou seja, para caracterizar a física de altas energias, é preciso combinar a relatividade restrita e a mecânica quântica. Esse é justamente o propósito das teorias quânticas de campos. Portanto, em princípio, uma teoria de campos que se preze deve ter como propriedade intrínseca a compatibilidade com a relatividade restrita. Essa compatibilidade se manifesta por meio da covariância das equações de movimento ao se passar de um referencial inercial a outro. Em outras palavras, a ação que representa uma teoria quântica de campos deve ser *invariante sob transformações de Lorentz*. Essa propriedade fundamental é a denominada *simetria de Lorentz* que, no contexto unificado de espaço-tempo da relatividade, engloba tanto as rotações espaciais quanto os impulsos (*boosts*), que podem ser vistos eurísticamente como rotações que envolvem o eixo do tempo e que correspondem às transformações de coordenadas entre referenciais inerciais que se deslocam com velocidade relativa constante. Uma descrição mais cuidadosa das transformações e da simetria de Lorentz é feita no Capítulo 1. O grupo de transformações mais geral consistente com uma teoria quântica de campos relativística que não inclui supersimetria é o grupo de Poincaré, que inclui, além do grupo das transformações de Lorentz,

também as translações no espaço-tempo.

## O estudo da Quebra da Simetria de Lorentz

Diante da força do argumento que requer que a simetria de Lorentz seja respeitada, a definição de uma teoria que a quebre explicitamente pode parecer, à primeira vista, um tanto quanto radical e contraditória. Entretanto, a busca por violações da simetria de Lorentz não apenas tem lugar em campos de pesquisa teórica, mas também é objeto de análise experimental e de tentativas de observação astronômica. Alguns desses estudos procuram determinar se violações ou exceções podem existir para leis físicas bem conhecidas, visando comparar esses desvios com previsões de variantes da gravitação quântica, da teoria de cordas, bem como de versões alternativas da relatividade geral. Neste trabalho, em particular, adotaremos, dentro do escopo de teorias de calibre escalares e abelianas, a abordagem proposta por Horava [5] [6] como uma versão da teoria da gravidade quântica análoga à teoria do ponto crítico de Lifshitz [7].

Conforme destacado por P. R. S. Gomes [8], dois fatos notáveis da física que contribuem para que possamos progredir no entendimento da natureza são a *dependência na escala* e o *desacoplamento entre diferentes escalas*. Isso significa, na prática, que o comportamento observado da natureza em diferentes escalas pode ser completamente distinto e que a física que descreve determinada escala não necessariamente irá interferir na descrição de outras. Nesse sentido, se pretendemos descrever o universo em larga escala, devemos nos apoiar em uma teoria cosmológica baseada na relatividade geral. Para descrever eventos astronômicos em menor escala, como a planetária por exemplo, a mecânica newtoniana passa a fornecer a descrição mais apropriada e sucinta e os efeitos relativísticos se tornam desprezíveis. Por outro lado, conforme reduzimos a escala de distâncias, em algum ponto, diferentes efeitos se tornarão relevantes e entraremos no domínio da mecânica quântica. Entretanto, conforme explicado acima,

para descrever a física de altas energias, a mecânica quântica deve ser combinada com a relatividade restrita e precisamos de teorias quânticas de campos. Essas teorias devem respeitar a simetria de Lorentz – isso se pretendem se manter compatíveis com a relatividade restrita, é claro. No entanto, não seria plausível supor que a simetria de Lorentz em si pode também ser uma característica da natureza que surge, isto é, que *emerge* em um mundo de energias muito mais baixas do que aquelas encontradas no universo primordial? De fato, a física na escala de Planck não é completamente compreendida e o desacoplamento entre diferentes escalas abre uma janela para indagar se determinadas simetrias não poderiam ser violadas em escalas altíssimas de energia. É claro que, para que esse tipo de proposta faça sentido, é preciso que a simetria de Lorentz seja *restaurada* quando a escala tende ao domínio das teorias de campos usuais. É justamente nessa análise que reside o objetivo deste trabalho, ou seja, em supor que a simetria de Lorentz não é necessariamente uma simetria fundamental no sentido de ser válida para todo o espectro de energia, mas sim, que pode se tratar de uma simetria emergente.

Em analogia com o que é feito por Iengo e Serone [9] para teorias de calibre espinoriais, iremos construir e analisar uma teoria de calibre escalar. Mesmo se tratando de uma teoria de campos escalares, nossa teoria, como veremos a partir do Capítulo 3, se mostrou muito mais complexa do que a do caso fermiônico. Isso porque naquele caso, justamente por causa das simetrias que anulam certas integrais envolvendo propagadores dos campos espinoriais e de uma quantidade maior de restrições imposta sobre a teoria, os cálculos se tornam muito mais simples. Isso também acaba por limitar consideravelmente a quantidade de termos que podem ser incluídos na ação. Nesse sentido, a ausência de restrições equivalentes acaba levando à construção de uma teoria que contém um número relativamente grande de termos de interação e cuja análise completa ainda requer ir muito além do escopo deste trabalho em particular. Nossa

abordagem para implementar a quebra da simetria de Lorentz consiste de duas partes. A primeira corresponde à introdução de termos anisotrópicos na parte espacial da lagrangiana da eletrodinâmica quântica escalar, porém sem modificar seu caráter operacional. Isso induz a chamada *quebra suave* da simetria de Lorentz. A segunda parte, por sua vez, corresponde à introdução de termos, também na parte espacial, com derivadas de ordem superior. Esses termos, conforme ilustrado por Horava [5] [6], vêm a contribuir com a melhoria do comportamento ultravioleta da teoria.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: No Capítulo 1 são discutidos aspectos gerais da simetria de Lorentz e de teorias de calibre e é apresentada a quebra da simetria de Lorentz por meio da inclusão de derivadas de ordem superior. O Capítulo 2 contém uma introdução ao formalismo de integrais de trajetória seguida de uma descrição do procedimento de renormalização aplicado a teorias com anisotropias entre partes temporal e espacial. Também é descrita ali a construção das equações do grupo de renormalização e a maneira de analisar a evolução dos parâmetros para tais teorias. No Capítulo 3 é construído o modelo que será analisado neste trabalho. Esse modelo é construído em analogia com a eletrodinâmica escalar, sendo seguidos os procedimentos definidos no Capítulo 1 para inclusão de derivadas de ordem superior. Ainda no Capítulo 3 são calculadas contribuições divergentes para as funções de 2 e 3 pontos da teoria e no Capítulo 4 é aplicado o procedimento de renormalização para remover tais divergências. As funções de 2 e 3 pontos renormalizadas são então utilizadas para construir equações do grupo de renormalização. O final do Capítulo 4 é dedicado à análise das funções beta e da evolução dos parâmetros efetivos da teoria com a escala de energia. Para certas condições especiais, foi verificada a possibilidade da restauração da simetria de Lorentz. No Capítulo 5 são apresentadas as considerações finais.

# 1. Aspectos Gerais

Ao longo deste capítulo introdutório, apresentaremos a notação e convenções a serem utilizadas juntamente com a exposição e detalhamento dos conceitos de simetria de Lorentz e simetria de calibre em espaços de Minkowski de dimensão arbitrária. Também falaremos sobre teorias com derivadas de ordem superior e sobre o interesse em estudá-las bem como as consequências associadas. Além disso, descreveremos a quebra explícita da simetria de Lorentz. Discutiremos uma maneira de implementar essa quebra por meio da introdução de anisotropias entre as partes temporal e espacial de uma teoria, o interesse em estudar teorias que violam a simetria em questão e as consequências que surgem em oposição ao comportamento usual observável da física.

## 1.1. Teorias de Campos e a Simetria de Lorentz

### 1.1.1. Notação e Convenções

Nesse trabalho adotaremos a métrica de Minkowski generalizada a um espaço-tempo de dimensão  $(d + 1)$  como:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1) \quad (1.1)$$

Os índices gregos  $(\mu, \nu, \rho, \sigma, \alpha, \beta, \text{etc.})$  podem assumir os valores  $0, 1, \dots, d$ , onde o índice 0 corresponde à parte temporal. Para representar a parte espacial de vetores, por exemplo, utilizaremos índices latinos  $(i, j, k, l, a, b, \text{etc.})$  podendo assumir os valores

$1, 2, \dots, d$ .

A operação de conversão de índices covariantes em contravariantes e vice-versa é feita da maneira usual:

$$a^\mu = \eta^{\mu\nu} a_\nu \quad , \quad a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu \quad (1.2)$$

Dada a forma particularmente simples da métrica, a relação acima permite subir e descer índices simplesmente mudando ou preservando um sinal caso o índice em questão seja, respectivamente, espacial ou temporal. Com isso, para um objeto qualquer, a relação entre suas partes covariantes e contravariantes se reduz a  $a^0 = a_0$  e  $a^i = -a_i$ .

Contrações são normalmente representadas por meio da convenção de soma de Einstein com índices repetidos, sendo um índice em cima e o outro em baixo. Além disso, em face da relação entre índices covariantes e contravariantes, ao longo desse trabalho índices latinos repetidos, estejam eles em cima ou em baixo, implicam em soma de 1 até  $d$ . Logo:

$$a \cdot b \equiv \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^\mu b_\mu = a_0 b_0 - a_i b_i \quad (1.3)$$

### 1.1.2. Transformações de Lorentz

De acordo com a relatividade restrita, a relação entre as coordenadas  $x = (x^0, x^i)$  medidas em um referencial  $\mathcal{S}$  e as coordenadas  $x' = (x'^0, x'^i)$  em um referencial  $\mathcal{S}'$  é dada por um grupo de transformações lineares, homogêneas e isotrópicas que preservam a magnitude dos vetores, ou seja, para as quais  $x' \cdot x' = x \cdot x$  e que são dadas por:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.4)$$

onde a matriz  $\Lambda$  é a matriz da transformação. Essas transformações são as chamadas *transformações de Lorentz*.

Uma rotação das coordenadas em um espaço euclidiano é uma transformação que preserva a magnitude dos vetores, que naquele caso é definida como o produto escalar de um vetor por ele mesmo da mesma maneira que em (1.3), porém substituindo a métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  pela métrica euclidiana  $\delta_{\mu\nu}$ . Como as transformações de Lorentz são definidas de modo a preservar a magnitude dos vetores no espaço de Minkowski, elas podem ser pensadas, superficialmente, como rotações das coordenadas do espaço-tempo. Assim, o observador em  $\mathcal{S}'$  verá um espaço-tempo “rodado” em relação ao visto por  $\mathcal{S}$ . Com isso, devemos ter:

$$\begin{aligned} x' \cdot y' = x \cdot y &\Rightarrow \eta_{\mu\nu} x'^{\mu} y'^{\nu} = \eta_{\lambda\sigma} x^{\lambda} y^{\sigma} \Rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\lambda} \Lambda^{\nu}_{\sigma} x^{\lambda} y^{\sigma} = \eta_{\lambda\sigma} x^{\lambda} y^{\sigma} \\ &\Rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\lambda} \Lambda^{\nu}_{\sigma} \eta^{\sigma\rho} = \eta_{\lambda\sigma} \eta^{\sigma\rho} \Rightarrow \Lambda^T_{\lambda\nu} \Lambda^{\nu\rho} = \delta_{\lambda\rho} \Rightarrow \Lambda^T \Lambda = \mathbb{1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

e tomando o determinante dos dois lados após a última passagem acima, temos:

$$\det \Lambda = \pm 1 \quad (1.6)$$

Além disso, a partir do desenvolvimento feito acima, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \Lambda^T_{0\mu} \Lambda^{\mu 0} = \delta^0_0 = 1 &\Rightarrow \Lambda^T_{00} \Lambda^{00} + \Lambda^T_{0i} \Lambda^{i0} = 1 \Rightarrow \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 - \Lambda^i_0 \Lambda^i_0 = 1 \\ &\Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_i (\Lambda^i_0)^2 \geq 1 \end{aligned}$$

Logo:

$$\Lambda^0_0 \geq 1 \quad \text{ou} \quad \Lambda^0_0 \leq -1 \quad (1.7)$$

A combinação das possibilidades definidas em (1.6) e (1.7) define quatro diferentes ramos de um grupo. Em particular, o ramo que contém a identidade, que é aquele para o qual  $\det \Lambda = 1$  e  $\Lambda^0_0 \geq 1$ , forma um novo grupo, que chamaremos simplesmente de *grupo de Lorentz*, que costuma ser denotado por  $L^{\uparrow}_+$  em textos de física teórica.

Em textos mais específicos da área de teoria de grupos, para um espaço-tempo de  $(3 + 1)$  dimensões, ele costuma ser denotado por  $SO^+(3, 1)$ . Desse modo, para um espaço-tempo de  $(d + 1)$  dimensões, o grupo de Lorentz será  $SO^+(d, 1)$ .

No caso usual de  $(3 + 1)$  dimensões, as transformações de Lorentz envolvem 6 parâmetros independentes e um gerador associado a cada parâmetro. Rotações puramente espaciais mantêm intactos o eixo do tempo e, com a escolha conveniente do sistema de coordenadas, mais um eixo espacial, transformando os eixos espaciais remanescentes. Com isso, os parâmetros associados às rotações puramente espaciais são 3 ângulos de rotação. Os outros 3 parâmetros correspondem, cada um, a um *boost* em uma determinada direção. Considerando o caso de  $(d + 1)$  dimensões, teremos  $d$  parâmetros associados a *boosts* em cada uma das direções espaciais e mais  $d(d - 1)/2$  parâmetros associados à rotações puramente espaciais, que devem ser entendidas como transformações que atuam sobre dois eixos espaciais deixando os demais eixos intactos.

Os geradores das transformações de Lorentz em  $(d + 1)$  dimensões são dados por:

$$(J_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = -i (\delta_\rho^\mu \eta_{\sigma\nu} - \delta_\sigma^\mu \eta_{\rho\nu}) \quad (1.8)$$

e a álgebra desses geradores, por sua vez, é definida por meio das relações de comutação:

$$[J_{\lambda\delta}, J_{\rho\sigma}] = -i (\eta_{\delta\rho} J_{\lambda\sigma} + \eta_{\lambda\sigma} J_{\delta\rho} - \eta_{\delta\sigma} J_{\lambda\rho} - \eta_{\lambda\rho} J_{\delta\sigma}) \quad (1.9)$$

Com isso, os elementos da matriz  $\Lambda$  de uma transformação de Lorentz podem ser escritos em função de um total de  $(d+1)d/2$  parâmetros  $\alpha^{\rho\sigma}$  contraídos com os geradores correspondentes como:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \left( e^{\frac{i}{2} \alpha^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma}} \right)^\mu{}_\nu = \delta_\nu^\mu + \frac{i}{2} \alpha^{\rho\sigma} (J_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu + \dots \quad (1.10)$$

Em uma teoria de campos, um campo é uma função das coordenadas do espaço-

tempo que faz o papel de uma coordenada generalizada ou, no caso quântico, é uma superposição de modos normais cujos coeficientes são operadores de criação e destruição de quanta de energia, as partículas. Sendo funções das coordenadas, os campos também devem obedecer leis de transformação quando passamos do referencial  $\mathcal{S}$  ao  $\mathcal{S}'$ . Assim, podemos classificar diferentes tipos de campo de acordo com a maneira como os mesmos se transformam.

Um campo escalar  $\phi(x)$ , por definição, é um invariante sob transformações de Lorentz, de modo que:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x') = \phi(x) \quad (1.11)$$

Um campo vetorial  $A^\mu(x)$ , por sua vez, se transforma da mesma maneira que as coordenadas do espaço-tempo:

$$A^\mu(x) \longrightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \quad (1.12)$$

Já um tensor de ordem  $N$ , sob o ponto de vista de como as transformações de Lorentz atuam sobre ele, pode ser pensado como um produto de  $N$  vetores. Assim, temos:

$$T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}(x) \longrightarrow T'^{\mu_1\mu_2\dots\mu_N}(x') = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2} \dots \Lambda^{\mu_N}{}_{\nu_N} T^{\nu_1\nu_2\dots\nu_N}(x) \quad (1.13)$$

e nesse sentido, podemos entender um campo escalar como um tensor de ordem zero e um vetor como um tensor de ordem 1.

Em um espaço-tempo de dimensão  $(d + 1)$ , um espinor  $\psi(x)$  é uma matriz com  $N = 2^{\lceil (d+1)/2 \rceil}$  componentes <sup>1</sup>  $\psi_A$ ,  $A = 1, 2, \dots, N$  que se transforma como:

$$\psi_A(x) \longrightarrow \psi'_A(x') = S_{AB}\psi_B(x) \quad (1.14)$$

---

<sup>1</sup>A função  $\lceil (d + 1)/2 \rceil$  retorna o maior número inteiro menor ou igual a  $(d + 1)/2$ .

onde a matriz  $S$  constitui a representação correspondente das transformações de Lorentz no grupo de simetria dos espinores, sendo dada por:

$$S_{AB} = \left( e^{\frac{i}{2}\alpha_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}} \right)_{AB} = \delta_{AB} + \frac{i}{2}\alpha_{\rho\sigma}(M^{\rho\sigma})_{AB} + \dots \quad (1.15)$$

onde:

$$M^{\rho\sigma} = \frac{i}{4}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \quad (1.16)$$

são os geradores escritos em função das matrizes de Dirac  $\gamma^\mu$ <sup>2</sup>. Com isso, espinores em espaços-tempo de  $(3 + 1)$  dimensões ou  $(4 + 1)$  dimensões, por exemplo, terão  $N = 4$  componentes e as matrizes de Dirac  $\gamma^\mu$  serão matrizes  $4 \times 4$ . Por outro lado, para  $(1 + 1)$  ou  $(2 + 1)$  dimensões, os espinores terão  $N = 2$  componentes e as matrizes de Dirac serão matrizes  $2 \times 2$ .

### 1.1.3. Invariância de Lorentz

Para que uma teoria de campos seja consistente com a relatividade restrita, a ação que representa a teoria deve ser invariante sob transformações de Lorentz ainda que os campos nela contidos não o sejam isoladamente. Para que isso ocorra, a densidade lagrangiana transformada não deve diferir de si própria exceto por uma derivada total irrelevante sob integração. Nesse sentido, sendo  $\theta^\mu$  uma função arbitrária dos campos, devemos ter:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \theta^\mu \quad (1.17)$$

e dizemos que a teoria descrita pela densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  é *invariante sob transformações de Lorentz* ou, em outras palavras, que o grupo de Lorentz é um *grupo de*

---

<sup>2</sup>Não discutiremos em maior detalhe aqui o caso de campos espinoriais uma vez que, nesse trabalho, não estudaremos teorias fermiônicas.

*simetria* dessa teoria.

Termos de interação na lagrangiana que contenham apenas campos escalares, são automaticamente invariantes de acordo com (1.11). Entretanto, ainda que estejamos nos restringindo a teorias que envolvam apenas campos escalares, a lagrangiana deve conter termos com derivadas para descrever o comportamento dinâmico dos campos. Uma derivada  $\partial^\mu$  se transforma da mesma maneira que um vetor, ou seja, sua lei de transformação é dada por (1.12) de modo que:

$$\partial^\mu \longrightarrow \partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu \quad (1.18)$$

Então, seguindo o mesmo desenvolvimento mostrado em (1.5), podemos concluir que o operador D'Alambertiano  $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu$  atuando sobre um campo escalar é um invariante de Lorentz. Isso permite a inclusão na lagrangiana, por exemplo, de termos da forma  $(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi)$ , que sob integração por partes, pode ser reescrito como:

$$-\phi \square \phi + \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi)$$

onde o primeiro termo é claramente invariante e o segundo desaparece sob integração.

Esse raciocínio pode ser estendido, de modo geral, para concluir que os termos da lagrangiana que contém índices de Lorentz, seja na forma de operadores derivativos ou na forma de campos vetoriais ou tensoriais, devem ter esses índices contraídos.

Assim, podemos ter, por exemplo, termos da forma  $\phi^n$  representando auto-interações de campos escalares ou  $A^\mu A_\mu \phi^* \phi$  representando interações entre campos de calibre e campos escalares carregados, entre muitas outras possibilidades. Além de termos de interação, podemos ter termos cinéticos como  $(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi)$ , já citado acima, ou  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  envolvendo apenas campos de calibre<sup>3</sup>. Em uma teoria fermiônica, podemos mostrar

---

<sup>3</sup>Falaremos sobre teorias de calibre mais adiante.

ainda que termos da forma  $\bar{\psi}\psi$ ,  $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ , etc. também obedecem à simetria de Lorentz.

## 1.2. Teorias de Calibre

### 1.2.1. Teorias de Campos de Calibre

#### Teoria de Calibre Global

Consideremos uma teoria de campos definida por uma densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  dependendo de campos  $\phi_j$ , de suas derivadas  $\partial_\mu\phi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  e, eventualmente, contendo termos com derivadas de ordem superior. De acordo com o teorema de Noether, sabemos que simetrias globais dessa densidade lagrangiana, isto é, sua invariância a menos de uma divergência total sob certos tipos de transformações, devem acarretar em leis de conservação. As simetrias do espaço-tempo, isto é, a exigência de que  $\mathcal{L}$  seja invariante por translações e transformações de Lorentz, leva, por exemplo, à lei de conservação que define o tensor energia-momento.

Consideremos agora o caso da carga elétrica. A carga elétrica, é uma grandeza cuja lei de conservação *não está* associada à simetrias do espaço-tempo em si, mas à invariância de uma teoria sob determinado tipo de transformações nos campos  $\phi_j$  da forma:

$$\phi_j(x) \longrightarrow \phi'_j(x) = e^{iq_j\Lambda}\phi_j(x) \quad (1.19)$$

onde  $q_i$  e  $\Lambda$ , em princípio, são ambos constantes.

Um termo de  $\mathcal{L}$  que contenha o produto de todos os  $n$  campos,  $\phi_1\phi_2\cdots\phi_n$ , se transforma sob (1.19) como:

$$\phi_1\phi_2\cdots\phi_n \rightarrow e^{i(q_1+q_2+\cdots+q_n)\Lambda}\phi_1\phi_2\cdots\phi_n \quad (1.20)$$

Como a densidade lagrangiana deve ser real, devemos exigir que a soma das constan-

tes  $q_j$  se anule. Assim, qualquer termo de  $\mathcal{L}$  contendo o produto de todos os campos permanece invariante sob as transformações (1.19). Além disso, se  $q_j$  e  $\Lambda$  são constantes, a densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  também pode conter qualquer produto entre os campos e suas derivadas, desde que esse produto ainda contenha todos os campos e que tenha todos os índices de Lorentz das derivadas contraídos, caso tenhamos a pretensão de manter  $\mathcal{L}$  invariante de Lorentz.

As transformações (1.19) são chamadas *transformações de calibre do primeiro tipo* ou *transformações de calibre globais* e a teoria definida pela densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$ , invariante sob essas transformações, é então chamada de *teoria de calibre global*.

Se  $\Lambda$  for suficientemente pequeno, as transformações (1.19) correspondem a  $\phi_j \rightarrow \phi_j + \delta\phi_j$ , isto é, elas fazem os campos  $\phi_j$  variarem de uma quantidade  $\delta\phi_j$  dada por:

$$\delta\phi_j = iq_j\Lambda\phi_j \quad (1.21)$$

Sendo a teoria invariante de calibre, de acordo com o princípio variacional, devemos ter  $\delta \int dx \mathcal{L} = 0$  de modo que  $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \theta^\mu$ . Com isso, (1.21) pode ser usada juntamente com as equações do movimento<sup>4</sup> para definir uma corrente conservada como:

$$j^\mu = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \partial^{m-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial^{n-1} \phi)} \right] \delta(\partial^{n-m} \phi) \quad (1.22)$$

a partir da qual é possível definir uma *carga* conservada dada por:

$$Q = \int dV j^0 \quad (1.23)$$

As transformações (1.19) são transformações do grupo U(1) e, a partir de (1.23), podemos mostrar que em uma teoria quantizada, as constantes  $q_j$  são os autovalores

---

<sup>4</sup>As *equações do movimento* são as equações de Euler-Lagrange, que derivam diretamente do princípio da mínima ação, isto é, da imposição de que  $\delta S = \int dt L = 0$ , com  $L = \int dV \mathcal{L}$ . Para ver em detalhe a obtenção dessas equações e a dedução da expressão (1.22) para teorias com derivadas de ordem superior, veja o Apêndice A.

de  $Q$ , que é um gerador do grupo  $U(1)$ . Desse modo, as transformações (1.19) poderiam também ser escritas como:

$$\phi_j(x) \longrightarrow \phi'_j(x) = e^{iQ\Lambda} \phi_j(x) \quad . \quad (1.24)$$

**Exemplo 1.1.** O modelo de Klein-Gordon com campos complexos

O exemplo mais simples de uma teoria de calibre global é, possivelmente, o do modelo de Klein-Gordon com campos complexos. Esse modelo é definido pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2 \quad (1.25)$$

É fácil verificar que a densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  é de fato invariante quando transformamos os campos de acordo com (1.19), isto é, quando fazemos:

$$\phi \longrightarrow e^{iq\Lambda} \phi \quad \text{e} \quad \phi^* \longrightarrow e^{-iq\Lambda} \phi^* \quad . \quad (1.26)$$

Além disso, de acordo com (1.22), temos:

$$j^\mu = iq \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \phi^* \right) = iq ((\partial^\mu \phi^*) \phi - (\partial^\mu \phi) \phi^*) \quad (1.27)$$

e, conforme (1.23), temos:

$$Q = iq \int dV ((\partial^\mu \phi^*) \phi - (\partial^\mu \phi) \phi^*) \quad . \quad (1.28)$$

### Teoria de Calibre Local

O termo “global”, utilizado para designar as transformações do tipo (1.19), diz respeito ao fato de não haver dependência daquelas transformações em relação às coordenadas do espaço-tempo. Então, se as transformações de calibre globais forem encaradas

como transformações ativas, isso corresponderia a uma situação onde os campos  $\phi_j$  são modificados em todos os pontos do espaço-tempo simultaneamente. De acordo com a interpretação eurística de L. H. Ryder [40], isso contradiz o princípio da relatividade segundo o qual nenhuma informação pode ser carregada mais rápido do que a luz. Essa questão pode ser resolvida, redefinindo (1.19) de modo que agora  $\Lambda$  seja, não mais uma constante, mas uma função das coordenadas do espaço-tempo, isto é,  $\Lambda = \Lambda(x)$  e as novas transformações são:

$$\phi_j(x) \longrightarrow \phi'_j(x) = e^{iq_j\Lambda(x)}\phi_j(x) \quad (1.29)$$

Assim como antes, os termos da densidade lagrangiana contendo o produto de todos os  $n$  campos ainda são invariantes sob as transformações (1.29). Entretanto, o objeto  $\partial_\mu\phi_j$  já não é invariante, passando a se transformar como:

$$\partial_\mu\phi_j(x) \longrightarrow e^{iq_j\Lambda(x)}(\partial_\mu + iq_j\Lambda(x))\phi_j(x) \quad (1.30)$$

ou seja,  $\partial_\mu$  não é uma derivada covariante sob as transformações (1.29). Para construir uma derivada covariante, introduzimos um novo campo  $A_\mu(x)$  e definimos:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieq_j A_\mu \quad (1.31)$$

Desse modo, ao verificarmos como o objeto  $D_\mu\phi_j$  se transforma sob (1.29), descobriremos que, para que  $D_\mu$  seja de fato uma derivada covariante, o nosso novo campo  $A_\mu$  deve se transformar juntamente com  $\phi_j$  de modo que tenhamos:

$$\begin{aligned} \phi_j(x) &\longrightarrow \phi'_j(x) = e^{iq_j\Lambda(x)}\phi_j(x) \\ A_\mu(x) &\longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Assim, além de poder conter produtos dos  $n$  campos  $\phi_j$ , uma densidade lagrangiana

$\mathcal{L}$  que pretende ser invariante pelas transformações (1.32) também pode conter qualquer produto entre os campos e as derivadas  $D_\mu$  desses campos, desde que esse produto ainda contenha todos os campos e que tenha todos os índices de Lorentz das derivadas covariantes  $D_\mu$  contraídos, de modo a assegurar a invariância de Lorentz. Além disso, é possível mostrar que  $\mathcal{L}$  ainda pode conter um termo do tipo  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ , onde:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.33)$$

sendo esse termo também invariante sob (1.32). O objeto  $F_{\mu\nu}$  é denominado *intensidade de campo*<sup>5</sup>.

Em oposição às transformações (1.19), as novas transformações (1.32), dependem das coordenadas do espaço-tempo e são então chamadas de *transformações de calibre do segundo tipo* ou *transformações de calibre locais*. Por sua vez, a teoria de campos definida por uma densidade lagrangiana  $\mathcal{L}[\phi_j, \partial_\mu \phi_j, A_\mu, \partial_\nu A_\mu]$  que é invariante por essas transformações é chamada de *teoria de calibre local*.

Conforme vimos acima, a imposição de que uma teoria de campos seja invariante por transformações locais do tipo (1.29), leva naturalmente à necessidade de introduzir o campo  $A_\mu$ , que é chamado *campo de calibre*. Notamos ainda que a densidade lagrangiana de uma teoria de calibre local não admite um termo do tipo  $m^2 A^\mu A_\mu$ , pois tal termo não é invariante sob as transformações de calibre locais. Assim, concluímos que o campo de calibre  $A_\mu$  deve ser um campo não massivo, como é, por exemplo, o caso do campo do fóton. Além disso, a introdução das derivadas covariantes sob transformações de calibre faz com que passemos a ter termos de interação entre os campos  $\phi_j$  e os campos de calibre  $A_\mu$ . No escopo da eletrodinâmica quântica, por exemplo, isso significa que a dinâmica dos campos de matéria que representam elétrons e pósitrons

---

<sup>5</sup>No caso da Eletrodinâmica, por exemplo, as componentes de  $F_{\mu\nu}$  formam uma matriz antissimétrica que contém as componentes vetoriais dos campos elétrico e magnético, sendo denominada, naquele caso, *tensor do campo eletromagnético*.

e a dinâmica do campo eletromagnético não devem ser vistas de forma independente, mas aparecem acopladas uma à outra por meio desse termo de interação.

### Exemplo 1.2. Eletrodinâmica Quântica Escalar

Podemos generalizar o modelo de Klein-Gordon com campos complexos do exemplo 1.1 para que este seja agora uma teoria de calibre local. O modelo resultante dessa generalização é um modelo teórico conhecido como *Eletrodinâmica Quântica Escalar* e é definido pela densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi^*)(D_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (1.34)$$

Outro modelo que também poderia ser usado como exemplo aqui seria a Eletrodinâmica Quântica. Nesse caso, teríamos, no lugar da densidade lagrangiana de Klein-Gordon, uma densidade lagrangiana de Dirac e, ao invés de campos escalares  $\phi^*$  e  $\phi$ , teríamos campos espinoriais  $\bar{\psi}$  e  $\psi$ .

#### 1.2.2. Conjugação de Carga

Uma consequência direta da definição das transformações de calibre é que como, em princípio, a escolha do sinal da carga é completamente arbitrária, tanto a Eletrodinâmica Quântica (QED), como a Eletrodinâmica Quântica Escalar (SQED) devem ser invariantes sob a troca  $q \rightarrow -q$ . Em particular, para a SQED essa invariância ocorre quando os campos se transformem como:

$$A_\mu \longrightarrow -A_\mu, \quad \phi \longrightarrow \phi^* \quad \text{e} \quad \phi^* \longrightarrow \phi \quad (1.35)$$

que são as chamadas transformações de *conjugação de carga*.

### 1.2.3. Fixação de Calibre

Vamos considerar, por simplicidade, o caso de uma teoria de calibre não acoplada à matéria cuja densidade lagrangiana é da forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (1.36)$$

onde  $F_{\mu\nu}$  é dado em (1.33).

Descartando termos de superfície irrelevantes, podemos manipular a expressão acima e reescrever  $\mathcal{L}$  como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^\mu (\eta_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu) A^\nu \quad (1.37)$$

Como o propagador de um campo é usualmente definido, a menos de um fator constante, como o operador inverso da parte quadrática da densidade lagrangiana, esperamos obter o propagador do campo  $A_\mu$  invertendo o operador que aparece entre parênteses na expressão (1.37). Ocorre, porém, que tal operador não é inversível de modo que a definição usual do propagador do campo  $A_\mu$  fornece como resultado um operador singular.

Para contornar isso devemos acrescentar um novo termo à (1.36) dado por:

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{2\alpha}G^2 \quad (1.38)$$

o que faz com que a nova densidade lagrangiana passe a ser:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}G^2 \quad (1.39)$$

Esse novo termo deve ser escolhido de modo a *não ser* invariante de calibre e, portanto, de modo a *quebrar* a invariância de calibre original da teoria definida por (1.36)

o que faz com que essa teoria passe a depender de particulares escolhas de calibre. Assim, chamamos o novo termo  $\mathcal{L}_{GF}$  dado em (1.38) de *densidade lagrangiana fixadora de calibre*. A integral nas coordenadas do espaço-tempo desse termo, por sua vez, será a *ação fixadora de calibre*.

A obtenção de um propagador não singular do campo  $A_\mu$  segue de redefinir a teoria de calibre original especificada pela densidade lagrangiana (1.38) passando a utilizar no lugar dela a nova densidade lagrangiana (1.39). Em particular, escolhendo  $G = \partial^\mu A_\mu$ , o que, no limite  $\alpha \rightarrow 0$ , corresponde ao calibre de Lorenz, podemos escrever explicitamente a nova densidade lagrangiana como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu \left[ \eta_{\mu\nu} \square - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu \quad (1.40)$$

cujos operadores entre os colchetes já não é singular.

Uma justificativa mais detalhada que suplementa o procedimento de fixação de calibre aqui descrito é apresentada no Apêndice B.

### 1.3. Teorias com Derivadas de Ordem Superior

Sob a perspectiva da invariância de Lorentz, termos na lagrangiana envolvendo derivadas de ordem superior também são permitidos. Nesse sentido, poderíamos encontrar, por exemplo, termos cinéticos da forma  $(\partial^\mu \partial^\nu \phi)(\partial_\mu \partial_\nu \phi)$  ou  $\partial^\mu F^{\alpha\beta} \partial_\mu F_{\alpha\beta}$  na teoria. De fato, sob integração por partes, esses termos geram apenas operadores  $\square$  a mais que, por sua vez, são invariantes.

A inclusão de termos com derivadas de ordem superior pode ser uma opção interessante para melhorar o comportamento ultravioleta de uma teoria, uma vez que aumenta a potência dos momentos no denominador dos propagadores. Assim, para um campo escalar real, por exemplo, poderíamos definir uma teoria com derivadas de

ordem superior por meio de uma lagrangiana da forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) + \frac{a}{2}(\partial^\mu\partial^\nu\phi)(\partial_\mu\partial_\nu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi] \\ &= -\frac{1}{2}\phi(-a\Box^2 + \Box + m^2)\phi + \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi]\end{aligned}\quad (1.41)$$

e, invertendo o núcleo da parte quadrática, encontramos um propagador da forma:

$$\langle\phi(k)\phi(-k)\rangle = \frac{i}{k^2 - ak^4 - m^2}\quad (1.42)$$

que, de fato, cai mais rápido do que  $1/k^2$  para altos valores de energia, porém contém um pólo com o sinal trocado.

Em outras palavras, conforme mostrado em [35], se fatorarmos o operador da parte quadrática, podemos reescrever a lagrangiana (1.41) como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi_1(\Box + m_1^2)\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2(\Box + m_2^2)\phi_2 + \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi_1, \phi_2]\quad (1.43)$$

onde  $m_1^2 = \frac{1+\sqrt{1+4am^2}}{2a}$  e  $m_2^2 = \frac{1-\sqrt{1+4am^2}}{2a}$  e onde  $\phi_{1,2} = \sqrt{\frac{a}{m_1^2 - m_2^2}}(\Box + m_{2,1}^2)\phi$ .

Assim, o propagador  $\langle\phi_2\phi_2\rangle$  tem um sinal trocado em relação a  $\langle\phi_1\phi_1\rangle$ . Os estados  $\phi_2$  são estados de norma negativa denominados *fantasmas* [3] [4]. Se os fantasmas aparecerem acoplados a estados físicos nos termos de interação  $\mathcal{L}_{\text{int}}[\phi_1, \phi_2]$ , eles não poderão ser ignorados, pois sua dinâmica não poderá ser separada da dos campos  $\phi_1$ . Nesse caso, o sinal trocado faz com que estados com um número ímpar de campos  $\phi_2$  tenham norma negativa, o que corresponde a uma violação da unitariedade e faz com que a teoria deixe de ter sentido físico.

Uma maneira de contornar isso vem da proposta de Horava [5] [6] para uma teoria de gravidade quântica, na qual são introduzidos termos com derivadas de ordem superior apenas na parte espacial. Tal proposta é feita em analogia com modelos de matéria condensada, em particular com o modelo de Lifshitz [7], no qual os termos com

derivadas de ordem superior na parte espacial surgem como representação da interação entre vizinhos de vizinhos em uma estrutura cristalina.

Para exemplificar isso, vamos considerar um modelo bidimensional do tipo Ising de teoria de campos na rede cuja lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{d\phi_i}{dt} \right)^2 + \sum_{i,j} J_{ij} \phi_i \phi_j + \mu \sum_i h_i \phi_i \quad (1.44)$$

onde  $\phi_i$  pode ser pensado como um campo que representa alguma propriedade física do sistema como, por exemplo, o spin no  $i$ -ésimo ponto da rede, embora, na discussão que segue, trataremos  $\phi_i$  como uma função de variável contínua.

Uma das simplificações usuais do modelo introduzido acima corresponde ao caso em que não há acoplamento do spin com campos externos. Isso ocorre para  $h_i = 0$ . Nessa situação, o último termo do lado direito de (1.44) desaparece e o modelo passa a ser simétrico pela troca de sinal do spin em todos os pontos da rede.

Uma outra simplificação está associada a considerar que todos os pontos em posições relativas equivalentes interagem com a mesma intensidade, o que é equivalente a dizer que dois pares de pontos separados pela mesma distância e em orientações equivalentes devem ter acoplamentos  $J_{ij}$  iguais. O caso mais comum ocorre quando efetuamos o segundo somatório do lado direito de (1.44) apenas sobre pontos  $i$  e  $j$  vizinhos imediatos, isto é, separados por apenas um passo sobre a rede. Isso corresponde a restringir a possibilidade de interação apenas a pontos diretamente conectados entre si. Possíveis relaxamentos dessa restrição consistem, por exemplo, em assumir que vizinhos de vizinhos também podem interagir.

Considerando essas simplificações, a lagrangiana (1.44) acima corresponde àquela utilizada no exemplo dado em [35], podendo ser reescrita como:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{d\phi_i}{dt} \right)^2 + J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \phi_i \phi_j + J_2 \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} \phi_i \phi_j + J_3 \sum_{\{i,j\}} \phi_i \phi_j \quad (1.45)$$

onde  $\langle, \rangle$  e  $\langle\langle, \rangle\rangle$  indicam, respectivamente, soma sobre vizinhos imediatos e segundos vizinhos. Se os campos  $\phi_i$  forem interpretados como spins, os acoplamentos  $J_1 > 0$  e  $J_2 < 0$  devem corresponder a pesos que favorecem, respectivamente, ordenamentos ferromagnético e antiferromagnético. O termo proporcional a  $J_3$ , por sua vez, representa uma interação entre vizinhos separados por uma diagonal.

Cada ponto da rede pode ser representado por um par ordenado  $(x, y)$ , onde as coordenadas  $x$  e  $y$  de cada elemento devem ser múltiplas de um espaçamento típico  $a$ . No limite do contínuo, devemos tomar  $a \rightarrow 0$ , de modo que a lagrangiana se torna:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{x,y} \left( \frac{d\phi_{x,y}}{dt} \right)^2 + J_1 \sum_{x,y} (\phi_{x+a,y} \phi_{x,y} + \phi_{x,y+a} \phi_{x,y}) \\ + J_2 \sum_{x,y} (\phi_{x+2a,y} \phi_{x,y} + \phi_{x,y+2a} \phi_{x,y}) + J_3 \sum_{x,y} (\phi_{x+a,y+a} \phi_{x,y} + \phi_{x+a,y} \phi_{x,y+a})$$

e podemos interpretar os termos entre parênteses em função de derivadas, a saber:

$$\left( \frac{\partial \phi_{x,y}}{\partial x} \right)^2 = \left( \frac{\phi_{x+a,y} - \phi_{x,y}}{a} \right)^2 = \frac{\phi_{x+a,y} \phi_{x+a,y}}{a^2} + \frac{\phi_{x,y} \phi_{x,y}}{a^2} - 2 \frac{\phi_{x+a,y} \phi_{x,y}}{a^2} \\ \Rightarrow \phi_{x+a,y} \phi_{x,y} = \phi_{x,y}^2 - \frac{a^2}{2} \left( \frac{\partial \phi_{x,y}}{\partial x} \right)^2$$

e da mesma maneira para os demais, de modo que:

$$\phi_{x+2a,y} \phi_{x,y} = \phi_{x,y}^2 - 2a^2 \left( \frac{\partial \phi_{x,y}}{\partial x} \right)^2 + \frac{a^4}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi_{x,y}}{\partial x^2} \right)^2$$

e

$$\phi_{x+a,y+a}\phi_{x,y} + \phi_{x+a,y}\phi_{x,y+a} = -6\phi_{x,y}^2 + a^2 \left( \frac{\partial\phi_{x,y}}{\partial x} \right)^2 + a^2 \left( \frac{\partial\phi_{x,y}}{\partial y} \right)^2 + \frac{a^4}{2} \left( \frac{\partial^2\phi_{x,y}}{\partial x\partial y} \right)^2$$

e, substituindo as somas por integrais, isto é, fazendo  $\sum_{x,y} a^2 \rightarrow \int dx dy$ , a lagrangiana (1.45) pode ser escrita como uma integral sobre as coordenadas espaciais cujo integrando é a densidade lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2}a^2(J_1 + 4J_2 - 2J_3) [(\partial_x\phi)^2 + (\partial_y\phi)^2] \\ & + \frac{1}{2}a^4 J_2 \left[ (\partial_x^2\phi)^2 + (\partial_y^2\phi)^2 + \frac{J_3}{J_2} (\partial_x\partial_y\phi)^2 \right] + 2(J_1 + J_2 - 3J_3)\phi^2 \end{aligned} \quad (1.46)$$

Em particular, se  $J_3 = 2J_2$ , podemos escrever:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)(\partial_0\phi) - \frac{a_1^2}{2}(\partial_i\phi)(\partial_i\phi) - \frac{a_2^2}{2}(\partial_i\phi)(\partial_i\phi) + \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (1.47)$$

com  $a_1^2 = a^2 J_1$ ,  $a_2^2 = -a^4 J_2$  e  $m^2 = 4(J_1 - 5J_2)$ , que é um protótipo relativamente simples de uma teoria de campos com derivadas de ordem superior.

Embora um modelo do tipo Horava-Lifshitz não apresente o problema da violação da unitariedade, a presença de derivadas de ordem superior apenas na parte espacial representa a introdução de uma anisotropia entre tempo e espaço cuja consequência é, conforme veremos a seguir, a violação da simetria de Lorentz. Então, o preço pago para manter a unitariedade em uma teoria com derivadas de ordem superior é a quebra da simetria de Lorentz. No caso de uma teoria que representa um sistema de matéria condensada, porém, a simetria de Lorentz não precisa ser mantida e a quebra não representa, necessariamente, um problema.

## 1.4. Quebra da Simetria de Lorentz em Teorias de Calibre

A definição de uma teoria de campos que quebra explicitamente a simetria de Lorentz constitui uma proposta controversa se pretendemos assumir que a relatividade restrita é válida. Nesse cenário, devemos entender a simetria de Lorentz como uma *simetria emergente*. Isso significa assumir que, em geral, tal simetria não é obedecida, mas que ela surge como um efeito característico de certas condições particulares do universo. De fato, a física que descreve o universo nos primeiros instantes após o Big-Bang não é completamente compreendida. Assim, podemos imaginar que a teoria que descreve a natureza em um regime de altas energias (ou pequenas distâncias) não é, necessariamente, invariante de Lorentz. No entanto, para estar de acordo com a relatividade restrita, a simetria de Lorentz deve surgir, isto é, *emergir* a medida em que se tende a um regime de energias mais baixas. Se isso ocorrer, dizemos que ocorre a *restauração* da simetria em questão. Essa ideia pode ser pensada como uma situação análoga, por exemplo, a obter a mecânica clássica como um limite de baixas velocidades da relatividade restrita ou como um limite macroscópico da mecânica quântica ou ainda, à obtenção da mecânica quântica como um limite não relativístico de uma teoria quântica de campos.

Uma maneira de construir uma teoria com quebra explícita da simetria de Lorentz se dá por meio da introdução de anisotropias entre tempo e espaço. Vamos então supor uma teoria definida pela densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)(\partial_0\phi) - \frac{a^2}{2}(\partial_i\phi)(\partial_i\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (1.48)$$

onde a constante  $a$  corresponde a uma primeira tentativa de introduzir uma anisotropia ao atribuir um peso diferente de 1 à parte espacial.

No entanto, notamos que deformando a escala que mede as dimensões espaciais, ou seja, fazendo  $x_i \rightarrow ax_i$ , voltamos a ter a lagrangiana de Klein-Gordon usual. De fato, é fácil ver que a introdução do fator  $a \neq 1$  é equivalente a definir um sistema de unidades onde a velocidade da luz é  $c = a$  ao invés do sistema natural, onde  $c = 1$ .

Como segunda tentativa, podemos imaginar, por exemplo, um protótipo baseado no modelo de Yukawa em  $(3 + 1)$  dimensões dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_0\phi)(\partial_0\phi) - \frac{a^2}{2}(\partial_i\phi)(\partial_i\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 \\ & + \bar{\psi}(i\gamma^0\partial_0 + ib\gamma^i\partial_i - M)\psi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + ig\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi \end{aligned} \quad (1.49)$$

onde foram introduzidos pesos  $a$  e  $b$  nas partes espaciais dos termos cinéticos bosônico e fermiônico, respectivamente. Nesse caso, se  $a \neq b$ , vemos que uma mera deformação da escala espacial já não permite recuperar a simetria de Lorentz.

Outra maneira de introduzir explicitamente a quebra da simetria de Lorentz consiste na inclusão de anisotropias causadas por termos com derivadas de ordem superior. Conforme a discussão desenvolvida na seção anterior, isso pode ser feito de modo a preservar a unitariedade através da introdução de termos com derivadas mais altas apenas na parte espacial. Um exemplo dessa possibilidade é o modelo dado por (1.47). Naquele caso, ainda que um reescalonamento fosse efetuado de modo a absorver a constante  $a_1$  ou que houvesse alguma relação conveniente entre  $a_1$  e  $a_2$ , a presença do termo com derivadas de ordem 4 apenas na parte espacial sem uma contraparte na parte temporal implica na violação da simetria de Lorentz.

Uma versão mais sofisticada de teoria de campos com derivadas de ordem superior é a teoria de calibre em  $(4 + 1)$  dimensões estudada em [9]. Essa teoria é descrita pela densidade lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} F_{0i} F_{0i} - \frac{a_1^2}{4} F_{ij} F_{ij} - \frac{a_2^2}{4} \partial_l F_{ij} \partial_l F_{ij} \\ & + \bar{\psi} (i\gamma^0 D_0 + ic_1 \gamma^i D_i - M) \psi - c_2 |D_i \psi|^2 - i\lambda F_{ij} \bar{\psi} \sigma^{ij} \psi \end{aligned} \quad (1.50)$$

onde os termos proporcionais a  $a_2$  e  $c_2$  são termos com derivadas de ordem superior. Fazendo  $a_1 = c_1 = 1$  e  $a_2 = c_2 = 0$ , recuperamos a lagrangiana da eletrodinâmica quântica acrescida de um termo de interação entre campo eletromagnético e spin.

A escolha de trabalhar em um espaço-tempo de  $(4+1)$  dimensões, nesse caso, se deve ao fato de que este é o maior número de dimensões para o qual a teoria acima é renormalizável. Para um número de dimensões menor, ela se torna super-renormalizável.

Um exemplo simples mais geral do que (1.47) de uma teoria com derivadas de ordem superior consiste no seguinte modelo escalar:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)(\partial_0 \phi) + \frac{1}{2} \phi (b_1^2 \Delta - b_2^2 \Delta^2 + \dots + (-1)^{z+1} b_z^2 \Delta^z - m^2) \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.51)$$

que apresenta quebra da simetria de Lorentz devido à presença dos termos com derivadas mais altas  $b_2, \dots, a_z$ . Se esses termos não estiverem presentes, a constante  $b_1$  pode ser colocada em evidência e a coordenada temporal redefinida fazendo  $b_1 x^0 \rightarrow x^0$ . Isso corresponde a uma mera redefinição da velocidade da luz e, nesse caso, a simetria de Lorentz é mantida.

## 2. Renormalização

### 2.1. O Formalismo de Integrais de Trajetória

#### 2.1.1. Funcionais Geradores e Funções de Green

O objetivo final de uma teoria de campos é calcular as amplitudes de probabilidade da ocorrência de determinados processos físicos, isto é, os assim chamados elementos da matriz  $S$ . Tais elementos podem ser obtidos a partir das funções de Green da teoria correspondente por meio do formalismo LSZ [11]. Assim, o cálculo das funções de Green se faz central em teorias de campos.

No formalismo de operadores, a imposição de relações canônicas de comutação entre campos e seus momentos canonicamente conjugados resultam em relações de comutação para os operadores de criação e aniquilação dos *quanta* ou estados de partícula e essas relações constituem, portanto, a chamada *quantização* de uma teoria. Nesse formalismo as funções de Green são obtidas pelo emprego do teorema de Wick, que leva em conta todas as contrações possíveis dos campos dentro de um elemento de matriz e usa as relações de comutação pertinentes no processo de comutá-los. Por outro lado, no formalismo de integrais de trajetória, o ponto de partida para a obtenção das funções de Green é a construção do assim chamado *funcional gerador*, que é um funcional da ação clássica da teoria. As funções de Green, por sua vez, passam a ser obtidas simplesmente por meio de sucessivas derivações funcionais desse objeto. Nessa seção nos ocuparemos de rever brevemente o formalismo de integrais de trajetória e a teoria

das funções de Green segundo esse formalismo.

### Funções de Green Ordinárias

O funcional gerador de uma teoria de campos cuja ação clássica  $S[\phi]$  depende de um campo  $\phi$  e de suas derivadas em relação às coordenadas do espaço-tempo  $\partial_\mu \phi$  é dado por:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int D\phi e^{i(S[\phi] + J \cdot \phi)} \quad (2.1)$$

onde  $\mathcal{N}$  é uma constante de normalização escolhida de modo que tenhamos  $Z[J = 0] = 1$ , assim,  $\mathcal{N} = \left( \int D\phi e^{iS[\phi]} \right)^{-1}$ . Além disso,  $J \cdot \phi = \int dx J(x)\phi(x)$  e  $J$  é uma *fonte*, que pode ser pensada como um campo externo que interage linearmente com o campo  $\phi$  produzindo uma perturbação ou desvio em relação à ação clássica. De fato, em uma interpretação matemática, podemos dizer que o termo  $J \cdot \phi$  tem meramente o propósito de fazer surgir as funções de Green por meio de sucessivas derivações funcionais, pois:

$$(-i)^n \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0} = \frac{\int D\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{iS[\phi]}}{\int D\phi e^{iS[\phi]}} \quad (2.2)$$

ou ainda, que a fonte  $J(x)$  é a variável de uma expansão em série de Volterra <sup>1</sup> do funcional gerador  $Z[J]$  e que tomamos essa expansão em torno de  $J = 0$ , que significa assumir que a fonte pode ser vista como uma pequena perturbação. Nesse caso, essa expansão é:

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 \cdots dx_n \frac{i^n}{n!} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n) \quad (2.3)$$

e os coeficientes  $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  são as chamadas *funções de Green ordinárias* de  $n$  pontos, sendo então definidas como:

<sup>1</sup>Uma série de Volterra é o equivalente no Cálculo Funcional de uma série de Taylor no Cálculo de variáveis reais.

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-i)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = \frac{\int D\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{iS[\phi]}}{\int D\phi e^{iS[\phi]}} \quad (2.4)$$

que é completamente equivalente à fórmula de Gell-Mann-Low do formalismo de operadores.

Nesse sentido, as funções de Green ordinárias estão associadas às amplitudes de probabilidade de observar os campos  $\phi$  se propagando entre  $n$  pontos do espaço-tempo. Sob essa perspectiva, podemos interpretar qualitativamente o funcional gerador  $Z[J]$  como a amplitude do vácuo na presença de um campo de fundo  $J$ .

### Funções de Green Conexas

As funções de Green ordinárias permitem construir as amplitudes de probabilidade para qualquer processo de espalhamento onde entram  $m$ ,  $m < n$ , e saem  $n - m$  partículas, incluindo tanto aqueles processos onde todas as partículas interagem quanto aqueles onde parte delas interage e outra parte não. Do ponto de vista de uma representação diagramática, os processos onde todas as partículas interagem com todas são representados por diagramas conexos e aqueles onde nem todas interagem com todas as outras são representados por diagramas desconexos.

Para trabalhar apenas com os diagramas conexos, definimos um novo funcional gerador como:

$$W[J] = -i \ln Z[J] \quad (2.5)$$

ou seja, tal que  $Z[J] = e^{iW[J]}$ .

As funções de Green obtidas a partir desse novo funcional  $W[J]$  são as chamadas *funções de Green conexas*, sendo dadas por:

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-i)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (2.6)$$

Para ver como isso funciona, podemos tomar como exemplo a função de Green conexa de 2 pontos. Substituindo a expressão do novo funcional gerador (2.5) na definição (2.6) acima e fazendo  $n = 2$ , temos<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} G_c^{(2)}(x_1, x_2) &= (-i) \frac{\delta^2 W}{\delta J_1 \delta J_2} \Big|_{J=0} \\ &= \frac{(-i)^2 \delta^2 Z[J]}{Z[J_2] \delta J_1 \delta J_2} \Big|_{J=0} - \left[ \frac{(-i) \delta Z[J]}{Z[J_1] \delta J_1} \right]_{J=0} \left[ \frac{(-i) \delta Z[J]}{Z[J_1] \delta J_2} \right]_{J=0} \\ &= G^{(2)}(x_1, x_2) - G^{(1)}(x_1) G^{(1)}(x_2) \end{aligned}$$

ou seja, a função de Green conexa de 2 pontos nada mais é do que a função de Green ordinária menos as suas partes desconexas. É fácil ver que essa afirmação se generaliza também para as funções de  $n$  pontos com  $n \neq 2$ . As expressões para as funções conexas sempre correspondem à função de Green ordinária e dela são subtraídas as expressões correspondentes aos processos que não conectam todas as partículas interagindo.

### Funções de Green 1PI

A representação das funções de Green conexas pode ser ainda mais simplificada e dada em termos de peças mais fundamentais, assim chamadas, *irredutíveis*. Em uma interpretação diagramática, dizemos que um diagrama é *redutível* se ele puder originar dois novos diagramas por meio do corte de apenas uma de suas linhas. Nesse sentido, nos propomos a trabalhar apenas com as *peças irredutíveis* 1PI<sup>3</sup> dos diagramas conexas.

O funcional gerador das funções de Green 1-PI, também chamado de *ação efetiva* por razões que ficarão claras mais adiante, é definido como:

<sup>2</sup>Por simplicidade usaremos sempre que possível a notação abreviada  $J_i = J(x_i)$ . Além disso, a instrução de substituição  $J = 0$ , sem especificar o índice, se refere a todos os  $J_i$ 's.

<sup>3</sup>Do inglês, *one-particle-irreducible*.

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - J \cdot \varphi \quad (2.7)$$

onde:

$$\varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle_J}{\langle 0 | 0 \rangle_J} \quad (2.8)$$

é o chamado *campo clássico*, que, na linguagem do formalismo de operadores, é o valor esperado do operador de campo  $\hat{\phi}(x)$  num vácuo com a presença da fonte  $J$ . Para encontrar o valor esperado  $\langle \varphi \rangle$  do campo clássico no vácuo com a fonte  $J$  desligada, devemos tomar o limite  $J \rightarrow 0$  da expressão (2.8). Derivando funcionalmente com respeito a  $\varphi(x)$  o funcional gerador 1-PI (2.7), descobrimos que  $\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi} = -J$  e, portanto, o valor de  $\varphi$  para o qual a fonte  $J$  está desligada deve corresponder a um extremo do funcional  $\Gamma[\varphi]$ .

As *funções de Green 1PI*, também chamadas *funções de vértice*, obtidas a partir do funcional (2.7), são dadas por:

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x_1) \cdots \delta \varphi(x_n)} \right|_{\varphi=0} \quad (2.9)$$

Graficamente, as funções de vértice são formadas por diagramas conexos, irreduzíveis e sem pernas externas.

### 2.1.2. Expansões Perturbativas

Os funcionais geradores, e conseqüentemente as funções de Green, em geral não possuem uma forma exata e, assim, devem ser representados perturbativamente. Para fazer uma expansão perturbativa do funcional gerador  $Z[J]$ , definido em (2.1), devemos dividir a ação clássica  $S[\phi]$  em uma parte “livre”  $S_0[\phi]$  que contém, no máximo, os termos quadráticos no campo  $\phi(x)$  e em uma parte de “interação”  $S_{\text{int}}[\phi]$ . A partir

disso, efetuando um procedimento funcional completamente análogo ao procedimento algébrico de completar quadrados, é possível reescrever o funcional  $Z[J]$  como:

$$Z[J] = e^{iS_{\text{int}}[-i\frac{\delta}{\delta J}]} Z_0[J] \quad (2.10)$$

onde  $Z_0[J]$  tem exatamente a mesma forma de  $Z[J]$ , mas trocando a ação clássica  $S[\phi]$  onde esta aparecia pela sua parte “livre”  $S_0[\phi]$ . A exponencial que aparece na expressão (2.10) é um operador funcional que atua sobre  $Z_0[J]$ . Essa exponencial pode ser expandida em série, o que se justifica desde que os termos de interação de  $S_{\text{int}}[\phi]$  sejam proporcionais a constantes de acoplamento pequenas. Com isso, o funcional gerador pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} Z[J] = & Z_0[J] + S_{\text{int}} \left[ -i\frac{\delta}{\delta J} \right] Z_0[J] \\ & + \frac{1}{2} \left( S_{\text{int}} \left[ -i\frac{\delta}{\delta J} \right] \right)^2 Z_0[J] + \frac{1}{3!} \left( S_{\text{int}} \left[ -i\frac{\delta}{\delta J} \right] \right)^3 Z_0[J] + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Chamando o  $m$ -ésimo termo da expansão acima de:

$$Z_m[J] = \frac{1}{m!} \left( S_{\text{int}} \left[ -i\frac{\delta}{\delta J} \right] \right)^m Z_0[J], \quad (2.12)$$

podemos usar a definição das funções de Green ordinárias de  $n$  pontos, (2.4) naturalmente para definir uma expansão perturbativa para estas funções como:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.13)$$

onde, de acordo com (2.4), (2.11) e (2.12), temos:

$$G_m^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-i)^n \frac{\delta^n Z_m[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (2.14)$$

De forma análoga, podemos expandir perturbativamente os demais funcionais gera-

dores e suas respectivas funções de Green. Em particular, para o funcional gerador 1-PI, observamos que um conjunto de termos de ordem zero de sua expansão perturbativa, que chamaremos de  $\Gamma_0[\varphi]$ , coincide com a ação clássica. Nessa linguagem, “ordem zero” se refere à soma dos termos para os quais a expansão do funcional coincide com a ação clássica. De um ponto de vista diagramático, tais termos são chamados de aproximação em zero loops ou, mais comumente, de *aproximação de árvore*. Então, podemos dizer que o funcional gerador 1-PI é a própria ação clássica acrescida de uma série de correções quânticas em diversas ordens de perturbação, daí o nome *ação efetiva*.

A ação efetiva de uma teoria quântica de campos pode ser escrita como:

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 \cdots dx_n \frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \quad (2.15)$$

e cada função de Green 1PI pode ser expandida em várias ordens determinadas pelo número de loops dos diagramas a elas associados.

Em geral, nas discussões que seguem, não nos preocuparemos em distinguir  $\varphi(x)$  e  $\phi(x)$  a menos que seja necessário e iremos nos referir aos campos contidos em expressões como (2.15) simplesmente como  $\phi(x)$ .

## 2.2. Divergências Ultra-violeta

### 2.2.1. Contagem de Potências e Invariância de Escala

O procedimento usual de contagem de potências pode ser pensado em termos de um escalamento isotrópico no qual fazemos as mudanças  $k_0 \rightarrow sk_0$  e  $k_i \rightarrow sk_i$  e então colocamos um fator  $s^\omega$  em evidência fora das integrais de loop. Isso é possível desde que  $s$  seja suficientemente grande para que termos de massa nos denominadores dos propagadores possam ser ignorados. Nesse caso, o expoente  $\omega$ , que é o *grau de divergência superficial*, determina o comportamento da integral em questão quando os

momentos tendem ao infinito, ou seja, na região ultravioleta. Em outras palavras, podemos dizer que tomar o momento  $k_\mu \rightarrow \infty$  é equivalente a multiplicá-lo por um fator de escala  $s$  suficientemente grande. A validade dessa proposta é demonstrada pelo teorema de Weinberg [12], originalmente elaborado no espaço euclidiano e, depois, adaptado por Zimmermann [13] [14] para a contagem de potências de integrais no espaço de Minkowski.

Entretanto, a inclusão de termos com derivadas de ordem superior apenas na parte espacial da lagrangiana faz com que o escalamento isotrópico deixe de funcionar. De fato, nessa situação o procedimento adequado de contagem de potências corresponde a um escalamento anisotrópico [15] [16]. Isso significa, essencialmente, que se deformarmos cada dimensão espacial por um fator  $s^{-1}$ , então o tempo deve ser multiplicado por  $s^{-z}$ , onde  $z$  é um parâmetro a ser definido, para que a teoria se mantenha invariante. Do ponto de vista da contagem de potências em uma teoria do tipo Horava-Lifshitz, isso pode ser explicado dizendo que quando medimos o grau de divergência de um diagrama, a maior potência da componente temporal do momento é mantida inalterada de modo a garantir a unitariedade da teoria. Porém, a maior potência do módulo da parte espacial do momento é determinada pelo maior número de derivadas que aparece nos termos cinéticos da lagrangiana. Assim, para determinar o comportamento de tais objetos no limite ultravioleta, esperamos ser possível colocar um fator  $s^\omega$  em evidência. Isso só será possível se escalarmos as componentes do momento de modo a levar em conta a existência das anisotropias.

Então, se  $2$  é o expoente que aparece nos propagadores de teorias usuais, para teorias com derivadas de ordem superior o termo de maior ordem contém  $2z$  derivadas, com  $z \geq 1$ . Nesse caso, para que seja possível colocar o fator  $s^\omega$  em evidência fora das integrais de loop, é preciso que o escalamento do momento seja tal que:

$$k_0 \rightarrow s^z k_0 \quad \text{e} \quad k_i \rightarrow s k_i \quad (2.16)$$

e, conseqüentemente, as coordenadas serão transformadas fazendo  $x_0 \rightarrow s^{-z} x_0$  e  $x_i \rightarrow s^{-1} x_i$ , de modo que a medida de integração da ação  $dx^0 d^d x^i$  terá uma *dimensão de escala*  $-(z+d)$  com  $\dim(x^i) = -1$  e  $\dim(x^0) = -z$ . Portanto, sob a perspectiva de transformações de escala anisotrópicas, para que a ação seja adimensional, cada termo da lagrangiana deve ter dimensão  $(z+d)$ . Com isso, podemos determinar as dimensões de escala de todos os campos, constantes de acoplamento e pesos anisotrópicos da teoria.

### 2.2.2. Grau de Divergência Superficial

O grau de divergência superficial  $\omega(G)$  é, conforme explicado na seção acima, a grandeza que determina o comportamento ultravioleta de um diagrama  $G$ . Nessa seção vamos descrever um procedimento para determinar  $\omega(G)$  a partir das características topológicas dos diagramas em si. Com isso, esperamos ser capazes de olhar para determinado diagrama e saber se ele é divergente ou não.

Em uma teoria de campos com derivadas de ordem superior definida em  $(d+1)$  dimensões do espaço-tempo e com expoente crítico  $z$ , o grau de divergência superficial de um diagrama  $G$  pode ser escrito como:

$$\omega(G) = (z+d)L - \sum_i e_{\phi_i} n_{\phi_i} + \sum_j j V_j \quad (2.17)$$

O primeiro termo do lado direito da expressão acima conta a dimensão de escala das medidas de integração no espaço dos momentos. Para um diagrama de  $L$  loops, teremos  $L$  fatores  $dk_0 d^d \vec{k}$ , cada um com dimensão  $(z+d)$ . O segundo termo conta a contribuição dos denominadores dos propagadores, que tende a diminuir o valor de  $\omega$ .

Nesse termo,  $e_{\phi_i}$  é o maior expoente do momento no denominador do propagador do campo  $\phi_i$  e  $n_{\phi_i}$  é o número de linhas internas formadas pelo campo  $\phi_i$  que aparecem no diagrama  $G$ . A soma em  $i$  deve ser feita para todos os campos da teoria. O último termo conta a contribuição de fatores de momento, ou seja, de derivadas dos campos, que vêm das expressões dos vértices de interação. Assim, a soma que aparece no último termo deve ser feita sobre todos os vértices que vêm de termos com derivadas, onde  $j$  é o número de derivadas que aparece em cada termo da expressão do vértice e  $V_j$  é o número de vértices do tipo ‘ $j$ ’ que aparece no diagrama.

A estrutura dos diagramas de Feynman admite uma generalização da fórmula de Euler que relaciona os números de lados e vértices de poliedros, permitindo escrever:

$$L = \sum_i n_{\phi_i} - \sum_X V_X + 1 \quad (2.18)$$

onde a soma em  $X$  é realizada sobre todos os tipos de vértice e  $V_X$  é o número de vezes que o vértice do tipo ‘ $X$ ’ aparece no diagrama.

Substituindo  $L$  dado por (2.18) na expressão (2.17) e reorganizando os termos, temos:

$$\omega(G) = (z + d) + \sum_i (z + d - e_{\phi_i}) n_{\phi_i} - \sum_j (z + d - j) V_j - (z + d) \bar{V} \quad (2.19)$$

onde  $\bar{V}$  é o número total de vértices no diagrama  $G$  que não contém derivadas.

Agora, contando o número de pontas de linhas que chegam em cada vértice, temos:

$$2n_{\phi_i} + N_{\phi_i} = \sum_X X_{\phi_i} V_X \quad (2.20)$$

onde  $X_{\phi_i}$  é o número de pontas de linhas do campo  $\phi_i$  que chegam no vértice do tipo ‘ $X$ ’ e  $N_{\phi_i}$  é o número de linhas externas de  $\phi_i$ .

Isolando  $n_{\phi_i}$  em (2.20) e substituindo em (2.19), chegamos a:

$$\begin{aligned} \omega(G) = (z + d) - \sum_i \left( \frac{z + d - e_{\phi_i}}{2} \right) N_{\phi_i} - \sum_X (z + d) V_X \\ + \left( \frac{z + d - e_{\phi_i}}{2} \right) \sum_X X_{\phi_i} V_X + \sum_j j V_j \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde, novamente, a soma em  $X$  é realizada sobre todos os tipos de vértice e a soma em  $j$  sobre os vértices com derivadas.

Observando, na lagrangiana que descreve a teoria, o termo bilinear no campo  $\phi_i$  com número total de derivadas igual a  $e_{\phi_i}$  e sabendo que a dimensão de todos os termos da lagrangiana deve ser igual a  $(z + d)$ , descobrimos que a dimensão de escala do campo  $\phi_i$  é dada por:

$$\dim(\phi_i) = \frac{z + d - e_{\phi_i}}{2} \quad (2.22)$$

Além disso, olhando para os dois últimos termos em (2.21), vemos que o primeiro corresponde ao número  $X_{\phi_i}$  de pontas de linhas, ou seja, de campos  $\phi_i$  que chegam ao vértice do tipo ‘ $X$ ’ multiplicado pela dimensão do campo  $\phi_i$ . Já o segundo, acrescenta a contagem de dimensões vindas das  $j$  derivadas contidas nos vértices do tipo ‘ $j$ ’. Logo, combinando esses dois termos, devemos ter uma contagem da dimensão de escala dos vértices multiplicada pelo número de ocorrências de cada vértice, ou seja, os dois últimos termos de (2.21) podem ser reescritos como:

$$\sum_X \dim(V_X) V_X$$

e isso e a expressão (2.22) para a dimensão dos campos, podemos escrever:

$$\omega(G) = (z + d) - \sum_i \dim(\phi_i) N_{\phi_i} - \sum_X [z + d - \dim(V_X)] V_X \quad (2.23)$$

que é a expressão geral para o grau de divergência superficial do diagrama  $G$  em função

das dimensões dos campos e dos vértices e do número de linhas externas.

### 2.2.3. Subtração de Divergências

A análise do grau de divergência superficial, descrita na seção acima, pode levar à constatação de que certas funções 1PI são divergentes. Isso, no entanto, não invalida a teoria desde que seja possível remover tais divergências por meio do procedimento de renormalização. Nesse procedimento, os campos e acoplamentos que aparecem na lagrangiana devem ser redefinidos como a soma de uma parte finita e outra parte infinita. Após reorganizar os termos da lagrangiana apropriadamente, a parte finita ou *renormalizada* deve ter forma funcional idêntica à da lagrangiana original. Já a parte infinita – a lagrangiana dos *contratermos* – deve ser tal que, com um número finito de termos, seja possível cancelar as contribuições divergentes das funções 1PI quando se constrói a expansão da ação efetiva (2.15). Assim, se a lagrangiana original for  $\mathcal{L}[\phi_B; a_B]$ , dependendo de campos  $\phi_B$  e com acoplamentos  $a_B$ , ditos *nus*, então podemos fazer a seguinte redefinição:

$$\phi_B \longrightarrow Z_\phi^{1/2} \phi \quad (2.24)$$

onde  $\phi$  é o campo renormalizado e  $Z_\phi$  é uma constante infinita. Como, frequentemente, os campos  $\phi_B$  aparecem aos pares nos termos da lagrangiana, é conveniente definir  $Z_\phi$  com o expoente 1/2, sendo essa constante dada por:

$$Z_\phi = 1 + \delta_\phi \quad (2.25)$$

em que  $\delta_\phi$  é uma contribuição infinita.

Além disso, os acoplamentos são redefinidos como:

$$a_B \longrightarrow a + \delta_a \quad (2.26)$$

onde  $\delta_a$  também é uma contribuição infinita.

Substituindo as redefinições acima na lagrangiana original, temos:

$$\mathcal{L}[\phi_B; a_B] \longrightarrow \mathcal{L}[\phi; a] + \mathcal{L}_{\text{ct}}[\phi; a, \delta_\phi, \delta_a] \quad (2.27)$$

onde  $\mathcal{L}[\phi; a]$  é a lagrangiana renormalizada e  $\mathcal{L}_{\text{ct}}[\phi; a, \delta_\phi, \delta_a]$  é a lagrangiana dos contratermos.

Para remover as divergências que surgem das funções 1PI, devemos ajustar os contratermos de tal forma que a soma deles com tais divergências resulte finita de modo que se tenha uma ação efetiva (2.15) finita também.

Uma teoria na qual as funções 1PI não são divergentes ou cujas divergências aparecem apenas em ordens de loops mais baixas é dita *superrenormalizável*. Quando as divergências aparecem e podem ser removidas, a teoria é *renormalizável*. Nem todas as teorias de campos, porém, podem ser renormalizadas da maneira descrita acima. Se a lagrangiana tiver combinações de campos formando termos com dimensões suficientemente altas, o número de contratermos necessário para cancelar as contribuições divergentes pode se tornar infinito e a teoria passa a ter um número incontável de parâmetros livres. Nessa situação a teoria será *não-renormalizável*.

De fato, a não-renormalizabilidade é uma das principais dificuldades encontradas quando se tenta construir uma teoria quântica da gravitação a partir da lagrangiana de Einstein-Hilbert. É justamente nesse contexto que se insere a proposta de Horava [5] [6] de definir uma teoria da gravitação com termos de derivadas mais altas, já que esses termos tendem a melhorar o comportamento ultravioleta das teorias.

### 2.2.4. Regularização Dimensional

Conforme a discussão acima, os contratermos devem ser ajustados para cancelar contribuições infinitas que são somadas à lagrangiana clássica junto com as correções

quânticas relevantes. Esses infinitos estão contidos nas funções 1PI não renormalizadas e surgem do cálculo de integrais divergentes. As divergências, por sua vez, aparecem nas integrais de loops devido à presença de limites de integração que se estendem até valores infinitos dos momentos. A maneira de contornar essa dificuldade consiste em redefinir as integrais em função de um parâmetro regulador de modo que as integrais obtidas após a redefinição já não sejam divergentes. Essa redefinição deve ser tal que, para determinado limite do parâmetro regulador, as integrais originais são novamente obtidas.

Uma possível maneira de executar o procedimento descrito acima corresponde à introdução de um corte ou *cutoff*, isto é, passamos as integrais no espaço dos momentos para um sistema de coordenadas esféricas e depois substituímos o limite de integração infinito na coordenada radial por um valor de corte  $\Lambda$ . Depois disso, calculamos a integral normalmente assumindo que  $\Lambda$  é finito. O resultado deve ser uma função de  $\Lambda$  que diverge quando tomamos o limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . O método que adotaremos neste trabalho, porém, não será o do cutoff, mas sim a chamada *regularização dimensional*.

Na regularização dimensional [17] [18] as integrais de loop em  $D$  dimensões do espaço-tempo são substituídas por integrais em um espaço de dimensão menor, igual a  $D - \epsilon$ . Isso introduz um mecanismo de controle sobre a medida de integração, que agora é considerada em um espaço de dimensão contínua arbitrariamente menor até o ponto em que a integral que está sendo calculada seja finita por contagem de potências. O resultado dos cálculos tem um resíduo proporcional a  $1/\epsilon$  que diverge no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . No esquema de subtração mínima, os contratermos devem ser ajustados para cancelar precisamente essas divergências.

No caso de teorias com derivadas de ordem superior, adotaremos uma versão da regularização dimensional que atua sobre a dimensão de escala das componentes espaciais dos momentos. Com isso, para uma teoria representada por uma lagrangiana com

dimensão de escala ( $z + d$ ), as integrais correspondentes serão redefinidas de modo que:

$$\int \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{(dk_i)^d}{(2\pi)^d} \longrightarrow \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{(dk_i)^{d-\epsilon}}{(2\pi)^{d-\epsilon}} \quad (2.28)$$

Essa substituição deve ser acompanhada por uma redefinição da dimensão de escala da própria lagrangiana, que passa agora a ter dimensão ( $z + d - \epsilon$ ), de modo a garantir que a ação continue adimensional. Cada integral será proporcional a alguma potência dos acoplamentos associados aos vértices de interação. Essas integrais formam as correções quânticas à lagrangiana clássica, isto é, elas compõem as funções de Green 1PI. Vamos considerar o exemplo de uma teoria de campo escalar real com uma interação  $\sim \lambda \phi^4$  como, por exemplo, (1.51). Quando a dimensão da lagrangiana passa para ( $z + d - \epsilon$ ), os campos passam a ter dimensão  $(d - \epsilon - z)/2$ . Então, para que o termo de interação continue com a mesma dimensão da lagrangiana, o acoplamento  $\lambda$  deve ter dimensão  $(3z - d + \epsilon)$ .

Podemos redefinir o acoplamento  $\lambda$  de modo a manter explícita sua dependência em relação ao parâmetro regulador  $\epsilon$ . Fazendo isso, temos:

$$\lambda = \lambda_0 \mu^{\epsilon/z} \quad (2.29)$$

onde o parâmetro  $\mu$  é definido de modo a ter dimensão de massa igual a 1 e, assim como a massa  $m$ , terá dimensão de escala igual a  $z$ . Em particular, quando  $z = 1$  e o número de dimensões espaciais é  $d = 3$ ,  $\lambda_0$  é adimensional. Entretanto, isso não é necessariamente verdade para  $z$  e  $d$  arbitrários. De fato, em geral temos  $\dim(\lambda_0) = (3z - d)$ .

Notamos ainda que os termos de 1-loop e 2-loops da função 1PI de 2 pontos nessa teoria são dados por:

$$\Gamma^{(2)}(p) = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \dots \quad (2.30)$$

onde, definindo  $\Omega[k^2] \equiv k_0^2 - b_1^2 \vec{k}^2 - \dots - b_z^2 \vec{k}^{2z} - m^2$ , os diagramas são tais que:

$$\begin{aligned} \text{diagrama 1} &\sim \lambda_0 \mu^{\epsilon/z} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{(dk_i)^{d-\epsilon}}{(2\pi)^{d-\epsilon}} \frac{1}{\Omega[k^2]} \\ \text{diagrama 2} &\sim \lambda_0^2 \mu^{2\epsilon/z} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{(dk_i)^{d-\epsilon}}{(2\pi)^{d-\epsilon}} \frac{1}{\Omega[k^2]} \int \frac{dq_0}{(2\pi)} \frac{(dq_i)^{d-\epsilon}}{(2\pi)^{d-\epsilon}} \frac{1}{\Omega[q^2]} \\ \text{diagrama 3} &\sim \lambda_0^2 \mu^{2\epsilon/z} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{(dk_i)^{d-\epsilon}}{(2\pi)^{d-\epsilon}} \int \frac{dq_0}{(2\pi)} \frac{(dq_i)^{d-\epsilon}}{(2\pi)^{d-\epsilon}} \frac{1}{\Omega[k^2] \Omega[q^2] \Omega[(k+q-p)^2]} \end{aligned}$$

Olhando para as fórmulas acima, é fácil notar que as expressões que representam cada diagrama não têm sua dimensão alterada. Como o resultado de cada integral acima será multiplicado por dois campos  $\phi$  na expansão da ação efetiva, vemos que essas correções quânticas acrescentam termos adimensionais à ação, como deveria ser.

A mesma lógica pode ser seguida para analisar outros termos da ação efetiva. Como as potências de  $\lambda$  acompanham o número de loops, isto é, o número de integrais nos momentos internos, a dimensão das correções quânticas permanece correta em cada ordem de perturbação e a ação efetiva continua adimensional.

Existem diversas propriedades atrativas na regularização dimensional. Em primeiro lugar, ela preserva as simetrias da teoria, em particular a simetria de calibre. Além disso, ela permite identificar facilmente as divergências, que podem então ser removidas pelo esquema de subtração mínima. Uma dificuldade associada à regularização dimensional se encontra no tratamento de certos tensores cuja definição não permite uma extrapolação para um número arbitrário de dimensões. O exemplo mais típico

nesse caso é o tensor completamente antissimétrico  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ . Entretanto, neste trabalho em particular, esses objetos não irão aparecer e a regularização dimensional poderá ser aplicada sem problemas.

## 2.3. Grupo de Renormalização

### 2.3.1. Equações do Grupo de Renormalização

Vamos considerar o exemplo de uma teoria de um campo escalar massivo com uma autointeração cuja constante de acoplamento é  $\lambda$ . O protótipo que utilizaremos para desenvolver os assuntos desta seção será a teoria descrita pela lagrangiana (1.51). A discussão que segue, no entanto, pode ser facilmente generalizada para uma situação onde existam mais termos de interação, ou seja, onde se tenha constantes de acoplamento  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  ou diferentes tipos de termos com derivadas de ordem superior.

Tomando a transformada de Fourier da expressão (2.15), temos:

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \int dp_1 \cdots dp_{n-1} \frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) \phi(p_1) \cdots \phi(p_n) \quad (2.31)$$

onde, impondo a conservação do momento, podemos escrever  $p_n$  em função dos outros  $n - 1$  momentos externos. Fazendo a substituição (2.24) e reagrupando os fatores  $Z_\phi$  que aparecem, podemos escrever:

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \int dp_1 \cdots dp_{n-1} \frac{1}{n!} \underbrace{\left[ Z_\phi^{-n/2} \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) \right]}_{\Gamma_B^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1})} \phi_B(p_1) \cdots \phi_B(p_n) \quad (2.32)$$

e com isso, podemos escrever a relação entre as funções 1PI renormalizadas e suas como:

$$\Gamma^{(n)}(p; b_j, \lambda, m^2, \mu) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ Z_\Gamma(\mu, \epsilon) \Gamma_B^{(n)}(p; b_{jB}, \lambda_B, m_B^2, \epsilon) \right] \quad (2.33)$$

onde  $Z_\Gamma = Z_\phi^{n/2}$  e onde  $\lambda_0$  (ver Eq. (2.29)) foi reescrito como ‘ $\lambda$ ’ para não sobrecarregar a notação.

Na expressão acima,  $p$  representa de maneira compacta os  $n - 1$  momentos externos independentes. Além disso, explicitamos a dependência de cada objeto em relação à massa  $m$ , aos pesos anisotrópicos  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, z$ , ao acoplamento  $\lambda$ , ao parâmetro regulador  $\epsilon$  e também a  $\mu$ . Enquanto a função 1PI renormalizada  $\Gamma^{(n)}$  depende do parâmetro  $\mu$  através de  $Z_\Gamma$ , essa dependência não aparece na função nua  $\Gamma_B^{(n)}$ . Então, rearranjando a expressão (2.33) convenientemente e atuando com o operador  $\mu \frac{d}{d\mu}$ , temos:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\Gamma^{(n)}}{d\mu} Z_\Gamma^{-1} + \mu \frac{dZ_\Gamma^{-1}}{d\mu} \Gamma^{(n)} = 0 &\Rightarrow \mu \frac{d\Gamma^{(n)}}{d\mu} - \mu \frac{d}{d\mu} (\ln Z_\Gamma) \Gamma^{(n)} = 0 \\ \Rightarrow \left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_{j=1}^z \mu \frac{db_j}{d\mu} \frac{\partial}{\partial b_j} + \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mu \frac{dm^2}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m^2} - \mu \frac{d}{d\mu} (\ln Z_\Gamma) \right] \Gamma^{(n)} = 0 \end{aligned}$$

e, definindo:

$$\beta_{b_j} \equiv \mu \frac{db_j}{d\mu}, \quad \beta_\lambda \equiv \mu \frac{d\lambda}{d\mu}, \quad \delta \equiv \mu \frac{dm^2}{d\mu} \quad \text{e} \quad \gamma_\Gamma \equiv \mu \frac{d}{d\mu} (\ln Z_\Gamma) \quad (2.34)$$

podemos escrever:

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_{j=1}^z b_j \beta_{b_j} \frac{\partial}{\partial b_j} + \lambda \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + m^2 \delta \frac{\partial}{\partial m^2} - \gamma_\Gamma \right] \Gamma^{(n)} = 0 \quad (2.35)$$

A expressão acima é a chamada *equação do grupo de renormalização*. Ela expressa a invariância de  $\Gamma^{(n)}$  sob mudanças no parâmetro  $\mu$ . As funções definidas em (2.34), por sua vez, são chamadas *funções do grupo de renormalização*. Em particular, estaremos

interessados nas funções do tipo  $\beta_{b_j}$  e  $\beta_\lambda$ . Essas funções, conforme a definição (2.34), devem descrever o comportamento dos acoplamentos sob mudanças no parâmetro  $\mu$ .

As grandezas dimensionais que contribuem com as funções de vértice devem se combinar de modo que essas funções sejam homogêneas, ou seja, devemos ter:

$$\Gamma^{(n)}(s^z p_0, s p_i; b_j, \lambda, m^2, \mu) = s^{z(1+\frac{n}{2})+d(1-\frac{n}{2})} \Gamma^{(n)}(p_0, p_i; s^{j-z} b_j, s^{d-3z} \lambda, s^{-2z} m^2, s^{-z} \mu) \quad (2.36)$$

onde o expoente de  $s$  do lado direito da igualdade é a dimensão de escala de  $\Gamma^{(n)}$ , que pode ser inferida diretamente da expressão da ação efetiva no espaço dos momentos, (2.31).

Fazendo  $s \rightarrow 1 + s$  em (2.36) e expandindo até 1ª ordem em torno de  $s = 0$ , temos:

$$\left[ s \frac{\partial}{\partial s} + z \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + 2z m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \sum_{j=1}^z (z-j) b_j \frac{\partial}{\partial b_j} + (3z-d) \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - z \left(1 + \frac{n}{2}\right) - d \left(1 - \frac{n}{2}\right) \right] \Gamma^{(n)} = 0 \quad (2.37)$$

Isolando  $\mu \frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial \mu}$  em (2.37) e substituindo em (2.35), podemos escrever:

$$\left[ -s \frac{\partial}{\partial s} + \sum_{j=1}^z b_j (z \beta_{b_j} + j - z) \frac{\partial}{\partial b_j} + \lambda (z \beta_\lambda + d - 3z) \frac{\partial}{\partial \lambda} + z m^2 (\delta - 2) \frac{\partial}{\partial m^2} + z \left(1 + \frac{n}{2}\right) + d \left(1 - \frac{n}{2}\right) - z \gamma_\Gamma \right] \Gamma^{(n)}(s^z p_0, s p_i; b_j, \lambda, m^2, \mu) = 0 \quad (2.38)$$

A equação acima expressa o fato de que uma mudança na escala de energia  $s$  pode ser compensada por uma mudança em  $m^2$ ,  $b_j$  e  $\lambda$ , além da introdução de um fator global. Então, esperamos encontrar funções  $b_j(s)$ ,  $\lambda(s)$ ,  $m^2(s)$  e  $f(s)$  tais que:

$$\Gamma^{(n)}(s^z p_0, s p_i; b_j, \lambda, m^2, \mu) = f(s) \Gamma^{(n)}(p_0, p_i; b_j(s), \lambda(s), m^2(s), \mu) \quad (2.39)$$

seja uma solução da equação (2.38).

Derivando (2.39) com respeito a  $s$  dos dois lados e depois multiplicando por  $s$ , chegamos a:

$$\left[ -s \frac{\partial}{\partial s} + \sum_{j=1}^z s \frac{db_j}{ds} \frac{\partial}{\partial b_j} + s \frac{d\lambda}{ds} \frac{\partial}{\partial \lambda} + s \frac{dm^2}{ds} \frac{\partial}{\partial m^2} + \frac{s}{f} \frac{df}{dt} \right] \Gamma^{(n)}(s^z p_0, s p_i; b_j, \lambda, m^2, \mu) = 0 \quad (2.40)$$

Agora, comparando (2.40) e (2.38), temos que:

$$\begin{aligned} s \frac{db_j}{ds} &= b_j (z \beta_{b_j} + j - z), & s \frac{d\lambda}{ds} &= \lambda (z \beta_\lambda + d - 3z), \\ s \frac{dm^2}{ds} &= z m^2 (\delta - 2) & \text{e} & \quad s \frac{df}{f ds} = z \left(1 + \frac{n}{2}\right) + d \left(1 - \frac{n}{2}\right) - z \gamma_\Gamma \end{aligned} \quad (2.41)$$

Integrando a última das equações acima e substituindo em (2.39), chegamos a:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(s^z p_0, s p_i; b_j, \lambda, m^2, \mu) &= \\ s^{z(1+\frac{n}{2})+d(1-\frac{n}{2})} \exp \left[ -z \int_1^s \frac{\gamma_\Gamma}{s} ds \right] \Gamma^{(n)}(p_0, p_i; b_j(s), \lambda(s), m^2(s), \mu) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Então, uma transformação de escala dos momentos deve ser compensada de forma adequada por uma transformação dos demais parâmetros. Sendo assim, podemos concluir que quando os momentos, isto é, as energias, sofrem uma transformação do tipo (2.16), o parâmetro  $\mu$  deve se transformar como  $\mu \rightarrow s^z \mu$ , ou seja:

$$\mu \longrightarrow e^{z \ln s} \mu \quad (2.43)$$

que são as transformações do *grupo de renormalização*.

Logo, ao analisar o comportamento dos parâmetros sob mudanças em  $\mu$ , estamos, indiretamente, analisando a evolução desses parâmetros com a escala de energia. Em particular, no caso das teorias usuais, ou seja, quando  $d = 3$  e  $z = 1$ , as fórmulas (2.41)

se tornam:

$$s \frac{db_1}{ds} = b_1 \beta_{b_1} = \mu \frac{db_1}{d\mu} \quad \text{e} \quad s \frac{d\lambda}{ds} = \lambda \beta_\lambda = \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \quad (2.44)$$

e, para essa situação, analisar o comportamento dos parâmetros sob mudanças em  $\mu$  é exatamente a mesma coisa que analisar tal comportamento sob mudanças na escala da energia.

### 2.3.2. Restauração da Simetria de Lorentz

Vamos considerar como exemplo a lagrangiana (1.51). Para aquela teoria, cada termo com derivadas espaciais pode ser pensado como um termo de interação, cada um com seu respectivo acoplamento. Assim, teremos  $z$  funções beta,  $\beta_{b_1}, \dots, \beta_{b_z}$ . A restauração da simetria de Lorentz consiste em satisfazer o requerimento de que essa simetria se manifeste para alguma escala  $s$  de baixa energia. Para que isso ocorra,  $b_2, \dots, b_z$ , que são os pesos dos termos que violam a simetria de Lorentz, devem decrescer quando tomamos valores de  $s$  cada vez menores. De acordo com a definição (2.34) e com as fórmulas (2.41), que estabelece a relação entre as funções beta e a variação dos parâmetros com a escala de energia, vemos que uma possível condição para que isso ocorra é que as funções beta associadas aos acoplamentos  $b_2, \dots, b_z$  obedeçam à seguinte relação:

$$\beta_{b_j} - \frac{z-j}{z} > 0, \quad j = 2, \dots, z. \quad (2.45)$$

o que garante que os pesos dos termos de derivadas mais altas, que são responsáveis pela violação da simetria de Lorentz nesse exemplo em particular, decresçam quando a escala de energia  $s$  diminui.

No entanto, a condição (2.45) sozinha não é suficiente para garantir a restauração da simetria. Por exemplo, se  $b_1$ , que é o coeficiente do termo usual, decrescer junto com as

outras constantes, a simetria permanece violada. De fato, para garantir a restauração é preciso que em alguma escala de energia, os pesos  $b_j$ ,  $j = 2, \dots, z$  sejam suficientemente pequenos de modo que os termos que causam a violação possam ser desprezados *em comparação com os termos usuais*.

Para analisar essa possibilidade, podemos colocar  $b_1^2$  em evidência em (1.51) e depois redefinir a lagrangiana a menos dessa constante, bem como redefinir a coordenada temporal fazendo  $b_1 x^0 \rightarrow x^0$ . Com isso, a lagrangiana pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)(\partial_0\phi) + \frac{1}{2}\phi \left( \Delta - \frac{b_2^2}{b_1^2}\Delta^2 + \dots + (-1)^{z+1}\frac{b_z^2}{b_1^2}\Delta^z - \frac{m^2}{b_1^2} \right) \phi - \frac{\lambda}{4!b_1^2}\phi^4 \quad (2.46)$$

Assim, devemos analisar a evolução das razões  $b_j^2/b_1^2$ , que é dada por:

$$s \frac{d}{ds} \left( \frac{b_j^2}{b_1^2} \right) = \frac{2b_j}{b_1^2} s \frac{db_j}{ds} - \frac{2b_j^2}{b_1^3} s \frac{db_1}{ds} = \frac{2b_j^2}{b_1^2} (z(\beta_{b_j} - \beta_{b_1}) + (j-1)) \quad (2.47)$$

e a condição de restauração passa a ser:

$$\beta_{b_j} - \beta_{b_1} + \frac{(j-1)}{z} > 0, \quad j = 2, \dots, z. \quad (2.48)$$

Por fim, é preciso salientar que a condição acima funciona para o exemplo particular da teoria (1.51). Para uma teoria de calibre, como (1.50), por exemplo, a situação pode ser mais complicada pois podemos ter também  $a_1 \neq c_1$ . Nesse caso, mesmo que os termos com derivadas altas pudessem ser desprezados, a diferença entre  $a_1$  e  $c_1$  também introduz uma quebra da simetria de Lorentz.

## 3. Eletrodinâmica Escalar com Derivadas de Ordem Superior

### 3.1. Definindo uma Teoria de Campos com Derivadas de Ordem Superior

Neste capítulo, procuramos construir uma teoria anisotrópica com derivadas de ordem superior onde os campos de calibre aparecem acoplados a campos de matéria bosônicos, isto é, campos escalares complexos. Esse modelo pode ser visto como uma versão da eletrodinâmica escalar, porém com quebra explícita da simetria de Lorentz devido à presença de anisotropias entre espaço e tempo oriundas, tanto de termos cinéticos usuais com pesos diferentes entre si, como de termos com derivadas espaciais de ordem superior.

A quebra de simetria pela presença de termos cinéticos com pesos diferentes foi explicada no Capítulo 1 usando como exemplo a lagrangiana (1.49), que corresponde a uma versão anisotrópica do modelo de Yukawa. Já a quebra pela inclusão de termos com derivadas espaciais de ordem superior foi explicada utilizando o modelo hipotético (1.51). Uma justificativa para a inclusão desse tipo de termo, conforme dito anteriormente, se baseia na tentativa de melhorar o comportamento ultravioleta da teoria em questão. Porém, para preservar a unitariedade, conforme observado por Horava [6], apenas derivadas superiores espaciais podem ser incluídas. No entanto, ao incluir termos extras na parte espacial sem uma contrapartida na parte temporal, acabamos

por contribuir com o comportamento anisotrópico da teoria e violamos a simetria de Lorentz. O surgimento desses termos no contexto da física da matéria condensada foi discutido no Capítulo 1 e pode ser entendido como o limite do contínuo de uma teoria que representa uma rede cristalina onde é assumida a possibilidade de haver termos de interação entre vizinhos distantes. Um protótipo para esse tipo de teoria é a lagrangiana (1.45) de um modelo tipo Ising, cujo limite do contínuo resulta na densidade lagrangiana de Horava-Lifshitz (1.47).

O modelo que estudaremos aqui foi construído em analogia com aquele apresentado em (1.50), que foi proposto em [9] para o caso de uma teoria de calibre com matéria fermiônica. Entretanto, no caso da lagrangiana (1.50), a imposição de uma série de requisitos de simetria restringe consideravelmente o número de termos possíveis. Além disso, as propriedades intrínsecas da álgebra das matrizes de Dirac garantem que diversos termos de correção no cálculo das funções de Green se anulem, o que acaba por simplificar o estudo daquele modelo. No nosso caso, isto é, o caso de uma teoria de calibre com matéria bosônica, muitas daquelas restrições não se aplicam e surge daí uma estrutura muito mais rica, bem como cálculos consideravelmente mais extensos.

### 3.1.1. Lagrangiana Clássica e Definição da Teoria

Podemos considerar inicialmente uma versão modificada da lagrangiana da eletrodinâmica quântica escalar (SQED) em  $(d + 1)$  dimensões do espaço-tempo da forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}F_{0i}F_{0i} - \frac{a_1^2}{4}F_{ij}F_{ij} - \frac{a_2^2}{4}\partial_l F_{ij}\partial_l F_{ij} \\ & + (D_0\phi)^*D_0\phi - b_1^2(D_i\phi)^*D_i\phi - b_2^2(D_iD_j\phi)^*D_iD_j\phi - m^2\phi^*\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde, como no caso usual,  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  são derivadas covariantes sob transformações de calibre e  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor intensidade de campo de Maxwell.

Nessa lagrangiana, entretanto, foram introduzidos termos com derivadas de ordem

### 3.1 Definindo uma Teoria de Campos com Derivadas de Ordem Superior 53

superior nas partes espaciais tanto do setor de calibre como do de matéria. A presença de tais termos nas partes espaciais sem a respectiva contrapartida nas partes temporais é um dos fatores que tornam a teoria anisotrópica. Outro fator contribuindo para a anisotropia pode vir da escolha de pesos  $a_1$  e  $b_1$  diferentes entre si.

Ao tentar renormalizar a teoria descrita pela lagrangiana (3.1), porém, acaba-se por descobrir que as funções de Green 1PI associadas à mesma geram termos infinitos cuja estrutura é diferente daqueles contidos na lagrangiana proposta. Portanto, acabamos por constatar que a lagrangiana (3.1) não contém os contratermos capazes de cancelar tais divergências. Logo, novos termos devem ser incluídos. A escolha desses termos deve levar em conta todas as possibilidades permitidas pelas simetrias da teoria que não gerem contribuições não-renormalizáveis. Essencialmente, embora a simetria de Lorentz esteja sendo explicitamente quebrada, o que confere maior liberdade à inclusão de termos que de outra forma não poderiam estar presentes, outras simetrias que dão sentido físico à teoria ainda devem estar presentes. Essa ideia, juntamente com o surgimento de termos divergentes sem contrapartes que os cancelem no cálculo das funções 1PI, serve como elemento balizador no processo de escolha de que tipo de termos podem ou não estar presentes. Assim, a lagrangiana deve ser invariante por conjugação hermitiana, de modo a permanecer real. Também deve ser invariante sob transformações de calibre locais e sob conjugação de carga, que são propriedades fundamentais de teorias de calibre, como é o caso da eletrodinâmica usual. Além disso, deve ser invariante sob rotações espaciais pois, embora a anisotropia entre espaço e tempo quebre a simetria de Lorentz, que pode ser entendida como uma simetria sob rotações no espaço-tempo, a maneira como anisotropia foi introduzida garante que a simetria sob rotações puramente espaciais seja preservada, ou seja, o espaço em si continua sendo isotrópico, embora o espaço-tempo como um todo não mais o seja.

Como resultado dessa análise, a lagrangiana proposta passa então a ser:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2}F_{0i}F_{0i} - \frac{a_1^2}{4}F_{ij}F_{ij} - \frac{a_2^2}{4}\partial_l F_{ij}\partial_l F_{ij} \\
& + (D_0\phi)^*D_0\phi - b_1^2(D_i\phi)^*D_i\phi - b_2^2(D_iD_j\phi)^*D_iD_j\phi - m^2\phi^*\phi \\
& - \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2 - \frac{g}{6}(\phi^*\phi)^3 -ieb_3^2F_{ij}(D_i\phi)^*D_j\phi - \frac{e^2}{2}b_4^2F_{ij}F_{ij}\phi^*\phi \\
& + \xi_a [\phi^*(D_iD_i\phi) + (D_iD_i\phi)^*\phi] \phi^*\phi \\
& + \xi_b [\phi^*(D_i\phi)\phi^*(D_i\phi) + (D_i\phi)^*\phi(D_i\phi)^*\phi] \\
& + \xi_c\phi^*(D_i\phi)(D_i\phi)^*\phi
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Os termos proporcionais a  $b_3^2$  e  $b_4^2$  foram introduzidos pois a função 1PI de 3 pontos com um campo de calibre  $A_i$  e campos de matéria  $\phi$  e  $\phi^*$  gerava termos divergentes que não podiam ser cancelados por nenhum contratermo originalmente gerado por (3.1). Já os termos proporcionais a  $g$  e  $\xi_n$ ,  $n = a, b, c..$  são termos compatíveis com as simetrias da teoria que podem gerar contribuições divergentes no caso em que  $z = 2$  e  $d = 4$ , que é o caso com a inclusão mínima de termos de derivadas de ordem superior e com o menor número de dimensões que não torna a teoria superrenormalizável.

A introdução de anisotropias que quebram a simetria de Lorentz na lagrangiana (3.2) pode ser controlada por meio do ajuste dos parâmetros  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$  e  $\xi_n$ ,  $n = a, b, c..$  Por exemplo, tomando  $a_1 = b_1 = 1$  e  $a_2 = b_2 = b_3 = b_4 = \xi_n = 0$ , a SQED usual é recuperada. Nesse sentido, esses parâmetros atuam como *pesos*, cuja diferença em relação a 1 ou 0 mede o quanto a teoria se afasta do caso isotrópico invariante de Lorentz usual.

O procedimento de fixação de calibre pode ser efetuado com a escolha do calibre de Coulomb, que corresponde a adicionar à lagrangiana (3.2) um termo de quebra da forma:

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = \frac{\eta}{2}(\partial_i A_i)^2 \tag{3.3}$$

Depois disso, separamos a lagrangiana resultante em uma parte quadrática livre e em uma parte de interação, que podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \left\{ A_0(-\Delta)A_0 + A_0\partial_0\partial_j A_j + A_i\partial_i\partial_0 A_0 \right. \\ \left. + A_i[(-\partial_0\partial_0 + a_1^2\Delta - a_2^2\Delta^2)\delta_{ij} + (-\eta - a_1^2 + a_2^2\Delta)\partial_i\partial_j]A_j \right\} \\ + \phi^* \left\{ -\partial_0\partial_0 + b_1^2\Delta - b_2^2\Delta^2 - m^2 \right\} \phi \end{aligned} \quad (3.4)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = ieA_0\phi^*\overleftrightarrow{\partial}_0\phi -ieb_1^2A_i\phi^*\overleftrightarrow{\partial}_i\phi -ieb_2^2\left[2A_i(\partial_j\phi^*)\overleftrightarrow{\partial}_i(\partial_j\phi) + (\partial_iA_j)\phi^*\overleftrightarrow{(\partial_i\partial_j)}\phi\right] \\ -ieb_3^2F_{ij}(\partial_i\phi^*)(\partial_j\phi) - \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2 + e^2A_0A_0\phi^*\phi - e^2b_1^2A_iA_i\phi^*\phi \\ -e^2b_2^2\left[2A_iA_i(\partial_j\phi^*)(\partial_j\phi) + A_iA_j(2(\partial_i\phi^*)(\partial_j\phi) - \phi^*(\partial_i\partial_j\phi) - (\partial_i\partial_j\phi^*)\phi) \right. \\ \left. + A_i(\partial_iA_j + \partial_jA_i)\partial_j(\phi^*\phi) + (\partial_jA_i)(\partial_jA_i)\phi^*\phi\right] + e^2b_3^2F_{ij}A_i\partial_j(\phi^*\phi) \\ -\frac{e^2}{2}b_4^2F_{ij}F_{ij}\phi^*\phi + \xi_a[\phi^*(\partial_i\partial_i\phi) + (\partial_i\partial_i\phi^*)\phi]\phi^*\phi \\ +\xi_b[\phi^*(\partial_i\phi)\phi^*(\partial_i\phi) + (\partial_i\phi^*)\phi(\partial_i\phi^*)\phi] + \xi_c\phi^*(\partial_i\phi)(\partial_i\phi^*)\phi \\ -ie^3b_2^22A_iA_iA_j\phi^*\overleftrightarrow{\partial}_j\phi -ie(2\xi_a + 2\xi_b - \xi_c)A_i\phi^*\phi(\phi^*\overleftrightarrow{\partial}_i\phi) \\ -e^4b_2^2A_iA_iA_jA_j\phi^*\phi -g(\phi^*\phi)^3 -e^2(2\xi_a + 2\xi_b - \xi_c)A_iA_i(\phi^*\phi)^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde  $\Delta = \partial_k\partial_k$  é um operador laplaciano em  $d$  dimensões espaciais e  $f\overleftrightarrow{\mathcal{O}}g = f(\mathcal{O}g) - (\mathcal{O}f)g$ . A expressão acima está organizada de modo a exibir primeiro os termos trilineares, depois os quadrilineares e assim por diante.

### 3.1.2. Regras de Feynman: Propagadores Livres e Vértices

Os propagadores dos campos escalares e dos campos de calibre são obtidos de forma usual diretamente da lagrangiana livre (3.4) por meio da inversão dos operadores que

aparecem entre os campos. Além disso, tomando o limite de Landau  $\eta \rightarrow \infty$ , os propagadores de calibre não diagonais  $\langle A_0(k)A_i(-k) \rangle$  se anulam. Com isso, os propagadores no espaço dos momentos podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
 \text{---} &\longrightarrow \langle T\phi(k)\phi^*(-k) \rangle = \frac{i}{k_0^2 - b_1^2\vec{k}^2 - b_2^2\vec{k}^4 - m^2} \\
 \overset{0}{\text{~~~~~}} &\longrightarrow \langle TA_0(k)A_0(-k) \rangle = \frac{i}{\vec{k}^2} \\
 \overset{i}{\text{~~~~~}} &\longrightarrow \langle TA_i(k)A_j(-k) \rangle = \frac{i\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2}\right)}{k_0^2 - a_1^2\vec{k}^2 - a_2^2\vec{k}^4}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde  $\vec{k}^4$  significa  $(\vec{k}^2)^2 = (k_i k_i)^2$ .

Existem quatro vértices de interação 3-lineares em (3.5), aos quais chamaremos  $V_{3X}$ ,  $X = A, B, C, D$ . Tomando as transformadas de Fourier desses termos de interação e considerando sempre que todos os momentos entram nos vértices, podemos escrever as expressões correspondentes aos mesmos no espaço dos momentos como:

$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \end{array} \longrightarrow V_{3X}(p, k, k')$$

com:

$$\begin{aligned}
 V_{3A}(p, k, k') &= eA_0(p)\phi(k)\phi^*(k') \times (p_0 + 2k_0) \\
 V_{3B}(p, k, k') &= -eb_1^2 A_i(p)\phi(k)\phi^*(k') \times (p_i + 2k_i) \\
 V_{3C}(p, k, k') &= -eb_2^2 A_i(p)\phi(k)\phi^*(k') \times (p_j + 2k_j) \{ (p_i + k_i)(p_j + k_j) + k_i k_j \} \\
 V_{3D}(p, k, k') &= -eb_3^2 A_i(p)\phi(k)\phi^*(k') \times \left\{ k_i(\vec{k}'^2 + \vec{k}' \cdot \vec{k}) - k'_i(\vec{k}^2 + \vec{k} \cdot \vec{k}') \right\}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

sendo que a conservação do momento total no vértice requer que  $k' = -k - p$ .

Seguindo o mesmo procedimento para os termos de interação 4-lineares, encontramos vértices formados apenas por campos escalares e também vértices formados por campos

### 3.1 Definindo uma Teoria de Campos com Derivadas de Ordem Superior 57

escalares e campos de calibre. Os vértices formados por campos escalares são da forma:

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \times \\ \diagdown \end{array} \longrightarrow V_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

com:

$$V_{4\lambda}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -\frac{\lambda}{4}\phi(p_1)\phi^*(p_2)\phi(p_3)\phi^*(p_4) \quad (3.8)$$

vindo do termo de interação  $-\frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2$  e também:

$$\begin{aligned} V_{4\xi_a}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -\xi_a\phi(p_1)\phi^*(p_2)\phi(p_3)\phi^*(p_4) \times (\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2) \\ V_{4\xi_b}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -\xi_b\phi(p_1)\phi^*(p_2)\phi(p_3)\phi^*(p_4) \times (\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 + \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_4) \\ V_{4\xi_c}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -\xi_c\phi(p_1)\phi^*(p_2)\phi(p_3)\phi^*(p_4) \times \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4 \end{aligned} \quad (3.9)$$

dos termos de interação proporcionais a  $\xi_n$ ,  $n = a, b, c$ .

Já os vértices formados por campos escalares junto com campos de calibre são dados por:

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ \text{wavy} \end{array} \longrightarrow V_{4X}(p, p', k, k')$$

com:

$$\begin{aligned} V_{4A}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= e^2 A_0(p_1)A_0(p_2)\phi(p_3)\phi^*(p_4) \\ V_{4B}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -e^2 b_1^2 A_i(p_1)A_i(p_2)\phi(p_3)\phi^*(p_4) \\ V_{4C}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -e^2 b_2^2 A_i(p_1)A_j(p_2)\phi(p_3)\phi^*(p_4) \times \{p_{3i}p_{3j} + p_{4i}p_{4j} - p_{4i}p_{3j} - p_{3i}p_{4j} \\ &\quad - 2\vec{p}_3 \cdot \vec{p}_4 \delta_{ij} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \delta_{ij} - p_{2i}(p_{3j} + p_{4j}) - \vec{p}_2 \cdot (\vec{p}_3 + \vec{p}_4) \delta_{ij}\} \\ V_{4D}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -e^2 b_3^2 A_i(p_1)A_j(p_2)\phi(p_3)\phi^*(p_4) \times \{p_{2i}(p_{3j} + p_{4j}) - \delta_{ij}\vec{p}_2 \cdot (\vec{p}_3 + \vec{p}_4)\} \\ V_{4E}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -e^2 b_4^2 A_i(p_1)A_j(p_2)\phi(p_3)\phi^*(p_4) \times \{p_{2i}p_{1j} - \delta_{ij}\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

sendo que, tanto em (3.8) e (3.9) como em (3.10), a conservação do momento deve ser obedecida, de modo que  $p_4 = -p_1 - p_2 - p_3$ .

Os dois primeiros conjuntos vértices 4-lineares,  $V_{4\lambda}$  e  $V_{4\xi}$ , correspondem a termos de autointeração que são compatíveis com as simetrias de calibre e rotacional. Eles podem contribuir para as funções de Green 1PI de 2, 3 e 4 pontos e são necessários para cancelar certos infinitos que surgem do processo de renormalização. No caso da SQED usual, apenas o vértice  $V_{4\lambda}$  se faz necessário para esse propósito. No entanto, no nosso caso, conforme veremos mais adiante, a função de 4 pontos pode fornecer contribuições infinitas que requerem a presença de um vértice da forma  $V_{4\xi}$  para gerar contratermos que possam cancelá-las. Essa também é a razão para a inclusão na lagrangiana dos termos proporcionais a  $b_3^2$  e  $b_4^2$ , que originam os vértices  $V_{3D}$ ,  $V_{4D}$  e  $V_{4E}$ .

Devemos considerar ainda dois tipos de vértices 5-lineares, que serão relevantes nos cálculos feitos adiante e que são dados por:

The diagram shows a central vertex with five external lines. Three lines are wavy (representing photons) and two are straight (representing fermions). An arrow points from the vertex to the mathematical expression  $V_5(p_1, p_2, p_3, k, k')$ .

com:

$$V_5(p_1, p_2, p_3, k, k') = -2e^3 b_2^2 A_i(p_1) A_i(p_2) A_j(p_3) \phi(k) \phi^*(k') \times (k_j - k'_j) \quad (3.11)$$

onde  $p_1 + p_2 + p_3 + k + k' = 0$  e

The diagram shows a central vertex with five external lines. One line is wavy (representing a photon) and four are straight (representing fermions). An arrow points from the vertex to the mathematical expression  $V_{5\xi}(k, p_1, p_2, p_3, p_4)$ .

com:

$$V_{5\xi}(k, p_1, p_2, p_3, p_4) = -e(2\xi_a + 2\xi_b - \xi_c)A_i(k)\phi(p_1)\phi^*(p_2)\phi(p_3)\phi^*(p_4) \times (p_{1i} - p_{2i}) \quad (3.12)$$

onde  $k = -p_1 - p_2 - p_3 - p_4$ .

Ao longo desse capítulo e nos cálculos que seguem, os símbolos  $\int[dk]$  e  $[\delta(k)]$  serão usados como notação abreviada para  $\int \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d}$  e  $(2\pi)^{d+1}\delta^{(d+1)}(k)$ , respectivamente. Além disso, é conveniente definir uma função  $\Omega_c$  como:

$$\Omega_c[k^2] \equiv c_0^2 k_0^2 - c_1^2 \vec{k}^2 - c_2^2 \vec{k}^4 - m_c^2 \quad (3.13)$$

que é a forma geral comum aos denominadores dos propagadores e às integrações em loop. Por exemplo, o denominador  $\vec{k}^2$  pode ser obtido a partir de (3.13) escolhendo  $c_0 = c_2 = m_c = 0$  e  $c_1 = i$ . Com isso, desse ponto em diante, usaremos  $\Omega_b[k^2]$  para representar a função (3.13) com  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = b_1$ ,  $c_2 = b_2$  e  $m_c = m$  enquanto  $\Omega_a$  irá representar a escolha de parâmetros  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = a_1$ ,  $c_2 = a_2$  e  $m_c = 0$ , ou seja:

$$\Omega_a = k_0^2 - a_1^2 \vec{k}^2 - a_2^2 \vec{k}^4 \quad \text{e} \quad \Omega_b = k_0^2 - b_1^2 \vec{k}^2 - b_2^2 \vec{k}^4 - m^2 \quad (3.14)$$

#### 3.1.3. Escala Anisotrópica e Análise Dimensional

Conforme explicado na Seção 2.2 do Capítulo 2, sob a perspectiva de transformações de escala anisotrópicas, para que a ação seja adimensional, cada termo da lagrangiana deve ter dimensão  $(z + d)$ . Com isso, podemos determinar as dimensões de escala de todos os campos, constantes de acoplamento e pesos anisotrópicos da teoria, obtendo:

$$\begin{aligned}
\dim(A_0) &= \frac{d+z-2}{2}, \quad \dim(A_i) = \dim(\phi) = \frac{d-z}{2}, \\
\dim(e) &= \frac{2+z-d}{2}, \quad \dim(\lambda) = 3z-d, \quad \dim(g) = 4z-2d, \quad \dim(\xi_n) = 3z-2-d, \\
\dim(a_1) &= \dim(b_1) = z-1, \quad \dim(m) = z, \quad \dim(\eta) = 2z-2, \\
\dim(a_2) &= \dim(b_2) = \dim(b_3) = \dim(b_4) = z-2
\end{aligned} \tag{3.15}$$

A fim de definir constantes de acoplamento cuja dimensão não seja afetada pela regularização dimensional, devemos redefinir  $e$ ,  $\lambda$ ,  $g$  e  $\xi_n$ ,  $n = a, b, c$ , que, conforme vemos em (3.15), são as constantes que dependem de  $d$ . Na regularização dimensional, trabalhamos com um número de dimensões menor fazendo a substituição  $d \rightarrow d - \epsilon$ . Assim, se introduzirmos um parâmetro  $\mu$  com  $\dim(\mu) = z$ , podemos escrever:

$$e = (\bar{e}\mu^{\frac{2+z-d}{2z}})\mu^{\frac{\epsilon}{2z}}, \quad \lambda = (\bar{\lambda}\mu^{\frac{3z-d}{z}})\mu^{\frac{\epsilon}{z}}, \quad g = (\bar{g}\mu^{\frac{4z-2d}{z}})\mu^{\frac{2\epsilon}{z}} \quad \text{e} \quad \xi_n = (\bar{\xi}_n\mu^{\frac{3z-2-d}{z}})\mu^{\frac{\epsilon}{z}} \tag{3.16}$$

onde  $\bar{e}$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{g}$  e  $\bar{\xi}_n$  são adimensionais. Os termos entre parênteses foram separados dessa forma pois eles não são afetados pela regularização dimensional uma vez que nesse ponto já foi feita a substituição  $d \rightarrow d - \epsilon$  de modo que a parte dependente da variação dimensional corresponde ao fator  $\mu$  cujo expoente é proporcional a  $\epsilon$ .

Para os nossos cálculos, iremos trabalhar com um número de dimensões espaciais  $d = 4$  e ao efetuar o procedimento de regularização dimensional faremos  $d \rightarrow 4 - \epsilon$ . Essa escolha de dimensão é justificada pelo fato de que a nossa teoria é finita para  $d = 3$  e o caso  $d = 4$  é o primeiro a trazer divergências que demandam renormalização [9]. Além disso, estamos nos restringindo ao caso onde é incluído o menor número possível de derivadas de ordem mais alta, ou seja, se a SQED usual contém 2 derivadas nos termos cinéticos, isso corresponde ao caso  $z = 1$ . Então, como nossa teoria pode conter

até 4 derivadas, ela corresponde ao caso  $z = 2$ . Assim, fazendo  $d = 4$  e  $z = 2$  em (3.16), temos:

$$e = e_0\mu^{\epsilon/4}, \quad \lambda = \lambda_0\mu^{\epsilon/2}, \quad g = g_0\mu^\epsilon \quad \text{e} \quad \xi_n = \xi_{n0}\mu^{\epsilon/2} \quad (3.17)$$

onde definimos novas constantes de acoplamento  $e_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $g_0$  e  $\xi_{n0}$ , que correspondem aos objetos que aparecem destacados entre parênteses nas expressões (3.16), porém fazendo  $z = 2$  e  $d = 4$ . Para essa escolha, as constantes  $e_0$ ,  $g_0$  e  $\xi_{n0}$  serão adimensionais. O único dos quatro parâmetros considerados que não é adimensional é  $\lambda_0$ , que tem dimensão de escala  $(3z - d) = 2$ .

#### 3.1.4. Contagem de Potências e Grau de Divergência Superficial

Na seção anterior foram determinadas as dimensões de escala dos campos e parâmetros da teoria definida por (3.2). Dando sequência à análise dimensional ali apresentada, vamos adotar o procedimento descrito na Seção 2.2.2 do Capítulo 2 para deduzir a expressão do grau de divergência superficial dos diagramas para o nosso modelo.

Sendo o expoente crítico  $z = 2$  e o número de dimensões espaciais  $d = 4$ , a contagem de potências anisotrópica nos diz que, para um gráfico  $G$  o grau de divergência superficial  $\omega(G)$  é:

$$\begin{aligned} \omega(G) = & 6L - 4n_\phi - 4n_{A_i} - 2n_{A_0} + 2V_{3A} + V_{3B} + 3V_{3C} + 3V_{3D} \\ & + 2V_{4C} + 2V_{4E} + 2V_{4\xi} + V_5 + V_{5\xi} \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde  $L$  é o número de loops, isto é, de integrais em momentos internos independentes,  $n_X$  é o número de linhas internas de campos  $X$  e  $V_X$  é o número de vértices do tipo  $X$  <sup>1</sup>.

O número 6 que multiplica  $L$  conta as dimensões de escala do espaço de fases em cada

---

<sup>1</sup>Cuidado para não confundir os  $V_X$  utilizados aqui com as funções definidas na Seção 3.1.2 para representar a expressão dos termos de interação da lagrangiana no espaço dos momentos. Aqui, os  $V_X$  são, meramente, o número de vértices de determinado tipo que se encontra em um determinado diagrama.

integral de loop. Os termos negativos, por sua vez, vêm dos expoentes dos momentos nos denominadores dos propagadores e contribuem para a melhoria do comportamento ultravioleta. Já os demais termos contam as contribuições dos fatores de momento dos vértices originados de termos da lagrangiana com derivadas.

Considerando relação topológica de Euler adaptada aos diagramas de Feynman, temos:

$$L = n_\phi + n_{A_i} + n_{A_0} - \sum_X V_X + 1 \quad (3.19)$$

onde a soma corresponde ao número total de vértices no diagrama. Usando a expressão acima para eliminar  $L$  em (3.18), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \omega(G) = & 6 + 2n_\phi + 2n_{A_i} + 4n_{A_0} - 4V_{3A} - 5V_{3B} - 3V_{3C} - 3V_{3D} \\ & - 4V_{4C} - 4V_{4E} - 4V_{4\xi} - 5V_5 - 5V_{5\xi} - 6\bar{V} \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde  $\bar{V}$  é o número total de vértices no diagrama que não contém derivadas.

A contagem do número de pontas que sai de cada vértice fornece as seguintes relações:

$$\begin{aligned} 2n_\phi + N_\phi &= 2 \sum_X V_{3X} + 2 \sum_X V_{4X} + 4V_{4\xi} + 2V_5 + 4V_{5\xi} + 2V_{6e^4} + 6V_{6g} + 4V_{6e^2\xi} \\ 2n_{A_i} + N_{A_i} &= \sum_{X \neq A} V_{3X} + 2 \sum_{X \neq A} V_{4X} + 3V_5 + V_{5\xi} + 4V_{6e^4} + 2V_{6e^2\xi} \\ 2n_{A_0} + N_{A_0} &= V_{3A} + 2V_{4A} \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde os  $N_X$  representam o número de linhas externas do campo  $X$  e os números  $V_{6e^4}$ ,  $V_{6g}$  e  $V_{6e^2\xi}$  contam o número de aparições dos vértices 6-lineares, que correspondem aos três últimos termos da expressão (3.5).

Usando as expressões (3.21) para eliminar  $n_\phi$ ,  $n_{A_i}$  e  $n_{A_0}$  em (3.20) e reorganizando os termos adequadamente, podemos escrever:

$$\omega(G) = 6 - N_\phi - N_{A_i} - 2N_{A_0} - \sum_X [6 - \dim(V_X)] V_X \quad (3.22)$$

que é a expressão que fornece o grau de divergência superficial da nossa teoria em função dos números de pernas externas e da dimensão de escala de cada vértice.

A versão da expressão (3.22), para o caso em que o expoente crítico  $z$  e o número de dimensões espaciais  $d$  são mantidos arbitrários, é dada por:

$$\begin{aligned} \omega(G) = & (z + d) - \dim(\phi)N_\phi - \dim(A_i)N_{A_i} \\ & - \dim(A_0)N_{A_0} - \sum_X [z + d - \dim(V_X)] V_X \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde as dimensões dos campos são dadas em (3.15). Essa expressão está de acordo com (2.23), que corresponde ao caso geral.

### 3.1.5. Critérios para o Cálculo das Funções de Green

Nas seções seguintes, serão analisadas algumas das funções de Green 1PI do nosso modelo. Ao determinar pelo menos as partes divergentes dessas funções, o esquema de subtração mínima permite fixar os contratermos necessários para renormalizar a teoria. A determinação dos contratermos, por sua vez, será feita no Capítulo 4 e o restante deste capítulo será dedicado ao cálculo das partes divergentes das funções 1PI. Assim, é preciso decidir quais dessas funções divergem.

As funções 1PI podem ser expandidas em somas de diagramas. Com isso, um primeiro critério que permite decidir sobre a presença de contribuições infinitas consiste em determinar o grau de divergência superficial  $\omega$  dos diagramas. A determinação de  $\omega$  em função das características de cada diagrama na nossa teoria pode ser feita facilmente por meio da fórmula (3.22). Entretanto, mesmo antes de expandir as funções 1PI, podemos usar a fórmula (3.22) para obter um valor superestimado do grau de divergência pois, uma vez que  $\dim(V_X) \leq 6$ , o termo do somatório sempre contribui

para diminuir  $\omega$ . Como os demais termos só dependem do número de pernas externas, o valor superestimado de  $\omega$  pode ser obtido para qualquer função 1PI, sendo dado por:

$$\omega(\Gamma) = 6 - N_\phi - N_{A_i} - 2N_{A_0} \quad (3.24)$$

o que torna claro o fato que quanto maior o número de pernas externas menor a chance de uma função 1PI divergir.

A fórmula acima pode ser usada como critério de exclusão. Se  $\omega(\Gamma) < 0$  para determinada função de vértice  $\Gamma^{(n)}$ , então essa função é finita. No entanto, a recíproca não é necessariamente verdadeira pois derivadas contidas nos vértices podem contribuir para diminuir o grau de divergência superficial ao atuarem sobre momentos externos contidos nos denominadores dos propagadores.

Além disso, como as funções 1PI são os coeficientes da expansão da ação efetiva, os termos formados com essas funções devem obedecer às mesmas simetrias da ação clássica. Em particular, eles devem ser invariantes por conjugação de carga, isto é, sob as transformações (1.35). De acordo com (2.4), uma função de Green ordinária de  $n$  pontos é obtida a partir do funcional gerador por meio de  $n$  derivações funcionais. Se os  $n$  pontos externos forem conectados por propagadores dos campos de calibre  $A_\mu$ , teremos, esquematicamente:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{N} \int DA A(x_1) \cdots A(x_n) e^{iS} \quad (3.25)$$

Agora, sob conjugação de carga, cada campo  $A_\mu$  troca de sinal, enquanto os demais elementos da integral funcional acima permanecem invariantes. Com isso, se  $n$  for um número ímpar, a integral muda de sinal e a simetria sob conjugação de carga requer que  $G^{(n)}$  se anule. Como a função de vértice  $\Gamma^{(n)}$  corresponde à parte própria de  $G^{(n)}$ , o que se obtém, diagramaticamente, amputando as pernas externas da parte conexa

## 3.2 Divergências nas Correções Radiativas de 1-Loop ao Setor de Calibre 65

de  $G^{(n)}$ , se a função de Green ordinária se anula, a função 1PI correspondente também se anulará.

Como consequência dessa análise, podemos, por exemplo, descartar a necessidade de calcular funções de 3 pontos do tipo  $\Gamma^{(4)\mu\nu\rho}$ , que são os coeficientes de termos da ação efetiva com 3 campos de calibre  $A_\mu$ ,  $A_\nu$  e  $A_\rho$ . Outra conclusão possível é que contribuições divergentes podem vir de funções de até 6 pontos.

Nesse trabalho nos limitaremos a analisar as funções 1PI de até 3 pontos até a ordem de 1 loop. Iniciamos essa análise a partir da seção seguinte.

### 3.2. Divergências nas Correções Radiativas de 1-Loop ao Setor de Calibre

#### 3.2.1. Função de Green de 2-Pontos dos Campos de Calibre

A função de Green 1PI de 2 pontos dos campos de calibre,  $\Gamma^{(2)\mu\nu}$ , é definida de modo que  $\Gamma^{(2)\mu\lambda}G_{\lambda\nu}^{(2)} = i\delta_\nu^\mu$  onde a função de Green conexa de 2 pontos,  $G_{\mu\nu}^{(2)}$ , é o propagador cheio, dado por:

$$G_{\mu\nu}^{(2)} \longrightarrow \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \dots \quad (3.26)$$

onde a bolha 1PI, até a ordem de 1 loop, é dada por:

$$\text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram} + \dots \quad (3.27)$$

De acordo com a nossa notação,  $i\Pi_j^{\mu\nu}(p)$  representa uma contribuição para a bolha

1PI  $i\Pi^{\mu\nu}$  vinda de um vértice  $j$ -linear  $V_{jX}$ . A função 1PI de 2 pontos se relaciona com a bolha como:

$$i\Pi^{\mu\nu} = i\Gamma_{1\text{-loop}}^{(2)\mu\nu} A_\mu A_\nu \quad (\text{sem soma em } \mu \text{ e } \nu) \quad (3.28)$$

de modo que, exceto por um fator  $i$  definido para futura conveniência, a bolha em si corresponde a uma correção quântica a ser adicionada à lagrangiana clássica e será um de vários possíveis termos contribuindo para a expressão da ação efetiva. Também devemos destacar que os índices  $\mu$  e  $\nu$  que aparecem do lado direito de (3.28) não implicam em soma, assim como esses mesmos índices aparecendo em  $i\Pi^{\mu\nu}$  não indicam que tal objeto é um tensor, mas são apenas indicativos de que essa é a bolha que representa a função 1PI que aparece multiplicada pelos campos  $A_\mu$  e  $A_\nu$  na expressão da ação efetiva. Essa mesma convenção será adotada deste ponto em diante ao longo deste capítulo.

As expressões dos diferentes diagramas formados por um vértice 4-linear contribuindo para  $i\Pi^{\mu\nu}$  são:

$$\begin{aligned} i\Pi_4^{00}(p) &= i \int [dp'] [dk] [dk'] [\delta(p+p')] [\delta(k'+k+p+p')] \langle T V_{4A}(p, p', k, k') \rangle \\ &= i^2 e^2 A_0(p) A_0(-p) \int [dk] \frac{1}{\Omega_b[k^2]} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} i\Pi_4^{ij}(p) &= i \sum_{X=B,C,D,E} \int [dp'] [dk] [dk'] [\delta(p+p')] [\delta(k'+k+p+p')] \langle T V_{4X}(p, p', k, k') \rangle \\ &= -i^2 e^2 A_i(p) A_j(-p) \delta_{ij} \left\{ (b_1^2 + b_2^2 \vec{p}^2) \int [dk] \frac{1}{\Omega_b[k^2]} + \frac{2}{d} (d+2) b_2^2 \int [dk] \frac{\vec{k}^2}{\Omega_b[k^2]} \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Já os diagramas formados com dois vértices 3-lineares  $V_{3X}$  e  $V_{3Y}$  são:

### 3.2 Divergências nas Correções Radiativas de 1-Loop ao Setor de Calibre 67

$$i\Pi_{3,3}^{\mu\nu}(p) = \frac{i^2}{2} \sum_{X,Y} \int [dp'] [dk] [dk'] [dq] [dq'] [\delta(p+p')] [\delta(k'+q)] [\delta(p+k+k')] [\delta(p'+q+q')] \\ \times \langle T V_{3X}(p, k, k') V_{3Y}(p', q, q') \rangle \quad (3.31)$$

onde a soma deve ser efetuada sobre todos os índices  $(X, Y)$  correspondendo a todos os vértices 3-lineares que fornecem a mesma combinação  $(\mu, \nu)$ . Por exemplo, para construir  $\Pi_{3,3}^{ij}(p)$ , devemos somar nove termos que correspondem, respectivamente, a  $(X, Y) = (B, B), (B, C), (B, D), (C, B), (C, C), (C, D), (D, B), (D, C), (D, D)$  pois estes são os rótulos dos vértices 3-lineares que contém campos  $A_i$ . Por outro lado, para formar  $\Pi_{3,3}^{0i}(p)$  devemos somar sobre  $(X, Y) = (A, B), (B, A), (A, C), (C, A), (A, D), (D, A)$ . Nesse caso, o vértice  $V_{3A}$ , que contém o campo  $A_0$ , deve ser considerado juntamente com algum dentre os outros vértices que contenha um campo  $A_i$ . Para formar  $\Pi_{3,3}^{00}(p)$ , porém, temos apenas uma possibilidade, para a qual  $(X, Y) = (A, A)$ , isto é, dois campos  $A_0$ .

Substituindo as expressões (3.7) para os vértices 3-lineares em (3.31), podemos escrever expressões para cada uma das bolhas 1PI como segue:

$$i\Pi_{3,3}^{00}(p) = \frac{e^2}{2} A_0(p) A_0(-p) \int [dk] \frac{(p_0 + 2k_0)^2}{\Omega_b[k^2] \Omega_b[(k+p)^2]} \quad (3.32)$$

$$i\Pi_{3,3}^{0i}(p) = i\Pi_{3,3}^{i0}(p) = \frac{e^2}{4} A_0(p) A_i(-p) \left\{ b_1^2 \int [dk] \frac{(p_0 + 2k_0)(p_i + 2k_i)}{\Omega_b[k^2] \Omega_b[(k+p)^2]} \right. \\ \left. + b_2^2 \int [dk] \frac{(p_0 + 2k_0)(p_l + 2k_l) \{ (p_i + k_i)(p_l + k_l) + k_i k_l \}}{\Omega_b[k^2] \Omega_b[(k+p)^2]} \right\} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}
i\Pi_{3,3}^{ij}(p) = & \frac{e^2}{2} A_i(p) A_j(-p) \left\{ b_1^4 \int [dk] \frac{(p_i + 2k_i)(p_j + 2k_j)}{\Omega_b[k^2] \Omega_b[(k+p)^2]} \right. \\
& + b_2^4 \int [dk] \frac{(p_l + 2k_l)(p_m + 2k_m) \{(p_i + k_i)(p_l + k_l) + k_i k_l\} \{(p_j + k_j)(p_m + k_m) + k_j k_m\}}{\Omega_b[k^2] \Omega_b[(k+p)^2]} \\
& \left. + 2b_1^2 b_2^2 \int [dk] \frac{(p_i + 2k_i)(p_l + 2k_l) \{(p_j + k_j)(p_l + k_l) + k_j k_l\}}{\Omega_b[k^2] \Omega_b[(k+p)^2]} \right\}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

As expressões até 1 loop escritas acima correspondem fornecem contribuições para as funções de Green 1PI, bem como para a ação efetiva. Entretanto, nosso objetivo principal nesse trabalho não é encontrar uma expressão para a ação efetiva, mas sim renormalizar a teoria descrita por (3.2) e estudar o fluxo do grupo de renormalização para o acoplamento  $e$  e para os pesos anisotrópicos  $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3$  e  $b_4$ . Evidentemente, para determinar contribuições à ação efetiva, seria preciso, além de calcular as correções em 1 loop com as quais iremos lidar neste capítulo, também incluir termos além de 1 loop e também com diferentes números de pernas externas vindo de outros vértices de interação. No entanto, como nosso intuito é renormalizar a teoria, podemos nos restringir a olhar para as divergências ultravioleta que podem ocorrer conforme indicado pela análise do grau de divergência superficial. Essa é a razão para a escolha particular dos diagramas apresentados ao longo deste capítulo. Então, nosso próximo passo será determinar as partes infinitas das integrais (3.32)–(3.34), ou seja, devemos encontrar os resíduos das integrais acima. Esses resíduos são os termos que multiplicam um fator  $1/\epsilon$ , onde  $\epsilon = 4 - d$ .

### 3.2.2. Expansão em Taylor para Baixas Energias

Os integrandos das expressões acima podem ser expandidos ao redor de  $p = 0$  para  $p$  pequeno. Como estamos lidando com uma teoria que contém termos com até  $2z = 4$  derivadas, pode ser necessário realizar as expansões até a ordem de  $p^4$ . Por outro lado,

### 3.2 Divergências nas Correções Radiativas de 1-Loop ao Setor de Calibre 69

lembrando que a nossa lagrangiana não contém derivadas temporais de ordem maior que 2, não precisamos considerar tais termos na expansão. Em particular, a parte da lagrangiana com a qual a função de 2 pontos dos campos de calibre contribui também não possui nenhum termo com um número ímpar de derivadas. Com isso, podemos escrever:

$$\Pi(p) \approx \Pi(0) + \frac{p_i p_j}{2} \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial p_i \partial p_j} + p_0 p_i \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial p_0 \partial p_i} + \frac{p_0^2}{2} \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial p_0^2} + \frac{p_i p_j p_l p_m}{4!} \frac{\partial^4 \Pi(0)}{\partial p_i \partial p_j \partial p_l \partial p_m} \quad (3.35)$$

onde cada coeficiente de Taylor será uma combinação de integrais da forma:

$$J(x, y, z) = \int [dk] \frac{k_0^x |\vec{k}|^y}{[k_0^2 - b_1^2 \vec{k}^2 - b_2^2 \vec{k}^4 - m^2]^z} \quad (3.36)$$

Para o caso  $b_1 = 0$ , essas integrais foram calculadas por [21] com o intuito de determinar correções à ação efetiva da teoria considerada naquele trabalho. A ausência dos termos da SQED usual só faria sentido em um contexto de altas energias, onde os termos com derivadas de ordem superior que geram os fatores  $\vec{k}^4$  nos denominadores dos propagadores dominam o comportamento da teoria. Nesse sentido, poderíamos pensar na ausência dos termos usuais como a representação de uma situação em que os pesos dos termos de derivadas mais altas são muito maiores do que os pesos dos termos com número usual de derivadas. Acontece, porém, que um  $b_1$  diferente de zero é requerido caso se pretenda recuperar a SQED usual. Para este fim, teríamos que escolher  $b_1 = 1$  e  $b_2 = 0$  (e da mesma forma,  $a_1 = 1$  e  $a_2 = 0$ ). Mesmo mantendo os termos de derivada de ordem superior “ligados”, a expectativa mais natural seria que fosse possível recuperar a teoria usual em algum limite de baixas energias.

Integrais semelhantes a (3.36) foram estudadas em [10], onde uma expressão para a parte divergente das mesmas foi obtida empregando a parametrização de Schwinger e depois realizando uma expansão em série do integrando resultante, do qual foi extraído

o termo dominante. Para o nosso caso, a expressão que fornece o termo dominante das integrais (3.36) é:

$$J(x, y, z) = \frac{i^{1+x-2z}}{(4\pi)^{(d+2)/2}} \frac{[(-1)^x + 1]}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(z)} \times \sum_{n=0}^2 \frac{(-b_1^2)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{d+y+2n}{4}\right)\Gamma\left(\omega + \frac{(n-1)}{2}\right)}{(b_2^2)^{(d+y+2n)/4}(m^2)^{\omega + \frac{(n-1)}{2}}} \quad (3.37)$$

onde  $\omega \equiv (4z - 2x - y - d)/4$  e cuja dedução detalhada pode ser vista no Apêndice C.

No esquema de regularização dimensional, fazemos  $d \rightarrow d - \epsilon$  e a parte divergente das integrais aparece na forma do termo proporcional a  $1/\epsilon$ . Assim, tendo utilizado a expressão (3.37), como estamos trabalhando com um número de dimensões espaciais  $d = 4$ , basta tomar o resíduo da expressão resultante em  $d = 4$ , ou seja, devemos considerar o termo proporcional a  $1/(d - 4)$  e então inverter o sinal para encontrar o termo proporcional a  $1/\epsilon$ .

Embora a expressão (3.37) seja válida apenas para determinar a parte divergente de integrais da forma (3.36), isso não será um problema, já que os cálculos que faremos requerem justamente a determinação dessas divergências, que serão ajustadas para eliminar contratermos da mesma forma no esquema de renormalização por subtração mínima.

### 3.2.3. Resíduos das Correções do Setor de Calibre

A partir de agora, consideraremos cada uma das contribuições para as funções de Green 1PI dos campos de calibre, isto é, cada um dos diagramas  $i\Pi^{\mu\nu}$  com  $(\mu, \nu) = (0, 0), (0, i), (i, j)$ . de acordo com (3.27),  $i\Pi^{\mu\nu} = i\Pi_4^{\mu\nu} + i\Pi_{3,3}^{\mu\nu}$  e as contribuições individuais para  $i\Pi^{\mu\nu}$  são dadas pelas fórmulas (3.29) e (3.30), que correspondem aos diagramas formados com vértices 4-lineares, e por (3.32), (3.33) e (3.34), associadas aos 3-lineares.

### 3.2 Divergências nas Correções Radiativas de 1-Loop ao Setor de Calibre 71

Seguindo o procedimento de expansão em série de Taylor descrito acima e detalhando as expressões dos resíduos para cada integral calculada de acordo com (3.37), encontramos:

$$i\Pi^{00}(p) = \frac{i}{4} \frac{e^2}{16\pi^2 b_2} A_0(p) A_0(-p) \left[ \frac{1}{\epsilon} \vec{p}^2 + (\text{parte finita}) \right] \quad (3.38)$$

$$i\Pi^{0i}(p) = i\Pi^{i0}(p) = \frac{i}{4} \frac{e^2}{16\pi^2 b_2} A_0(p) A_i(-p) \left[ -\frac{1}{\epsilon} p_0 p_i + (\text{parte finita}) \right] \quad (3.39)$$

$$i\Pi^{ij}(p) = \frac{i}{4} \frac{e^2}{16\pi^2 b_2} A_i(p) A_j(-p) \left[ \frac{1}{\epsilon} \left( \delta_{ij} p_0^2 + R(\delta_{ij} \vec{p}^2 - p_i p_j) + S(\delta_{ij} \vec{p}^2 - p_i p_j) \vec{p}^2 \right) + (\text{parte finita}) \right] \quad (3.40)$$

onde  $\epsilon = 4 - d$  e as constantes  $R$  e  $S$  são definidas como:

$$R = \frac{2b_1^2}{b_2^2} (2b_2^2 - b_3^2 + b_4^2) \quad \text{e} \quad S = \frac{1}{12b_2^2} (3b_2^4 - 14b_2^2 b_3^2 + b_3^4) \quad (3.41)$$

Primeiramente, notamos que, fazendo  $b_2 = 0$ , os resultados acima divergem. Essa característica irá aparecer também nas outras correções calculadas mais adiante. Isso, no entanto, é esperado pois, na ausência dos termos de derivadas de ordem superior, nossa teoria é *não-renormalizável*. De fato, tais termos foram introduzidos justamente com o intuito de contornar essa situação melhorando o comportamento ultravioleta da teoria.

Devemos mencionar ainda que a simetria de calibre não é quebrada. Esse fato é evidenciado pelo resultado acima que se mantém proporcional aos termos da lagrangiana clássica de Maxwell. Embora termos que violem essa simetria apareçam em passos in-

intermediários dos cálculos, como se vê em partes das contribuições  $i\Pi_4^{ij}$  e  $i\Pi_{3,3}^{ij}$  à bolha 1PI (3.27), onde encontramos termos proporcionais a  $A_i A_i$ . Ocorre, porém, que sob integração, tais contribuições desaparecem. Isso pode ser associado ao fato de que, uma vez que esses termos são somados, o integrando formado é uma derivada total que se anula sob integração. De fato, mesmo antes de efetuar a integração desses termos, poderíamos ter notado que o integrando  $f(k_0, \vec{k})$  de  $i\Pi^{ij}(0) = i\Pi_4^{00}(0) + i\Pi_{3,3}^{ij}(0)$  é:

$$f(k_0, \vec{k}) = \frac{b_1^2 + \frac{2}{d}(d+2)b_2^2 \vec{k}^2}{[k_0^2 - b_1^2 \vec{k}^2 - b_2^2 \vec{k}^4 - m^2]} + \frac{\frac{2}{d}(b_1^2 + 2b_2^2 \vec{k}^2)^2 \vec{k}^2}{[k_0^2 - b_1^2 \vec{k}^2 - b_2^2 \vec{k}^4 - m^2]^2} = \partial_i \partial_j g(k_0, \vec{k})$$

com  $g$  dada por:

$$g(k_0, \vec{k}) = -\frac{1}{2} \ln [k_0^2 - b_1^2 \vec{k}^2 - b_2^2 \vec{k}^4 - m^2]$$

Além disso, os resíduos em (3.38) e (3.39) juntamente com o primeiro termo de (3.40) acrescentam contribuições divergentes à lagrangiana que são proporcionais a  $F_{0i} F_{0i}$ . Tais divergências devem ser removidas por um contratermo proporcional a essa mesma combinação. Portanto, essa contratermo deve ser invariante de calibre também.

### 3.3. Divergências no Setor de Matéria

#### 3.3.1. Função de Green de 2-Pontos dos Campos de Matéria

Os vértices associados com a função de Green de 2 pontos dos campos de matéria são basicamente os mesmos da função dos campos de calibre, cujas expressões são dadas por (3.10) e (3.7), acrescidos dos vértices 4-lineares formados exclusivamente por campos de matéria, que são (3.8) e (3.9). Agora porém, os vértices que já haviam sido utilizados, bem como os novos vértices, irão formar novos gráficos. Em analogia com (3.26), temos:

$$G^{(2)} \longrightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \quad (3.42)$$

onde a bolha 1PI até a ordem de 1-loop é dada por:

$$\underbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}_{i\Xi} = \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}_{i\Xi_{4\lambda}} + \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}_{i\Xi_{4\xi}} + \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}_{i\Xi_4} + \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}_{i\Xi_{3,3}} + \dots \quad (3.43)$$

em que  $i\Xi_j(p)$  representa a contribuição para a bolha acima que vem de um vértice  $j$ -linear  $V_{jX}$  e, em analogia com (3.28), temos:

$$i\Xi = i\Gamma_{1\text{-loop}}^{(2)} \phi \phi^* \quad (3.44)$$

Então, podemos escrever:

$$\begin{aligned} i\Xi_{4\lambda}(p) &= i \int [dp'] [dk] [dk'] [\delta(p+p')] [\delta(k'+k+p+p')] \langle T V_{4\lambda}(k, k', p, p') \rangle \\ &= \lambda \int [dk] \frac{1}{\Omega_b[k^2]} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} i\Xi_{4\xi}(p) &= i \sum_{n=a,b,c} \int [dp'] [dk] [dk'] [\delta(p+p')] [\delta(k'+k+p+p')] \{ \langle T V_{4\xi_n}(k, k', p, p') \rangle \\ &\quad + \langle T V_{4\xi_n}(p, k', k, p') \rangle + \langle T V_{4\xi_n}(k, p', p, k') \rangle + \langle T V_{4\xi_n}(p, p', k, k') \rangle \} \\ &= (4\xi_a - \xi_c) \left\{ \int [dk] \frac{\vec{k}^2}{\Omega_b[k^2]} + \vec{p}^2 \int [dk] \frac{1}{\Omega_b[k^2]} \right\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

e

$$\begin{aligned}
i\Xi_4(p) &= i \sum_{X=A,B,C,D,E} \int [dp'] [dk] [dk'] [\delta(p+p')] [\delta(k'+k+p+p')] \langle T V_{4X}(k, k', p, p') \rangle \\
&= i^2 e^2 \phi(p) \phi^*(-p) \left\{ \int [dk] \frac{1}{\vec{k}^2} + (1-d) \left( b_1^2 + \frac{4}{d} b_2^2 \vec{p}^2 \right) \int [dk] \frac{1}{\Omega_a[k^2]} \right. \\
&\quad \left. + (1-d) b_2^2 \int [dk] \frac{\vec{k}^2}{\Omega_a[k^2]} \right\}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

O somatório que aparece em (3.46) reúne na definição desse diagrama a soma das contribuições oriundas dos cinco vértices (3.9), cujas constantes de acoplamento são  $\xi_n$ ,  $n = a, b, c$ . No desenvolvimento da expressão que aparece após a última igualdade em (3.46), foram omitidos termos proporcionais a  $\vec{k} \cdot \vec{p}$ , que contribuem com o integrando na forma de funções ímpares em  $\vec{k}$ , de modo que suas integrais se anulam.

O primeiro termo no somatório em (3.47) corresponde à contribuição do vértice  $V_{4A}$ , que é aquele que forma um loop com um propagador  $\langle A_0 A_0 \rangle$ . Os próximos termos correspondem, respectivamente, a  $V_{4B}$ ,  $V_{4C}$ ,  $V_{4D}$  e  $V_{4E}$ , de modo que seus loops são formados por propagadores  $\langle A_i A_j \rangle$ . Por essa razão, temos diferentes denominadores para os termos associados a cada pedaço.

Considerando agora os termos de interação 3-lineares, temos:

$$\begin{aligned}
i\Xi_{3,3}(p) &= \frac{i^2}{2} \sum_{X,Y} \int [dp'] [dk] [dk'] [dq] [dq'] [\delta(p+p')] [\delta(k'+q)] [\delta(p+k+k')] [\delta(p'+q+q')] \\
&\quad \times \langle T V_{3X}(k, p, k') V_{3Y}(q', q, p') \rangle
\end{aligned} \tag{3.48}$$

onde a soma deve ser realizada sobre todas as possíveis combinações de índices  $X, Y = A, B, C, D$  designando cada um dos vértices dados por (3.7). Devemos mencionar, porém, que as combinações  $(X, Y) = (A, B), (B, A), (A, C), (C, A), (A, D), (D, A)$  não irão contribuir uma vez que, nesses casos, os vértices correspondentes irão formar propa-

gadores  $\langle A_0 A_i \rangle$ , que são zero para o calibre com o qual estamos trabalhando. Portanto, substituindo as expressões (3.7) que definem os vértices 3-lineares em (3.48), podemos escrever:

$$i\Xi_{3,3}(p) = e^2 \phi(p) \phi^*(-p) \int [dk] \left\{ \frac{(k_0 + 2p_0)^2}{\vec{k}^2 \Omega_b[(k+p)^2]} + \frac{4b_1^4 p_i p_j \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right)}{\Omega_a[k^2] \Omega_b[(k+p)^2]} \right. \\ \left. + \frac{b_2^4 p_i p_j (\vec{k} + 2\vec{p})^4 \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right)}{\Omega_a[k^2] \Omega_b[(k+p)^2]} + \frac{4b_1^2 b_2^2 p_i p_j (\vec{k} + 2\vec{p})^2 \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right)}{\Omega_a[k^2] \Omega_b[(k+p)^2]} \right\} \quad (3.49)$$

### 3.3.2. Resíduo da Correção do Setor de Matéria

Seguiremos agora o mesmo procedimento de expansão em série de Taylor descrito anteriormente e o aplicaremos à função  $i\Xi$ . Assim como antes, cada coeficiente de Taylor é desenvolvido como uma combinação linear de integrais sobre os momentos dos loops em torno de um valor nulo dos momentos externos. Acontece, porém, que agora passam a aparecer integrandos com denominadores formados por diferentes fatores, cada um podendo vir de propagadores dos campos de calibre ou de matéria. Então, de modo geral, podemos ter integrandos proporcionais a  $1/(A^{z_a} B^{z_b})$ . O procedimento padrão para lidar com essa situação consiste em empregar o “truque” de Feynman<sup>2</sup>, segundo o qual:

$$\frac{1}{A^{z_a} B^{z_b}} = \frac{\Gamma(z_a + z_b)}{\Gamma(z_a) \Gamma(z_b)} \int_0^1 dx \frac{x^{z_a-1} (1-x)^{z_b-1}}{[xA + (1-x)B]^{z_a+z_b}} \quad (3.50)$$

Assim, após transformar as expressões que requerem esse procedimento, podemos calcular as integrais usando novamente (3.37) e depois tomar os resíduos correspondentes de modo a separar as partes divergentes proporcionais a  $1/\epsilon$  das respectivas partes finitas, que permanecem indeterminadas. Com isso, temos:

<sup>2</sup>Uma dedução da fórmula (3.50) é feita no Apêndice C

$$i\Xi(p) = i \frac{e^2}{16\pi^2 b_2} \phi(p) \phi^*(-p) \left[ \frac{1}{\epsilon} \left( -p_0^2 + Q_1 \vec{p}^2 + Q_2 \vec{p}^4 + Q_3 \right) + (\text{parte finita}) \right] \quad (3.51)$$

onde, de acordo com (3.43), temos  $i\Xi = i\Xi_{4\lambda} + i\Xi_{4\xi} + i\Xi_4 + i\Xi_{3,3}$  até 1-loop com  $i\Xi_{4\lambda}$ ,  $i\Xi_{4\xi}$ ,  $i\Xi_4$  e  $i\Xi_{3,3}$  dados, respectivamente, por (3.45), (3.46), (3.47) e (3.49).

As constantes  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  foram definidas com o intuito de tornar (3.51) mais limpa e compacta, sendo dadas por:

$$Q_1 = \frac{3}{8a_2^3 b_2^2 (a_2 + b_2)^2} \left\{ 2a_1^2 a_2 b_2^2 (11b_2^4 - 2b_2^2 b_3^2 - b_3^4) + a_1^2 b_2^3 (11b_2^4 - 2b_2^2 b_3^2 - b_3^4) \right. \\ \left. + a_2^3 b_1^2 (7b_2^4 + 6b_2^2 b_3^2 - b_3^4) + 2a_2^2 b_2 (6a_1^2 b_2^4 + b_1^2 (3b_2^4 + 2b_2^2 b_3^2 - b_3^4)) \right\} \\ + \frac{b_1^2 (4\xi_a - \xi_c)}{2b_2^2 e^2} \quad (3.52)$$

$$Q_2 = \frac{2}{8a_2 (a_2 + b_2)^3} \left\{ b_2^4 (23a_2^2 + 37a_2 b_2 + 16b_2^2) + 2b_2^2 (7a_2^2 + 9a_2 b_2 + 4b_2^2) b_3^2 \right. \\ \left. - a_2 (a_2 + 3b_2) b_3^4 \right\} \quad (3.53)$$

$$Q_3 = \frac{1}{8a_2^5 b_2^2} \left\{ 12a_1^2 a_2^2 b_1^2 b_2^3 - 9a_1^4 b_2^3 (b_2^2 + b_4^2) + a_2^5 b_1^4 \right\} \\ - \frac{m^2}{2} + \frac{b_1^2 \lambda}{2b_2^2 e^2} + \frac{(4b_2^2 m^2 - 3b_1^2) (4\xi_a - \xi_c)}{2b_2^4 e^2} \quad (3.54)$$

## 3.4. Divergências nas Correções aos Vértices de Interação

### 3.4.1. Funções de Green de 3-Pontos

Nesta seção iremos considerar correções originadas das funções de Green 1PI de 3 pontos até 1-loop. As funções de Green conexas de 3 pontos com pernas  $A_\mu$ ,  $\phi$  e  $\phi^*$

são dadas por:

$$G_\mu^{(3)} \longrightarrow \text{Diagram} = \text{Diagram} \quad (3.55)$$

com a bolha 1PI até a aproximação de 1-loop sendo dada por:

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} + \dots \quad (3.56)$$

onde  $i\Lambda_j^\mu(p)$  representa uma contribuição formada por um vértice  $j$ -linear  $V_{jX}$ . A bolha está relacionada à função 1PI de 3 pontos por:

$$i\Lambda^\mu = i\Gamma_{1\text{-loop}}^{(3)\mu} A_\mu \phi \phi^* \quad (\text{sem soma em } \mu) \quad (3.57)$$

Uma vez definidos os diagramas que contribuem para a função de 3 pontos definida acima, passamos a escrever suas respectivas expressões matemáticas, obtendo:

$$i\Lambda_5^\mu(p, p') = i \int [dp''] [dk] [dk'] [\delta(p + p' + p'')] [\delta(k + k')] \times \{ \langle T V_5(p'', k, k', p, -q) \rangle + \langle T V_5(k, k', p'', p, -q) \rangle \} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
i\Lambda_{5\xi}^\mu(p, p') &= i \int [dp''] [dk] [dk'] [\delta(p + p' + p'')] [\delta(k + k')] \\
&\times \{ \langle T V_{5\xi}(p'', k, k', p, -q) \rangle + \langle T V_{5\xi}(p'', p, k', k, -q) \rangle \\
&\quad + \langle T V_{5\xi}(p'', k, -q, p, k') \rangle + \langle T V_{5\xi}(p'', p, -q, k, k') \rangle \}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
i\Lambda_{4\lambda,3}^\mu(p, p') &= i^2 \sum_X \int [dp''] [dk] [dk'] [dq] [dq'] [\delta(p + p' + p'')] [\delta(k + q')] \\
&\times [\delta(p + k + k')] [\delta(p' + p'' + q + q')] \langle T V_{3X}(k', p, k) V_{4\lambda}(q, p'', q', p') \rangle
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
i\Lambda_{4\xi,3}^\mu(p, p') &= i^2 \sum_{n,X} \int [dp''] [dk] [dk'] [dq] [dq'] [\delta(p + p' + p'')] [\delta(k + q')] \\
&\times [\delta(p + k + k')] [\delta(p' + p'' + q + q')] \{ \langle T V_{3X}(k', p, k) V_{4\xi_n}(q, p'', q', p') \rangle \\
&\quad + \langle T V_{3X}(k', p, k) V_{4\xi_n}(q', p'', q, p') \rangle + \langle T V_{3X}(k', p, k) V_{4\xi_n}(q, p', q', p'') \rangle \\
&\quad + \langle T V_{3X}(k', p, k) V_{4\xi_n}(q', p', q, p'') \rangle \}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
i\Lambda_{4,3}^\mu(p, p') &= i^2 \sum_{X,Y} \int [dp''] [dk] [dk'] [dq] [dq'] [\delta(p + p' + p'')] [\delta(k + q')] \\
&\times [\delta(p' + k + k')] [\delta(p + p'' + q + q')] \langle T V_{3X}(k', k, p') V_{4Y}(p'', q, p, q') \rangle
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
i\Lambda_{3,4}^\mu(p, p') &= i^2 \sum_{X,Y} \int [dp''] [dk] [dk'] [dq] [dq'] [\delta(p + p' + p'')] [\delta(k + q')] \\
&\times [\delta(p + k + k')] [\delta(p' + p'' + q + q')] \langle T V_{3X}(k', p, k) V_{4Y}(q, p'', q', p') \rangle
\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
i\Lambda_{3,3,3}^\mu(p, p') &= \frac{i^3}{3!} \sum_{X,Y,Z} \int [dp''] [dk] [dk'] [dq] [dq'] [dl] [dl'] [\delta(p + p' + p'')] \\
&\times [\delta(l' + q)] [\delta(q' + k)] [\delta(p + k + k')] [\delta(p' + q + q')] [\delta(p'' + l + l')] \\
&\quad \times \langle T V_{3X}(k, p, k') V_{3Y}(q', q, p') V_{3Z}(p'', l, l') \rangle
\end{aligned} \tag{3.64}$$

onde as somas sobre os índices  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  devem ser efetuadas sobre  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$  para os vértices 4-lineares e  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  para os 3-lineares. A soma sobre  $n$  em (3.61) deve ser feita sobre  $n = a, b, c$ . para contemplar todos os vértices proporcionais a  $\xi_n$ .

Evidentemente, nem todos os vértices irão efetivamente contribuir e alguma economia pode ser feita se antes observarmos, por exemplo, quais dos campos  $A_\mu$  podem se contrair uns com os outros para formar propagadores. Além disso, os diagramas  $i\Lambda_{4\lambda,3}^\mu$  não dão nenhuma contribuição divergente pois todos os coeficientes de Taylor desses diagramas que não são finitos por contagem de potências, são funções ímpares nos momentos e acabam por se anular sob integração.

Vamos considerar primeiramente a função de 3 pontos com uma perna formada por um campo de calibre  $A_0$ . Isso corresponde a considerar os diagramas listados acima para o caso  $\mu = 0$ . Podemos notar inicialmente que  $i\Lambda_5^0$  se anula pois o vértice  $V_5$  contém uma única derivada que acaba por produzir um integrando proporcional a  $k_j$  que, mais uma vez, é uma função ímpar do momento de modo que sua integral é zero. Também não temos um diagrama  $i\Lambda_{5\xi}^0$  pois não há um vértice 5-linear como  $V_{5\xi}$  que tenha uma perna formada por um campo  $A_0$ . Realizando o cálculo dos diagramas  $i\Lambda_{4\lambda,3}^0$  e  $i\Lambda_{4\xi,3}^0$  constatamos que, embora por contagem de potências eles fossem originalmente candidatos a fornecer contribuições divergentes, diferentes partes infinitas que aparecem no cálculo desses diagramas se combinam cancelando umas às outras, de modo que eles acabam por não contribuir.

Assim, os primeiros diagramas relevantes para os nossos cálculos são  $i\Lambda_{4,3}^0$ ,  $i\Lambda_{4,3}^0$  e  $i\Lambda_{3,3,3}^0$ . Tais diagramas fornecem contribuições divergentes juntamente com as correções radiativas relevantes para o vértice  $V_{3A}$ , que é proporcional ao acoplamento  $e$ . Com isso, de acordo com o que será mostrado mais adiante, estes diagramas serão usados para fixar o contratermo associado ao acoplamento nu  $e_B$ .

Então, a partir de (3.62) e (3.63), temos:

$$i\Lambda_{4,3}^0(p, p') = e^3 \phi(p) \phi^*(-p') A_0(p' - p) p'_0 \int [dk] \frac{1}{(\vec{k} + \vec{p}')^2 \Omega_b[k^2]} \quad (3.65)$$

$$i\Lambda_{3,4}^0(p, p') = e^3 \phi(p) \phi^*(-p') A_0(p' - p) p_0 \int [dk] \frac{1}{(\vec{k} + \vec{p})^2 \Omega_b[k^2]} \quad (3.66)$$

onde apenas os vértices  $V_{4A}$  e  $V_{3A}$  podem contribuir.

Além disso, a partir de (3.64), podemos escrever:

$$\begin{aligned} i\Lambda_{3,3,3}^0(p, p') &= -e^3 \phi(p) \phi^*(-p') A_0(p' - p) \int [dk] (p_0 + p'_0 + 2k_0) \\ &\times \left\{ \frac{(k_0 + 2p_0)(k_0 + 2p'_0)}{\vec{k}^2 \Omega_b[(k+p)^2] \Omega_b[(k+p')^2]} + \frac{4b_1^4 p_i p'_j \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right)}{\Omega_a[k^2] \Omega_b[(k+p)^2] \Omega_b[(k+p')^2]} \right. \\ &\quad + \frac{b_2^4 p_i p'_j (\vec{k} + 2\vec{p})^2 (\vec{k} + 2\vec{p}')^2 \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right)}{\Omega_a[k^2] \Omega_b[(k+p)^2] \Omega_b[(k+p')^2]} \\ &\quad \left. + \frac{2b_1^2 b_2^2 p_i p'_j (\vec{k} + 2\vec{p}')^2 \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right)}{\Omega_a[k^2] \Omega_b[(k+p)^2] \Omega_b[(k+p')^2]} + \frac{2b_1^2 b_2^2 p_i p'_j (\vec{k} + 2\vec{p})^2 \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right)}{\Omega_a[k^2] \Omega_b[(k+p)^2] \Omega_b[(k+p')^2]} \right\} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Depois de fazer  $\mu = 0$ , devemos lidar com o caso  $\mu = i$ , ou seja, devemos calcular a função de 3 pontos que contém uma perna formada por um campo  $A_i$ . Para esse caso os vértices 5-lineares  $V_5$  e  $V_{5\xi}$  fornecem contribuições divergentes e encontramos:

$$i\Lambda_5^i(p, p') = e^3 b_2^2 \phi(p) \phi^*(-p') A_i(p' - p) (p_i + p'_i) \int [dk] \frac{\frac{1}{d}(d-1)(d+2)}{\Omega_a[k^2]} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} i\Lambda_{5\xi}^i(p, p') &= 2e \phi(p) \phi^*(-p') A_i(p' - p) \{ p_i (2\xi_a + 2\xi_b - \xi_c) \\ &\quad + p'_i (2\xi_a + 2\xi_b - \xi_c) \} \int [dk] \frac{1}{\Omega_b[k^2]} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Enquanto a parte divergente do diagrama  $i\Lambda_{4\lambda,3}^i$  resulta zero, o mesmo diagrama, porém formado com os vértices 4-lineares proporcionais a  $\xi_n$ ,  $n = a, b, c.$ , isto é,  $i\Lambda_{4\xi,3}^i$ , irá contribuir e sua expressão integral é dada por:

$$\begin{aligned}
i\Lambda_{4\xi,3}^i(p,p') &= e\phi(p)\phi^*(-p')A_i(p'-p) \int [dk] \frac{1}{\Omega_b[(k+p)^2]\Omega_b[(k+p')^2]} \\
&\times \left\{ b_1^2(p_i+p'_i+2k_i)[(4\xi_a-\xi_c)(\vec{k}^2+\vec{p}^2+\vec{p}'^2)+\xi_b\vec{p}'^2 \right. \\
&\quad + 2(7\xi_b-2\xi_c)\vec{p}'\cdot\vec{p}+2(2\xi_a+2\xi_b-\xi_c)\vec{k}\cdot\vec{p}+2(2\xi_a+2\xi_b-\xi_c)\vec{k}\cdot\vec{p}' \\
&\quad + b_2^2[(2\vec{k}^2+\vec{p}^2+3\vec{k}\cdot\vec{p}+\vec{k}\cdot\vec{p}+\vec{p}'\cdot\vec{p})(k_i+p_i) \\
&\quad \quad \quad \left. + (2\vec{k}^2+\vec{p}'^2+3\vec{k}\cdot\vec{p}+\vec{k}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot\vec{p}')(k_i+p'_i)] \right. \\
&\quad \times \left[ -\xi_c(\vec{k}+\vec{p}+\vec{p}')^2+16e^3b_2^6\xi_a^2\xi_b^2(\vec{k}^2+\vec{p}^2+\vec{p}'^2+2\vec{k}\cdot\vec{p}) \right. \\
&\quad \quad \times (\vec{k}^2+\vec{p}^2+\vec{p}'^2+2\vec{k}\cdot\vec{p})(\vec{k}\cdot\vec{p}+\vec{p}'\cdot\vec{p})(\vec{p}'^2+4\vec{k}\cdot\vec{p}+3\vec{p}'\cdot\vec{p}) \\
&\quad \quad \times [(2\vec{k}^2+\vec{p}^2+3\vec{k}\cdot\vec{p}+\vec{k}\cdot\vec{p}+\vec{p}'\cdot\vec{p})(k_i+p_i) \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + (2\vec{k}^2+\vec{p}'^2+3\vec{k}\cdot\vec{p}+\vec{k}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot\vec{p}')(k_i+p'_i)]^3 \right] \right. \\
&\quad + b_3^2(k_i(\vec{p}-\vec{p}')^2+p_i(\vec{p}'-\vec{k}\cdot\vec{p}+\vec{k}\cdot\vec{p}'-\vec{p}'\cdot\vec{p})) \\
&\quad + p'_i(\vec{p}-\vec{k}\cdot\vec{p}+\vec{k}\cdot\vec{p}-\vec{p}\cdot\vec{p}')[(4\xi_a-\xi_c)(\vec{k}^2+\vec{p}^2+\vec{p}'^2)+\xi_b\vec{p}'^2 \\
&\quad \left. + 2(7\xi_b-2\xi_c)\vec{p}'\cdot\vec{p}+2(2\xi_a+2\xi_b-\xi_c)\vec{k}\cdot\vec{p}+2(2\xi_a+2\xi_b-\xi_c)\vec{k}\cdot\vec{p}'] \right\} \tag{3.70}
\end{aligned}$$

Esta é uma expressão consideravelmente grande e difícil de se lidar, o que decorre do fato de que o diagrama  $i\Lambda_{4\xi,3}^i$  é formado pela soma de todas as possíveis combinações de um vértice 4-linear  $V_{4\xi_n}$  com um vértice 3-linear  $V_{3X}$ . Como podemos ter  $n = a, b, c$  e  $X = B, C, D$ , ou seja, 3 vértices 4-lineares podendo se combinar com 3 vértices 3-lineares, vemos que o diagrama acima é na verdade formado por 9 subpartes. É fato que outros diagramas construídos ao longo deste trabalho chegam a receber contribuição de números de partes ainda maiores. No entanto, os demais casos acabaram se mostrando mais simples de serem simplificados a ponto de suas expressões poderem ser escritas de maneira mais organizada e compacta.

Os demais diagramas que contribuem para a função de 3 pontos com uma perna

formada por um campo  $A_i$ , por sua vez, são dados por:

$$\begin{aligned}
i\Lambda_{4,3}^i(p, p') &= e^3 \phi(p) \phi^*(-p') A_i(p' - p) \int [dk] \frac{p'_l \left( \delta_{lj} - \frac{k_l k_j}{k^2} \right)}{\Omega_a[k^2] \Omega_b[(k+p')^2]} \\
&\times \left\{ \left( 2b_1^4 + 2b_1^2 b_2^2 (\vec{k} + 2\vec{p}')^2 + 2b_1^2 b_3^2 \vec{k}^2 \right) \delta_{ij} \right. \\
&\quad + \left( 2b_1^2 b_2^2 + b_2^4 (\vec{k} + 2\vec{p}')^2 + b_2^2 b_3^2 \vec{k}^2 \right) \left[ 4k_i p'_j + 3p_i p_j + p_i p'_j + p'_j p_i + 3p'_i p'_j \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + \delta_{ij} (\vec{k}^2 + \vec{p}'^2 + \vec{p}'^2 + 4\vec{k} \cdot \vec{p}' + 2\vec{p}' \cdot \vec{p}') \right] \right. \\
&\quad + \left( 2b_1^2 b_3^2 + b_2^2 b_3^2 (\vec{k} + 2\vec{p}')^2 + b_3^4 \vec{k}^2 \right) \left[ (p'_j - p_j) (p_i - p'_i - 2k_i) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + \delta_{ij} (\vec{k}^2 + \vec{p}'^2 + \vec{p}'^2 - 2\vec{k} \cdot \vec{p}' + 2\vec{k} \cdot \vec{p}' - 2\vec{p}' \cdot \vec{p}') \right] \right\} \quad (3.71)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
i\Lambda_{3,4}^i(p, p') &= e^3 \phi(p) \phi^*(-p') A_i(p' - p) \int [dk] \frac{(-p_l) \left( \delta_{lj} - \frac{k_l k_j}{k^2} \right)}{\Omega_a[k^2] \Omega_b[(k+p)^2]} \\
&\times \left\{ \left( 2b_1^4 + 2b_1^2 b_2^2 (\vec{k} + 2\vec{p})^2 + 2b_1^2 b_3^2 \vec{k}^2 \right) \delta_{ij} \right. \\
&\quad + \left( 2b_1^2 b_2^2 + b_2^4 (\vec{k} + 2\vec{p})^2 + b_2^2 b_3^2 \vec{k}^2 \right) \left[ 4k_i p_j + 3p_i p_j + p_i p'_j + p'_j p_i + 3p'_i p'_j \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + \delta_{ij} (\vec{k}^2 + \vec{p}^2 + \vec{p}'^2 + 4\vec{k} \cdot \vec{p}' + 2\vec{p}' \cdot \vec{p}') \right] \right. \\
&\quad + \left( 2b_1^2 b_3^2 + b_2^2 b_3^2 (\vec{k} + 2\vec{p})^2 + b_3^4 \vec{k}^2 \right) \left[ (p'_j - p_j) (p_i - p'_i + 2k_i) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + \delta_{ij} (\vec{k}^2 + \vec{p}^2 + \vec{p}'^2 + 2\vec{k} \cdot \vec{p}' - 2\vec{k} \cdot \vec{p}' - 2\vec{p}' \cdot \vec{p}') \right] \right\} \quad (3.72)
\end{aligned}$$

ambos resultando da combinação de vértices  $V_3$  e  $V_4$  e também:

$$\begin{aligned}
i\Lambda_{3,3,3}^i(p, p') &= e^3 \phi(p) \phi^*(-p') A_i(p' - p) \left\{ \int [dk] \frac{(k_0 + 2p_0)(k_0 + 2p'_0)}{\vec{k}^2 \Omega_b[(k+p)^2] \Omega_b[(k+p')^2]} \left[ b_1^2 [2k_i + p_i + p'_i] \right. \right. \\
&+ b_2^2 [(k_i + p_i)(2\vec{k}^2 + \vec{p}^2 + 3\vec{k} \cdot \vec{p} + \vec{k} \cdot \vec{p}' + \vec{p}' \cdot \vec{p}) + (k_i + p'_i)(2\vec{k}^2 + \vec{p}'^2 + 3\vec{k} \cdot \vec{p}' + \vec{k} \cdot \vec{p} + \vec{p}' \cdot \vec{p})] \\
&+ b_3^2 [(k_i + p_i)(\vec{p}'^2 - \vec{k} \cdot \vec{p} + \vec{k} \cdot \vec{p}' - \vec{p}' \cdot \vec{p}) + (k_i + p'_i)(\vec{p}^2 - \vec{k} \cdot \vec{p}' + \vec{k} \cdot \vec{p} - \vec{p}' \cdot \vec{p})] \left. \right] \\
&+ \int [dk] \frac{p_i p'_j \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right)}{\Omega_a[k^2] \Omega_b[(k+p)^2] \Omega_b[(k+p')^2]} \left[ (k_i + p_i)(2\vec{k}^2 + \vec{p}^2 + 3\vec{k} \cdot \vec{p} + \vec{k} \cdot \vec{p}' + \vec{p}' \cdot \vec{p}) \right. \\
&\quad \left. + (k_i + p'_i)(2\vec{k}^2 + \vec{p}'^2 + 3\vec{k} \cdot \vec{p}' + \vec{k} \cdot \vec{p} + \vec{p}' \cdot \vec{p}) \right] \\
&\times \left[ b_2^6 (\vec{k} + 2\vec{p})^2 (\vec{k} + 2\vec{p}')^2 + b_2^4 b_3^2 \vec{k}^2 \left( (\vec{k} + 2\vec{p})^2 + (\vec{k} + 2\vec{p}')^2 \right) + b_2^2 b_3^4 \vec{k}^4 \right] \left. \right\} \quad (3.73)
\end{aligned}$$

cujas partes são formadas por 3 vértices do tipo  $V_3$ .

### 3.4.2. Resíduos das Funções de 3-Pontos

Seguindo o mesmo procedimento de expansão em série de Taylor apresentado anteriormente, agora para determinar os resíduos da função de 3 pontos  $\Gamma^{(3)0}$ , encontramos:

$$i\Lambda^0(p, p') = i \frac{e^3}{16\pi^2 b_2} \phi(p) \phi^*(-p') A_0(p' - p) \left[ -\frac{1}{\epsilon} (p_0 + p'_0) + (\text{parte finita}) \right] \quad (3.74)$$

onde, de acordo com (3.56), temos  $i\Lambda^0 = i\Lambda_{4,3}^0 + i\Lambda_{3,4}^0 + i\Lambda_{3,3,3}^0$  até 1-loop com  $i\Lambda_{4,3}^0$ ,  $i\Lambda_{3,4}^0$  e  $i\Lambda_{3,3,3}^0$  dados, respectivamente, por (3.65), (3.66) e (3.67).

Para os resíduos de  $\Gamma^{(3)i}$ , por sua vez, temos:

$$\begin{aligned}
i\Lambda^i(p, p') = & i \frac{e^3}{16\pi^2 b_2} \phi(p) \phi^*(-p') A_i(p' - p) \times \left[ \frac{1}{\epsilon} \left( K_1(p_i + p'_i) \right. \right. \\
& + K_2 \left[ p_i(\vec{p}^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}') + p'_i(\vec{p}'^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}') \right] + K_3 \left[ p_i(\vec{p}'^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}') + p'_i(\vec{p}^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}') \right] \left. \right) \\
& \left. + (\text{parte finita}) \right] \quad (3.75)
\end{aligned}$$

onde, de acordo com (3.56), temos  $i\Lambda^i = i\Lambda_5^i + i\Lambda_{5\xi}^i + i\Lambda_{4,3}^i + i\Lambda_{3,4}^i + i\Lambda_{3,3,3}^i$  até 1-loop com  $i\Lambda_5^i$ ,  $i\Lambda_{5\xi}^i$ ,  $i\Lambda_{4,3}^i$ ,  $i\Lambda_{3,4}^i$  e  $i\Lambda_{3,3,3}^i$  dados, respectivamente, por (3.68), (3.69), (3.71), (3.72) and (3.73). Sendo que as constantes  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  foram definidas para deixar a expressão acima mais limpa e compacta, sendo dadas por:

$$\begin{aligned}
K_1 = & \frac{3}{8a_2^3 b_2^2 (a_2 + b_2)^2} \left\{ 2a_1^2 a_2 b_2^2 (11b_2^4 - 2b_2^2 b_3^2 - b_3^4) + a_1^2 b_2^3 (11b_2^4 - 2b_2^2 b_3^2 - b_3^4) \right. \\
& \left. + a_2^3 b_1^2 (7b_2^4 + 6b_2^2 b_3^2 - b_3^4) + 2a_2^2 b_2 (6a_1^2 b_2^4 + b_1^2 (3b_2^4 + 2b_2^2 b_3^2 - b_3^4)) \right\} \quad (3.76) \\
& + \frac{b_1^2 (4\xi_a - \xi_c)}{2b_2^2 e^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2 = & \frac{2}{8a_2 (a_2 + b_2)^3} \left\{ b_2^4 (23a_2^2 + 37a_2 b_2 + 16b_2^2) + 2b_2^2 (7a_2^2 + 9a_2 b_2 + 4b_2^2) b_3^2 \right. \\
& \left. - a_2 (a_2 + 3b_2) b_3^4 \right\} \quad (3.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_3 = & \frac{1}{12a_2 (a_2 + b_2)^3} \left\{ 3a_2^4 b_2^2 + 9a_2^3 b_2^3 + 25a_2^2 b_2^4 + 41a_2 b_2^5 + 20b_2^6 - 3a_2^4 b_3^2 - 9a_2^3 b_2 b_3^2 \right. \\
& \left. + 31a_2^2 b_2^2 b_3^2 + 81a_2 b_2^3 b_3^2 + 40b_2^4 b_3^2 + 16a_2^2 b_3^4 + 30a_2 b_2 b_3^4 + 12b_2^2 b_3^4 \right\} \\
& + \frac{(3b_3^2 - 7b_2^2) (4\xi_b - \xi_c)}{12b_3^2 e^2} \quad (3.78)
\end{aligned}$$

Observando cuidadosamente (3.76) e (3.77) e comparando essas expressões com

(3.52) e (3.53), notamos que  $K_1 = Q_1$  e  $K_2 = Q_2$ . Como veremos no próximo capítulo, esse fato está de acordo com requisitos que o procedimento de renormalização irá impor na definição de certos contratermos. Ainda assim, devemos ressaltar que tais constantes foram obtidas de maneira independente por meio dos cálculos das funções de 2 e depois de 3 pontos.

### 3.5. Identidades de Ward

Uma possível maneira de validar os resultados obtidos ao longo deste capítulo corresponde a verificar se as funções 1PI que podem ser construídas com as correções calculadas, ainda que formadas por expressões divergentes, satisfazem ou não as identidades de Ward. Essas identidades, ao relacionarem as funções de 2 e de 3 pontos obtidas nas seções anteriores, são dadas por:

$$p_\mu \Gamma^{(2)\mu\nu} = 0 \quad \text{e} \quad (p'_\mu - p_\mu) \Gamma^{(3)\mu} = e [\Gamma^{(2)}(p') - \Gamma^{(2)}(p)] \quad (3.79)$$

Por outro lado, as funções de Green 1PI não renormalizadas são formadas com a parte de árvore somada à contribuições (ainda que divergentes) de 1-loop. A parte de árvore corresponde simplesmente aos coeficientes no espaço dos momentos dos termos da lagrangiana clássica. Já a parte de 1-loop é obtida das correções radiativas cujas partes infinitas foram calculadas nas seções acima. Assim, definindo  $\alpha \equiv e^2/(16\pi^2 b_2)$ , podemos sumarizar os resultados obtidos até agora como:

$$\Gamma^{(2)00} = \left(1 + \frac{\alpha}{4\epsilon}\right) \vec{p}^2 + \frac{\alpha}{4}(\text{parte finita}) \quad (3.80)$$

$$\Gamma^{(2)0i} = \Gamma^{(2)i0} = - \left(1 + \frac{\alpha}{4\epsilon}\right) p_0 p_i + \frac{\alpha}{4}(\text{parte finita}) \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)ij} = & \left(1 + \frac{\alpha}{4\epsilon}\right) \delta_{ij} p_0^2 - \left(a_1^2 - \frac{\alpha}{4\epsilon} R\right) (\delta_{ij} \vec{p}^2 - p_i p_j) \\ & - \left(a_2^2 - \frac{\alpha}{4\epsilon} S\right) (\delta_{ij} \vec{p}^2 - p_i p_j) \vec{p}^2 + \frac{\alpha}{4} (\text{parte finita})\end{aligned}\quad (3.82)$$

que são coeficientes de termos da expansão da ação efetiva não renormalizada proporcionais a dois campos de calibre  $A_\mu$ ,

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)} = & \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}\right) p_0^2 - \left(b_1^2 - \frac{\alpha}{\epsilon} Q_1\right) \vec{p}^2 - \left(b_2^2 - \frac{\alpha}{\epsilon} Q_2\right) \vec{p}^4 \\ & - \left(m^2 - \frac{\alpha}{\epsilon} Q_3\right) + \alpha (\text{parte finita})\end{aligned}\quad (3.83)$$

que é o coeficiente correspondente  $\phi\phi^*$ , e:

$$\Gamma^{(3)0} = e \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}\right) (p_0 + p'_0) + e\alpha (\text{parte finita})\quad (3.84)$$

e

$$\begin{aligned}\Gamma^{(3)i} = & -e \left(b_1^2 - \frac{\alpha}{\epsilon} K_1\right) (p_i + p'_i) \\ & - e \left(b_2^2 - \frac{\alpha}{\epsilon} K_2\right) \left[ p_i (\vec{p}^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}') + p'_i (\vec{p}'^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}') \right] \\ & - e \left(b_3^2 - \frac{\alpha}{\epsilon} K_3\right) \left[ p_i (\vec{p}'^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}') + p'_i (\vec{p}^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}') \right] \\ & + e\alpha (\text{parte finita})\end{aligned}\quad (3.85)$$

que são, respectivamente, os coeficientes de  $A_0\phi\phi^*$  e  $A_i\phi\phi^*$ .

As constantes  $Q_1 = K_1$ ,  $Q_2 = K_2$ ,  $Q_3$  e  $K_3$  foram definidas nas seções anteriores e suas expressões podem ser lidas em (3.52)–(3.54) e (3.76)–(3.78).

É fácil constatar que, de fato, as funções exibidas acima realmente satisfazem as identidades (3.79). As funções  $\Gamma^{(2)\mu\nu}$ , por exemplo, devem satisfazer à primeira das duas identidades. A estrutura  $(\delta_{ij}\vec{p}^2 - p_i p_j)$  se anula quando contraída com  $p_i$  e todos os elementos que sobram, uma vez contraídos com a componente certa do momento  $p_\mu$ , acabam por se cancelar.

A verificação da identidade seguinte requer um pouco mais de trabalho algébrico, mas

pode ser realizada de maneira direta e nos leva a ver que ela também é satisfeita. Além disso, as partes finitas devem acompanhar os demais termos e satisfazer as identidades de Ward uma vez que esperamos que as simetrias respeitadas pela teoria também sejam respeitadas por essas partes.

Devemos observar, porém, que as identidades de Ward, embora se verifiquem, não oferecem uma validação completa dos resultados até então obtidos. Em particular, a parte da função  $\Gamma^{(3)i}$  proporcional à combinação  $\left[ p_i(\vec{p}'^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}') + p'_i(\vec{p}^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}') \right]$  se anula independentemente quando contraída com  $(p'_i - p_i)$ . Por isso, um possível erro nos cálculos, que se refletiria em uma expressão incorreta para  $K_3$ , não poderia ser detectado por esse método. Para verificar essa parte apropriadamente, seria preciso ter calculado funções de 4 pontos e depois construir as identidades de Ward que relacionassem essas funções com as de 3 pontos já obtidas.



## 4. Estudo do Grupo de Renormalização

No Capítulo 3, algumas das contribuições divergentes à ação efetiva foram determinadas. Agora, continuamos nosso trabalho com o intuito de determinar os contratermos que cancelam essas divergências no esquema de subtração mínima. Em seguida, iremos construir as equações do grupo de renormalização para tentar estudar a evolução das constantes de acoplamento  $e$ ,  $\lambda$ ,  $g$  e  $\xi_n$ ,  $n = a, b, c$ , bem como dos pesos anisotrópicos  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  e  $b_4$  para a região de baixas escalas de energia.

### 4.1. Contratermos

A lagrangiana renormalizada pode ser entendida como uma lagrangiana com forma funcional idêntica à soma de (3.4) e (3.5), porém com todos os campos e constantes substituídos por quantidades nuas, que são formadas por partes finitas ou *renormalizadas* somada a contribuições divergentes, os *contratermos*. As quantidades nuas serão rotuladas com um índice “B” (do inglês: “*Bare*”). Os campos nus se relacionam com os campos renormalizados como:

$$A_{Bi} = Z_A^{1/2} A_i, \quad A_{B0} = Z_{A_0}^{1/2} A_0 \quad \text{e} \quad \phi_B = Z_\phi^{1/2} \phi \quad (4.1)$$

e as constantes nuas, por sua vez, são dadas por:

$$\begin{aligned}
a_{1B}^2 &= a_1^2 + \delta_{a_1^2}, & a_{2B}^2 &= a_2^2 + \delta_{a_2^2}, & b_{1B}^2 &= b_1^2 + \delta_{b_1^2}, & b_{2B}^2 &= b_2^2 + \delta_{b_2^2}, \\
b_{3B}^2 &= b_3^2 + \delta_{b_3^2}, & b_{4B}^2 &= b_4^2 + \delta_{b_4^2}, & \lambda_B &= \lambda + \delta_\lambda, & g_B &= g + \delta_g, \\
\xi_{nB} &= \xi_n + \delta_{\xi_n} \quad (n = a, b, c.), \\
m_B^2 &= m^2 + \delta_{m^2}, & e_B &= e + \delta_e & \text{e} & \eta_B &= \eta + \delta_\eta
\end{aligned} \tag{4.2}$$

A partir daí, o procedimento usual consiste em separar as constantes  $Z$  em  $Z = 1 + \delta$  e então considerar apenas termos de primeira ordem nas potências dos  $\delta$ 's. Depois disso, a lagrangiana escrita em função das quantidades nuas pode ser separada como  $\mathcal{L}_R = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{ct}$ , onde  $\mathcal{L}$  tem forma funcional idêntica à soma de (3.4) e (3.5) e  $\mathcal{L}_{ct}$  é a parte que carrega os contratermos  $\delta$  a qual chamamos *lagrangiana dos contratermos*. Além disso, por uma questão de conveniência futura, passaremos a representar nossas lagrangianas no espaço dos momentos. Por fim, vamos organizar a lagrangiana dos contratermos como  $\mathcal{L}_{ct} = \mathcal{L}_{ct}^{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{ct}^{\text{matter}} + \mathcal{L}_{ct}^{\text{int}}$ .

Em primeiro lugar, olharemos para o setor de calibre. Fazendo  $Z_A = 1 + \delta_{Z_A}$  e  $Z_{A_0} = 1 + \delta_{Z_{A_0}}$  e depois usando (4.2), temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{ct}^{\text{Maxwell}} &= \frac{1}{2} \left\{ \delta_{Z_{A_0}} \vec{p}^2 A_0(p) A_0(-p) - \left( \frac{\delta_{Z_{A_0}} + \delta_{Z_a}}{2} \right) p_0 p_j A_0(p) A_j(-p) \right. \\
&\quad - \left( \frac{\delta_{Z_{A_0}} + \delta_{Z_a}}{2} \right) p_i p_0 A_i(p) A_0(-p) + [\delta_{Z_A} \delta_{ij} p_0^2 - (\delta_{a_1^2} + a_1^2 \delta_{Z_A}) (\delta_{ij} \vec{p}^2 - p_i p_j) \\
&\quad \left. - (\delta_{a_2^2} + a_2^2 \delta_{Z_A}) (\delta_{ij} \vec{p}^2 - p_i p_j) \vec{p}^2 + (\delta_\eta + \eta \delta_{Z_A}) p_i p_j \right] A_i(p) A_j(-p) \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Os contratermos podem ser interpretados como novos termos de interação os quais, para o ajuste correto das constantes  $\delta$ , podem cancelar as divergências que surgem das correções radiativas. Essas divergências aparecem nas funções de Green 1PI calculadas ao longo do Capítulo 3, bem como em outras funções 1PI que não chegamos a construir, como é o caso, por exemplo, da função de 4 pontos com duas pernas de campos de

calibre e duas pernas de campos de matéria ou da função de 4 pontos com 4 pernas de campos de matéria. Embora o cálculo das partes divergentes envolvesse integrais cujas soluções exatas eram, em geral desconhecidas, sob a perspectiva de analisar a restauração da simetria de Lorentz em um cenário de baixas energias, efetuamos expansões em séries de Taylor ao redor de  $p = 0$ , o que nos levou a imensas, porém relativamente mais simples, expressões para cada coeficiente de Taylor. Ainda assim, não era possível resolver exatamente as integrais contidas em cada coeficiente e, por isso, empregamos o método descrito no Apêndice C para extrair delas apenas sua parte divergente, isto é, a parte proporcional a um fator  $1/\epsilon = 1/(4 - d)$ , que no esquema de regularização dimensional tende a infinito quando se toma  $d = 4$ , ou seja, no limite em que  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ocorre, porém, que essas partes divergentes são justamente aquelas que serão canceladas pelos contratermos, em cuja definição reside o objetivo do procedimento de renormalização. Então, para o setor de calibre, por exemplo, notamos que as funções (3.38)–(3.40) carregam contribuições divergentes juntamente com partes finitas que correspondem a correções quânticas da ordem de 1-loop à ação efetiva da teoria. De fato, até a ordem de 1-loop, podemos escrever a ação efetiva seguindo a receita proposta em (2.15) e passar ao espaço dos momentos para obter:

$$\Gamma[\phi, \phi^*, A] = \int [dp] \left\{ \mathcal{L}_R + \Pi + \Xi + \int [dp'] \Lambda + \dots \right\} \quad (4.4)$$

onde  $\Pi$  representa  $\Pi^{00} + \Pi^{0i} + \Pi^{i0} + \Pi^{ij}$ , enquanto  $\Lambda$  representa  $\Lambda^0 + \Lambda^i$ .

No esquema de subtração mínima, as divergências oriundas dos  $\Pi$ 's devem ser precisamente canceladas pelos contratermos. Então, por meio da comparação direta entre (3.38)–(3.40) e (4.3), descobrimos que:

$$\delta_{Z_A} = \delta_{Z_{A_0}} = -\frac{\alpha}{4\epsilon}, \quad \delta_{a_1^2} = \frac{\alpha}{4\epsilon} (R + a_1^2), \quad \delta_{a_2^2} = \frac{\alpha}{4\epsilon} (S + a_2^2) \quad \text{e} \quad \delta_\eta = \frac{\alpha}{4\epsilon} \eta \quad (4.5)$$

lembrando que, conforme definido na página 85,  $\alpha \equiv e^2/(16\pi^2 b_2)$ .

Para o setor de matéria, fazemos  $Z_\phi = 1 + \delta_{Z_\phi}$  e os contratermos correspondentes são:

$$\mathcal{L}_{\text{ct}}^{\text{matter}} = \phi(p)\phi^*(-p) \left[ \delta_{Z_\phi} p_0^2 - (\delta_{b_1^2} + b_1^2 \delta_{Z_\phi}) \vec{p}^2 - (\delta_{b_2^2} + b_2^2 \delta_{Z_\phi}) \vec{p}^4 - (\delta_{m^2} + m^2 \delta_{Z_\phi}) \right] \quad (4.6)$$

de modo que, por comparação com (3.51), temos:

$$\delta_{Z_\phi} = \frac{\alpha}{\epsilon}, \quad \delta_{b_1^2} = \frac{\alpha}{\epsilon} (Q_1 - b_1^2), \quad \delta_{b_2^2} = \frac{\alpha}{\epsilon} (Q_2 - b_2^2), \quad \delta_{m^2} = \frac{\alpha}{\epsilon} (Q_3 - m^2) \quad (4.7)$$

Vamos agora determinar a renormalização da contante  $e$ . Ela deve ser ajustada para cancelar a contribuição divergente associada à função de 3 pontos  $\Gamma^{(3)0}$ . Procedendo exatamente da mesma maneira descrita acima, faremos:

$$e_B = e + \delta_e \quad (4.8)$$

Os contratermos correspondentes aos vértices de interação 3-lineares, por sua vez, são dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ct}}^{\text{int}} = & \int [dp'] A_0(p' - p) \phi(p) \phi^*(-p') \left( \delta_e + e \frac{\delta_{Z_{A_0}}}{2} + e \delta_{Z_\phi} \right) (p_0 + p'_0) \\ & + \int [dp'] A_i(p' - p) \phi(p) \phi^*(-p') \left\{ - \left( \delta_e b_1^2 + e \delta_{b_1^2} + e b_1^2 \delta_{Z_\phi} + e b_1^2 \frac{\delta_{Z_A}}{2} \right) (p_i + p'_i) \right. \\ & - \left( \delta_e b_2^2 + e \delta_{b_2^2} + e b_2^2 \delta_{Z_\phi} + e b_2^2 \frac{\delta_{Z_A}}{2} \right) [p_i(\vec{p}^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}') + p'_i(\vec{p}'^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}')] \\ & \left. - \left( \delta_e b_3^2 + e \delta_{b_3^2} + e b_3^2 \delta_{Z_\phi} + e b_3^2 \frac{\delta_{Z_A}}{2} \right) [p_i(\vec{p}'^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}') + p'_i(\vec{p}^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}')] \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Observando que a contribuição que vem da função de 3 pontos dada por (3.74) deve

ser adicionada à ação efetiva como  $\Lambda$  de acordo com (4.4) e exigindo que o contratermo correspondente cancele precisamente essa contribuição, temos:

$$\delta_e = \frac{\alpha}{8\epsilon} e \quad (4.10)$$

Além disso, o contratermo associado à constante  $b_3^2$  também pode ser determinado, resultando em:

$$\delta_{b_3^2} = \frac{\alpha}{\epsilon} (K_3 - b_3^2) \quad (4.11)$$

Entretanto, com os cálculos até então realizados, não se pode ainda determinar todos os contratermos. Por exemplo, para determinar o contratermo de  $b_4^2$ ,  $\lambda$  e dos  $\xi_n$ 's seria preciso calcular as partes infinitas das funções de 4 pontos. A determinação do contratermo de  $g$ , por sua vez, deve requerer o cálculo de uma função de 6 pontos. Outro ponto a ser observado aqui é que, ainda que não tivéssemos constatado diretamente por meio do cálculo que  $K_1 = Q_1$  e  $K_2 = Q_2$ , essa exigência decorre de comparar as expressões para  $\delta_{b_1^2}$  e  $\delta_{b_2^2}$  obtidas em (4.7) com aquelas que podem ser obtidas da comparação entre as divergências da função  $\Gamma^{(3)i}$  e os termos correspondentes em (4.9). Assim, desse ponto em diante iremos eliminar as constantes  $K_1$  e  $K_2$ , reescrevendo elas como  $Q_1$  e  $Q_2$ , respectivamente.

## 4.2. Equações do Grupo de Renormalização

Nessa seção iremos seguir o procedimento descrito na Seção 2.3 para construir as equações do grupo de renormalização para a teoria descrita pela lagrangiana clássica (3.2). Para tal fim, nossa primeira tarefa consiste em determinar a relação entre as versões nua e renormalizada das funções de Green 1PI de  $N$  pontos. Essas funções, quando renormalizadas, são os coeficientes da expansão da ação efetiva, que pode ser

escrita esquematicamente como:

$$\Gamma[\phi, \phi^*, A] = \sum \int dx_1 \dots dx_N \frac{1}{[(N_\phi/2)!]^2 N_A!} \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) (\phi\phi^*)^{N_\phi/2} A^{N_A} \quad (4.12)$$

onde  $N_\phi$  representa o número total de campos  $\phi$  e  $\phi^*$ , enquanto  $N_A$  é o número total de campos de calibre  $A_0$  e  $A_i$ , de modo que  $N_\phi + N_A = N$ . Não é necessário distinguir  $A_0$  de  $A_i$  aqui pois, de acordo com os argumentos que apresentamos anteriormente, a simetria de calibre deve ser preservada.

A ação efetiva (4.12) também pode ser expandida no espaço dos momentos. Para isso basta utilizar a transformada de Fourier das funções 1PI, que é dada por:

$$[\delta(p_1 + \dots + p_N)] \Gamma^{(N)}(p_1, \dots, p_N) = \int dx_1 \dots dx_N e^{-ip_1 x_1 - \dots - ip_N x_N} \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \quad (4.13)$$

e depois substituir isso em (4.12) e usar os deltas de Dirac para realizar uma integração de modo a estabelecer o vínculo proveniente da conservação do momento total. Com isso, chegamos a:

$$\Gamma[\phi, \phi^*, A] = \sum \int [dp_1] \dots [dp_{N-1}] \frac{1}{[(N_\phi/2)!]^2 N_A!} \Gamma^{(N)}(p_1, \dots, p_{N-1}) (\phi\phi^*)^{N_\phi/2} A^{N_A} \quad (4.14)$$

onde o fator  $(\phi\phi^*)^{N_\phi/2} A^{N_A}$  no integrando deve ser entendido como uma notação compacta que representa o produto de  $N = N_\phi + N_A$  campos dependendo de  $N - 1$  momentos independentes. Da mesma forma, em (4.12), que está escrita no espaço das posições, esse fator representa o produto de  $N$  campos dependendo de diferentes posições  $x_1, \dots, x_N$ .

Empregando as relações (4.1) entre os campos nus e renormalizados, a expansão da

ação efetiva acima pode ser escrita como:

$$\Gamma[\phi, \phi^*, A] = \sum \int [dp_1] \cdots [dp_{N-1}] \frac{1}{[(N_\phi/2)!]^2 N_A!} \times \underbrace{\left[ Z_\phi^{-N_\phi/2} Z_A^{-N_A/2} \Gamma^{(N)}(p_1, \dots, p_{N-1}) \right]}_{\Gamma_B^{(N)}(p_1, \dots, p_{N-1})} (\phi_B \phi_B^*)^{N_\phi/2} A_B^{N_A} \quad (4.15)$$

onde a função 1PI nua de  $N$  pontos pode ser identificada. Definindo  $Z_\Gamma \equiv Z_\phi^{N_\phi/2} Z_A^{N_A/2}$ , podemos escrever:

$$\Gamma^{(N)}(p; a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, e_0, \lambda_0, g_0, \xi_{n0}, m^2, \mu) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ Z_\Gamma(\mu, \epsilon) \Gamma_B^{(N)}(p; a_{1B}, a_{2B}, b_{1B}, b_{2B}, b_{3B}, b_{4B}, e_B, \lambda_B, g_B, \xi_{nB}, m_B^2, \epsilon) \right] \quad (4.16)$$

onde ‘p’ é usado para denotar todas os  $(N - 1)$  momentos independentes. Além disso, passaremos a escrever os acoplamentos  $e$ ,  $\lambda$ ,  $g$  e  $\xi_n$ ,  $n = a, b, c$ . em termos de uma parte que não varia com a regularização dimensional multiplicada pelo parâmetro de escala de energia  $\mu$  elevado a uma certa potência proporcional a  $\epsilon$ . Para  $z = 2$  e  $d = 4$ , as substituições a serem feitas são aquelas indicadas em (3.17). Desse ponto em diante, uma vez que tenhamos feito tais substituições, chamaremos novamente  $e_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $g_0$  e  $\xi_{n0}$  de  $e$ ,  $\lambda$ ,  $g$  e  $\xi_n$ , respectivamente, a fim de não sobrecarregar demais a notação.

A prescrição de 'tHooft-Weinberg para construir equações do grupo de renormalização (GR) corresponde a tomar a derivada com respeito a  $\mu$  e então multiplicar ambos os lados de (4.16) por  $\mu$ . Como  $\Gamma_B^{(N)}$  não depende de  $\mu$ , sua derivada deve se anular. Com isso, temos:

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + a_1 \beta_{a_1} \frac{\partial}{\partial a_1} + a_2 \beta_{a_2} \frac{\partial}{\partial a_2} + b_1 \beta_{b_1} \frac{\partial}{\partial b_1} + b_2 \beta_{b_2} \frac{\partial}{\partial b_2} + b_3 \beta_{b_3} \frac{\partial}{\partial b_3} + b_4 \beta_{b_4} \frac{\partial}{\partial b_4} \right. \\ \left. + \beta_e \frac{\partial}{\partial e} + \lambda \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_{\xi_n} \frac{\partial}{\partial \xi_n} + m^2 \delta \frac{\partial}{\partial m^2} - \gamma_\Gamma \right] \Gamma^{(N)} = 0 \quad (4.17)$$

onde as funções adimensionais do grupo de renormalização são definidas como:

$$\beta_{a_1} = \frac{\mu}{a_1} \frac{da_1}{d\mu}, \quad \beta_{a_2} = \frac{\mu}{a_2} \frac{da_2}{d\mu}, \quad \beta_{b_1} = \frac{\mu}{b_1} \frac{db_1}{d\mu}, \quad \beta_{b_2} = \frac{\mu}{b_2} \frac{db_2}{d\mu}, \\ \beta_{b_3} = \frac{\mu}{b_3} \frac{db_3}{d\mu}, \quad \beta_{b_4} = \frac{\mu}{b_4} \frac{db_4}{d\mu}, \quad \beta_e = \mu \frac{de}{d\mu}, \quad \beta_\lambda = \frac{\mu}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu}, \quad \beta_g = \mu \frac{dg}{d\mu}, \quad (4.18) \\ \beta_{\xi_n} = \mu \frac{d\xi_n}{d\mu}, \quad \delta = \frac{\mu}{m^2} \frac{dm^2}{d\mu} \quad \text{e} \quad \gamma_\Gamma = \frac{\mu}{Z_\Gamma} \frac{dZ_\Gamma}{d\mu}$$

com  $2\gamma_\Gamma = N_\phi \gamma_\phi + N_A \gamma_A$  e

$$\gamma_\phi = \frac{\mu}{Z_\phi} \frac{dZ_\phi}{d\mu} \quad \text{e} \quad \gamma_A = \frac{\mu}{Z_A} \frac{dZ_A}{d\mu}$$

Essas funções representam, basicamente, as taxas de variação das constantes com o parâmetro  $\mu$  e, indiretamente, com a escala de energia da teoria e é por meio da análise delas que podemos inferir sobre um possível cenário de restauração da simetria de Lorentz em um universo onde a escala de energia diminuiu.

Para determinar as funções do GR acima, vamos inserir as funções de Green 1PI de 2 e 3 pontos nas equações (4.17) e então calcularemos as funções do GR perturbativamente ordem a ordem em potências das constantes de acoplamento seguindo um método similar ao proposto em [35].

Antes de substituir as funções de Green 1PI nas equações do GR, porém, devemos escrevê-las em sua forma renormalizada. As versões não-renormalizadas delas foram apresentadas no Capítulo 3, nas expressões (3.80)–(3.85). Agora, porém, os acoplamentos serão escritos em função da escala  $\mu$  usando (3.17) e os fatores que carregam

$\mu^{f(\epsilon)}$  serão expandidos ao redor de  $\epsilon = 0$ , de modo que teremos:

$$\mu^{f(\epsilon)} = 1 + \epsilon f'(0) \ln \mu \quad (4.19)$$

Como resultado desse procedimento, surgem fatores proporcionais aos resíduos das correções multiplicados por um  $\ln \mu$ . Tais fatores devem sempre encontrar uma contraparte na forma de um  $(-\ln m)$  oriunda das partes finitas das funções  $\Gamma^{(N)}$  de modo a formar logaritmos de quantidades adimensionais da forma  $\ln(\frac{\mu}{m})$ . Além disso, as partes infinitas não devem aparecer se considerarmos que todas elas são canceladas por contratermos apropriados como aqueles determinados na Seção 4.1 deste capítulo. Fatores proporcionais a  $\epsilon$  também não entrarão nessas expressões uma vez que tendem a desaparecer quando se toma o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Seguindo essa receita, temos então:

$$\Gamma^{(2)00} = \left(1 + \frac{\alpha}{8} \ln \mu\right) \vec{p}^2 + \frac{\alpha}{4}(\text{parte finita}), \quad (4.20)$$

$$\Gamma^{(2)0i} = \Gamma^{(2)i0} = -\left(1 + \frac{\alpha}{8} \ln \mu\right) p_0 p_i + \frac{\alpha}{4}(\text{parte finita}) \quad (4.21)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)ij} = & \left(1 + \frac{\alpha}{8} \ln \mu\right) \delta_{ij} p_0^2 - \left(a_1^2 - \frac{\alpha}{8} R \ln \mu\right) (\delta_{ij} \vec{p}^2 - p_i p_j) \\ & - \left(a_2^2 - \frac{\alpha}{8} S \ln \mu\right) (\delta_{ij} \vec{p}^2 - p_i p_j) \vec{p}^2 + \frac{\alpha}{4}(\text{parte finita}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

que são as funções de dois pontos dos campos de calibre, com  $R$  e  $S$  dados por (3.41),

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)} = & \left(1 - \frac{\alpha}{2} \ln \mu\right) p_0^2 - \left(b_1^2 - \frac{\alpha}{2} Q_1 \ln \mu\right) \vec{p}^2 - \left(b_2^2 - \frac{\alpha}{2} Q_2 \ln \mu\right) \vec{p}^4 \\ & - \left(m^2 - \frac{\alpha}{2} Q_3 \ln \mu\right) + \alpha(\text{parte finita}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

que é a função de 2 pontos dos campos de matéria, onde  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  são definidos de acordo com (3.52)–(3.54) e, finalmente,

$$\Gamma^{(3)0} = e \left( 1 - \frac{3\alpha}{4} \ln \mu \right) (p_0 + p'_0) + e\alpha(\text{parte finita}) \quad (4.24)$$

que é a função de 3 pontos com uma perna de  $A_0$  e

$$\begin{aligned} \Gamma^{(3)i} = & -e \left( b_1^2 - \frac{3\alpha}{4} Q_1 \ln \mu \right) (p_i + p'_i) \\ & - e \left( b_2^2 - \frac{3\alpha}{4} Q_2 \ln \mu \right) \left[ p_i(\vec{p}^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}') + p'_i(\vec{p}'^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}') \right] \\ & - e \left( b_3^2 - \frac{3\alpha}{4} K_3 \ln \mu \right) \left[ p_i(\vec{p}'^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}') + p'_i(\vec{p}^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}') \right] \\ & + e\alpha(\text{parte finita}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

que é a função de 3 pontos com uma perna de  $A_i$ .

Cabe ressaltar que, para todas as expressões acima, em todos os lugares onde os acoplamentos aparecem, na verdade estamos considerando a parte desses acoplamentos que multiplica um fator  $\mu^{f(\epsilon)}$  de acordo com (3.17). Então, por exemplo, onde vemos  $e$ , na verdade, estamos considerando  $e_0$ . Da mesma maneira, como  $\alpha = e^2/(16\pi^2 b_2)$ , o  $e^2$  que ali aparece é, na verdade  $e_0^2$ , que multiplicava um fator  $\mu^{\epsilon/2}$ , cuja expansão ao redor de  $\epsilon = 0$  foi tomada conforme indicado em (4.19). Além disso, as constantes  $R$ ,  $S$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  e  $K_3$ , onde apresentam dependência nos acoplamentos, seguem exatamente a mesma lógica. Também devemos destacar que, embora a forma funcional dessas constantes continue sendo dada de acordo com a definição original das mesmas, onde elas haviam sido definidas no Capítulo 3, ainda estávamos trabalhando com versões nuas dos objetos. Agora, o que passa a aparecer ali são somente partes finitas, isto é, o pedaço de cada constante que não inclui seu respectivo contratérmo.

### 4.3. Solução Perturbativa das Equações do Grupo de Renormalização

Para determinar as funções do GR que aparecem nas equações (4.17) e cuja definição é dada em (4.18), empregaremos um método perturbativo, isto é, iremos representar tais funções por séries de potências nas constantes de acoplamento  $e$ ,  $\lambda$ ,  $g$  e  $\xi_n$ . Assim, denominando genericamente como  $\beta$  alguma das funções dadas em (4.18) e chamando de  $\beta^{[X]}$  o coeficiente da expansão de  $\beta$  proporcional a uma combinação ‘ $X$ ’ das constantes de acoplamento, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \beta = & \beta^{[e]}e + \beta^{[\lambda]}\lambda + \beta^{[g]}g + \beta^{[\xi_n]}\xi_n + \beta^{[e^2]}e^2 + \beta^{[\lambda^2]}\lambda^2 + \beta^{[g^2]}g^2 \\ & + \beta^{[\xi_n^2]}\xi_n^2 + \beta^{[e\lambda]}e\lambda + \beta^{[eg]}eg + \beta^{[e\xi_n]}e\xi_n + \beta^{[\lambda g]}\lambda g + \beta^{[\lambda\xi_n]}\lambda\xi_n \\ & + \beta^{[g\xi_n]}g\xi_n + \beta^{[e^3]}e^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde os termos que dependem de  $\xi_n$  devem ser somados para  $n = a, b, c$ .

Depois disso, vamos substituir cada uma das funções expandidas segundo (4.26) nas equações do GR (4.17). Essas equações são equações diferenciais para as funções de Green 1PI, mas, ao mesmo tempo, são equações algébricas para as funções  $\beta$ . Nesse sentido, temos um sistema linear consideravelmente grande formado pelas equações do GR montadas para diferentes funções de Green 1PI. Cada uma dessas equações é um polinômio nos momentos igualado a zero. Como elas devem valer para valores arbitrários dos momentos, podemos assumir que os coeficientes de cada potência de  $p$  devem se anular independentemente. Além disso, como as constantes de acoplamento também são independentes entre si, os termos proporcionais a diferentes potências dessas constantes, também devem se anular independentemente de modo que, cada uma dessas combinações de potências das constantes de acoplamento irá formar uma diferente ordem de perturbação.

Para que o procedimento perturbativo funcione de fato, devemos lembrar que as

funções de Green 1PI também dependem das constantes de acoplamento e que o operador que aparece nas equações do GR toma derivadas em relação a essas constantes. Assim, antes de considerar determinada ordem de perturbação, é preciso verificar se a expansão, seja ela até 1 ou mais loops, que está sendo utilizada como aproximação para representar as funções de Green 1PI, contém todos os termos proporcionais à combinação de potências das constantes de acoplamento que representa a ordem de perturbação que está sendo analisada.

Ao considerar todos os vértices de interação da lagrangiana (3.5) explicitando sua proporcionalidade em relação às constantes de acoplamento, podemos construir o esquema da Figura 4.1.

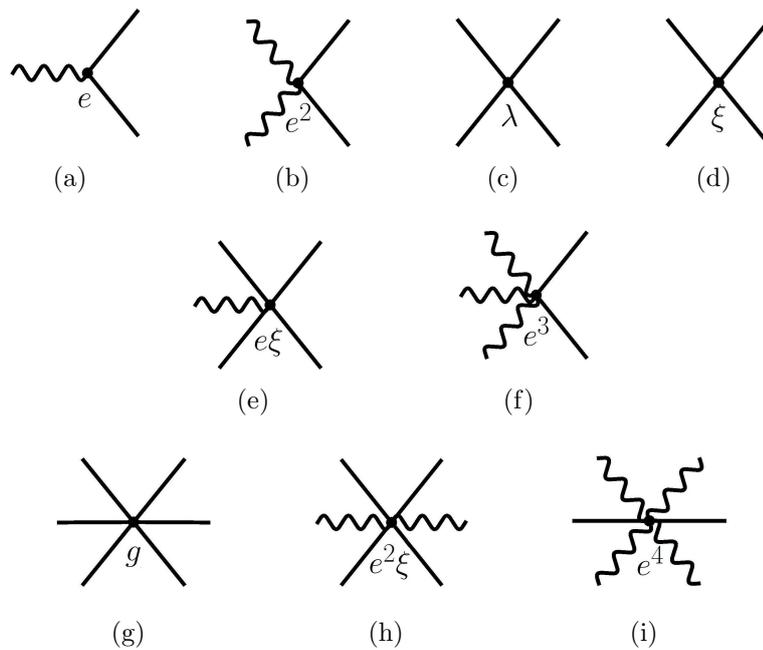


Figura 4.1.: Vértices de interação e sua respectiva proporcionalidade em relação às constantes de acoplamento.

Assim, por exemplo, o vértice 3-linear que aparece na Figura 4.1(a) representa qualquer um dos vértices  $V_{3X}$ , cujas expressões foram dadas em (3.7) e que são todos proporcionais ao acoplamento  $e$ . Da mesma forma o vértice 4-linear da Figura 4.1(c), por

exemplo, é o vértice  $V_{4\lambda}$  da expressão (3.8) que é proporcional ao acoplamento  $\lambda$ . Esse vértice deve ser considerado separadamente daqueles representados pela Figura 4.1(d), cujas definições são dadas pelas expressões (3.9) onde os vértices têm fatores de momento a mais que surgem das derivadas contidas nos termos correspondentes da lagrangiana (3.5). Nesse caso, o símbolo ‘ $\xi$ ’ pode representar qualquer um dos acoplamentos  $\xi_n$ ,  $n = a, b, c$ . De forma semelhante, os vértices 5-lineares  $V_{5\xi X}$  representados na Figura 4.1(e) e dados pelas expressões (3.12) são proporcionais a diferentes combinações envolvendo os acoplamentos  $\xi_n$  multiplicados por  $e$ , porém nessas combinações todos os  $\xi_n$  sempre aparecem com a potência 1. Nesse caso, dizer genericamente que tais vértices são proporcionais a ‘ $\xi$ ’ equivale a assumir que todos os  $\xi_n$  são, aproximadamente, da mesma ordem de grandeza ou, alternativamente, que estamos considerando a proporcionalidade em relação ao  $\xi_n$  de maior ordem de grandeza e desprezando os demais.

O próximo passo é verificar, para as primeiras ordens de potências das constantes de acoplamento, quais termos, sejam eles da ordem de 1 ou mais loops, podem aparecer na expansão das funções de Green 1PI. Deve ser observado, inclusive, que não apenas termos com as mesmas potências das constantes de acoplamento podem contribuir para uma determinada ordem de perturbação. Isso é assim pois o operador diferencial das equações do GR, ao tomar derivadas das funções 1PI, irá produzir diferentes combinações dos acoplamentos. Por exemplo, se pretendemos analisar a ordem de perturbação  $e^3$ <sup>1</sup>, devemos observar a parte das funções 1PI proporcional a  $e^3$ , que será multiplicada pela função  $\gamma_\Gamma$  e cuja parte proporcional a um  $\ln \mu$  será afetada pelo operador  $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$ . No entanto, devemos observar também, por exemplo, termos da ordem  $e^2 \xi$ , que sob a ação de um  $\beta_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}$ , fazem surgir termos do tipo  $\beta_\xi^{[e]} e^3$  e assim por diante.

---

<sup>1</sup>Na SQED usual, por exemplo, a ordem dominante da função  $\beta_e$  é proporcional a  $e^3$  [43]. Então, se a nossa teoria guardar semelhança em relação a esse aspecto do caso usual, poderia ser preciso analisar essa ordem de perturbação para determinar  $\beta_e$ .



dem aos dois primeiros diagramas do lado direito de (4.27). Os demais diagramas são contribuições de 2-loops que não foram calculadas neste trabalho, mas que podem contribuir em determinadas ordens de perturbação no cálculo das funções  $\beta$ . Observando os vértices da teoria, que são mostrados na Figura 4.1, podemos notar que não é possível, por exemplo, formar diagramas das ordens  $e$ ,  $\lambda$ ,  $g$ ,  $\xi$ ,  $e\lambda$ ,  $e\xi$ ,  $\lambda^2$ ,  $\xi^2$ ,  $e^3$  e  $\lambda^3$  que contribuam para as funções de 2 pontos dos campos de calibre,  $\Gamma^{(2)\mu\nu}$ . Além disso, todos os diagramas de ordem  $e^2$  que podem contribuir são os diagramas de 1-loop, que são aqueles cujas partes divergentes foram calculadas.

A ordem  $e^3$ , entretanto, conforme o que discutimos alguns parágrafos acima, recebe contribuição de diagramas proporcionais a  $e^2\xi$  e, por isso, não pode ser considerada sem que se tenha feito o cálculo desses diagramas. Logo, podemos concluir que as equações do GR para as funções  $\Gamma^{(2)\mu\nu}$  devem funcionar nas ordens de perturbação  $e$ ,  $\lambda$ ,  $g$ ,  $\xi$ ,  $e\lambda$ ,  $e\xi$ ,  $\lambda^2$ ,  $\xi^2$  e  $\lambda^3$ , não requerendo cálculos em mais loops. Por outro lado, apenas com os cálculos já realizados, não é possível confiar na ordem de perturbação  $e^3$ , pelas razões explicadas acima, e nem nas ordens  $e^2\lambda$ ,  $e^2\xi$  ou  $e^4$ , por exemplo, pois, como vemos na expressão (4.27), essas ordens devem receber contribuições de diagramas de 2-loops, de modo que as equações do GR não devem fazer sentido se esses termos não forem considerados.

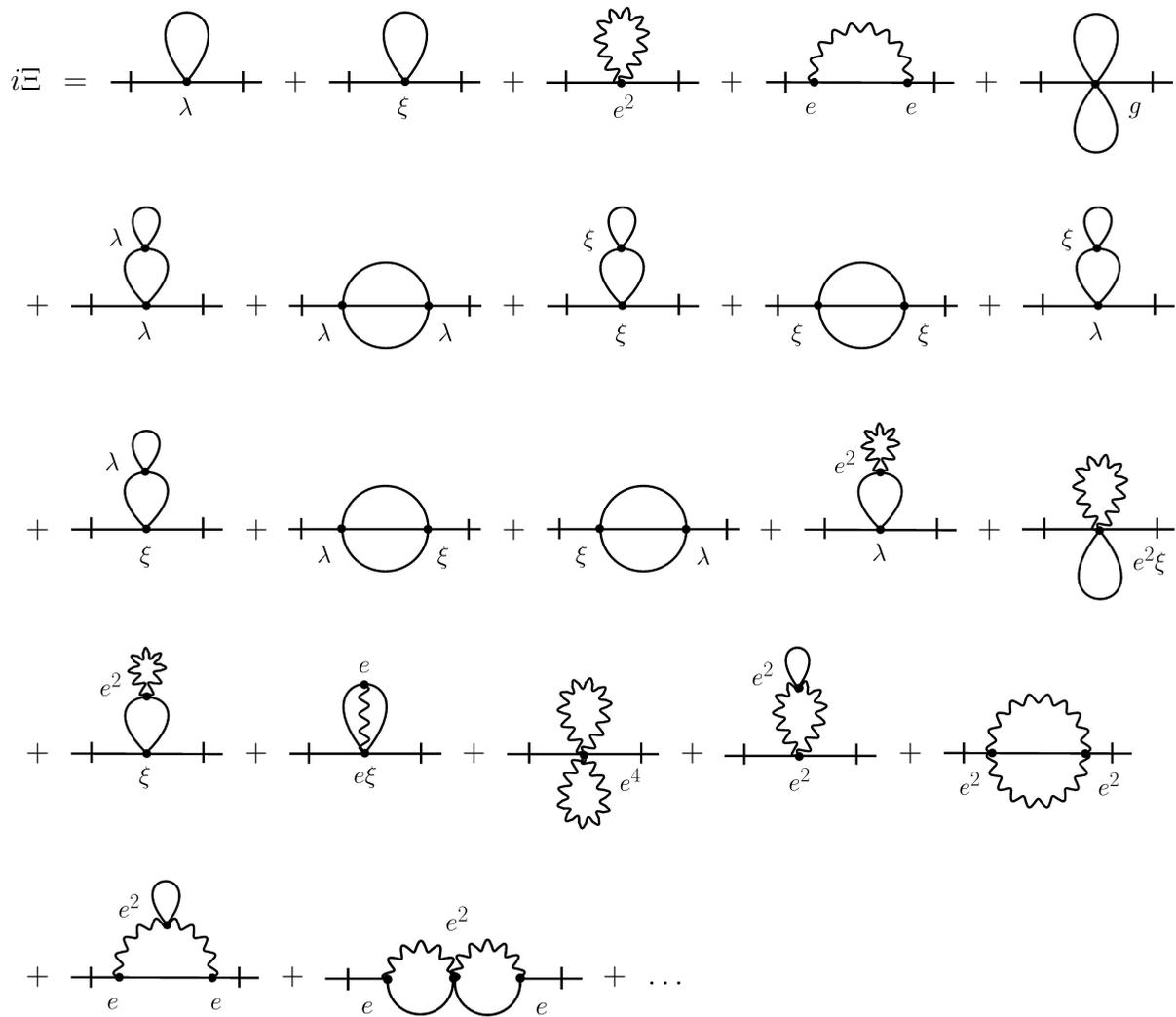
Assim, as equações do GR para as funções de Green 1PI de 2 pontos  $\Gamma^{(2)00}$ ,  $\Gamma^{(2)0i}$  e  $\Gamma^{(2)ij}$ , quando consideradas até as primeiras ordens de perturbação relevantes que funcionam com os cálculos realizados até então, fornecem:

$$\beta_{a_1} = \frac{e^2}{256\pi^2 b_2} \left[ \frac{R + a_1^2}{a_1^2} \right] \quad \text{e} \quad \beta_{a_2} = \frac{e^2}{256\pi^2 b_2} \left[ \frac{S + a_2^2}{a_2^2} \right] \quad (4.28)$$

onde  $R$  e  $S$  foram definidos em (3.41), e também:

$$\gamma_A = \frac{e^2}{128\pi^2 b_2} \tag{4.29}$$

Consideremos agora a equação do GR formada com a função 1PI de 2 pontos dos campos de matéria, isto é,  $\Gamma^{(2)}$ . As primeiras correções à essa função correspondem a:



$$\tag{4.30}$$

Tendo realizado cálculos até a ordem de 1 loop, o que corresponde aos quatro primeiros diagramas de (4.30), podemos repetir o mesmo tipo de análise que foi feita

para as equações do GR formadas com as funções 1PI de 2 pontos dos campos de calibre e assim determinar quais ordens de perturbação estão aptas a fornecer informações confiáveis. Os diagramas de 1-loop dos quais dispomos são os únicos com duas pernas de campos de matéria a contribuir com termos de ordem  $\lambda$ ,  $\xi$  e  $e^2$ . Além disso, com os vértices disponíveis (ver Figura 4.1), não é possível formar diagramas proporcionais a  $e$  e nem a  $e^3$  que contribuam com a função  $\Gamma^{(2)}$ . A ordem de perturbação  $e^3$ , no entanto, assim como aconteceu com as equações do GR correspondentes às outras funções de 2 pontos, deve receber contribuições dos diagramas proporcionais a  $e^2\xi$  sob a ação do operadores  $\beta_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}$ . Assim, essa ordem já não pode ser considerada.

Resolvendo o sistema de equações formado pelas ordens de perturbação  $e$ ,  $\lambda$ ,  $\xi$  e  $e^2$ , as equações do GR para a função de 2 pontos  $\Gamma^{(2)}$  fornecem:

$$\delta = \frac{e^2}{32\pi^2 b_2} \left[ \frac{Q_3 - m^2}{m^2} \right] \quad (4.31)$$

onde  $Q_3$  é dada por (3.54),

$$\gamma_\phi = -\frac{e^2}{32\pi^2 b_2} \quad (4.32)$$

e

$$\beta_{b_1} = \frac{e^2}{64\pi^2 b_2} \left[ \frac{Q_1 - b_1^2}{b_1^2} \right] \quad \text{e} \quad \beta_{b_2} = \frac{e^2}{64\pi^2 b_2} \left[ \frac{Q_2 - b_2^2}{b_2^2} \right] \quad (4.33)$$

onde  $Q_1$  e  $Q_2$  são dadas, respectivamente, por (3.52) e (3.53).

A expressão diagramática que resulta de considerar as correções às funções 1PI de 3 pontos  $\Gamma^{(3)\mu}$  é bastante extensa e, por essa razão, não vamos exibi-la aqui. Para se ter uma ideia, ao expandir as correções  $i\Lambda^\mu$  até a ordem de 2-loops, foram identificados 55 tipos de diagramas. Isso se contarmos as dependências nos acoplamentos  $\xi_n$  genericamente como ‘ $\xi$ ’. Lembrando, porém, que existem 3 diferentes constantes

$\xi_n$ , a quantidade de diagramas aumenta drasticamente. Aliás, esse aumento súbito do volume de cálculos devido à existência de diversos tipos de vértice na nossa teoria, associado à complexidade das integrais envolvidas é uma das principais dificuldades encontradas neste trabalho e é também o principal fator que colaborou com as opções de não calcular as funções de 4 pontos e de não realizar nenhum cálculo em 2-loops. Futuramente, porém, uma análise complementar deve ser realizada e essas lacunas devidamente preenchidas.

Com os resultados obtidos no Capítulo 3 até a ordem de 1-loop, foram obtidos diagramas proporcionais a  $e\lambda$ ,  $e\xi$  e  $e^3$ . Considerando também a parte que contribui com a aproximação em 2-loops e os vértices da teoria (ver Figura 4.1), vemos que esses pedaços já calculados são os únicos proporcionais a essas combinações de acoplamentos. Além disso, os vértices disponíveis não permitem formar diagramas proporcionais a  $e$ ,  $\lambda$ ,  $g$ ,  $\xi$ ,  $e^2$ ,  $\lambda^2$  e  $\lambda\xi$ .

As ordens  $e^2$ , na qual não são formadas contribuições a função de 3 pontos, e também  $e\lambda$  e  $e\xi$ , que só contribuem com diagramas de 1-loop que são os que foram calculados, ao contrário do que se esperaria, não podem ser consideradas. De fato, ao se trabalhar com as equações do GR nessas ordens de perturbação, surgem inconsistências que apontam para a falta de alguma contribuição além de 1-loop. Um possível candidato a originar essas contribuições é o diagrama de 2-loops da Figura 4.2.

Esse diagrama, quando sob a ação do operador  $\beta_g \frac{\partial}{\partial g}$ , pode produzir uma combinação de termos da forma:

$$A\beta_g^{[e]}e^2 + B\beta_g^{[\lambda]}e\lambda + C\beta_g^{[\xi]}e\xi$$

o que nos leva a constatar que as ordens de perturbação que podem ser consideradas no caso das funções de 3 pontos são  $e$ ,  $\lambda$ ,  $\xi$ ,  $\lambda^2$ ,  $\lambda\xi$  e  $e^3$ .

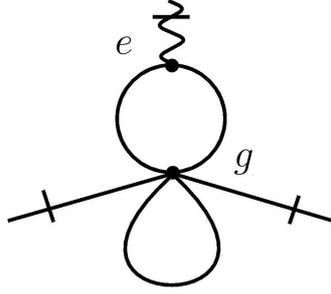


Figura 4.2.: Contribuição de 2-loops às funções de 3 pontos  $\Gamma^{(3)\mu}$  formada com os vértices 3-lineares  $V_{3X}$  e com o vértice 6-linear  $V_{6g} = -\frac{g}{6}(\phi^*\phi)^3$ .

Da solução do sistema de equações formado pelas ordens de perturbação permitidas nesse contexto, encontramos:

$$\beta_e = \frac{5e^3}{256\pi^2 b_2} \tag{4.34}$$

Além disso, podemos inferir a forma da função  $\beta_{b_3}$  e assumir que:

$$\beta_{b_3} = \frac{3e^2}{128\pi^2 b_2} \left[ \frac{K_3 - b_3^2}{b_3^2} \right] \tag{4.35}$$

onde  $K_3$  foi definido em (3.78).

Com as ordens de perturbação com as quais podemos trabalhar, não é possível determinar a dependência desta função nas constantes  $\xi_n$  que aparecem na definição de  $K_3$  (ver Eq.(3.78)). Na verdade, ao trabalhar com a ordem de perturbação  $e^3$ , a expressão que se obtém para  $\beta_{b_3}$  é idêntica a (4.35), porém fazendo  $\xi_b = \xi_c = 0$ . No entanto, vamos assumir que esses termos devem aparecer lá pois todas as outras funções  $\beta$  calculadas até agora eram diretamente proporcionais aos contratermos calculados na Seção 4.1 e o contratermo de  $b_3^2$ , por sua vez, é diretamente proporcional à combinação  $[K_3 - b_3^2]$  como vemos em (4.11).

## 4.4. Análise da Evolução dos Parâmetros com a Escala de Energia

Nesse ponto, estamos finalmente em posição de começar a analisar a evolução dos parâmetros. De acordo com (4.18), as funções do GR são essencialmente derivadas dos parâmetros com respeito a  $\mu$ , que, conforme a discussão desenvolvida no final do Capítulo 2, estão associadas à medida da variação dos parâmetros com a escala de energia  $s$ . Assim, em princípio, podemos analisar o sinal dessas funções para tentar prever o comportamento da teoria a medida que a escala aumenta ou diminui. Se a quantidade  $s \frac{da}{ds}$  é positiva, então o parâmetro  $a$  deve diminuir a medida que  $s$  diminui. Em uma situação na qual a simetria de Lorentz é recuperada ao se reduzir a escala de energia, esse é o comportamento esperado dos pesos anisotrópicos  $a_2$  e  $b_2$  que aparecem na lagrangiana (3.2). Em um cenário de restauração, o mesmo comportamento deve ser observado para os acoplamentos  $b_3$ ,  $b_4$  e  $\xi_n$ , todos associados a termos que violam a simetria de Lorentz. Essa condição sobre os termos de derivadas mais altas, embora necessária, não é suficiente pois, se tivermos  $a_1 \neq b_1$ , ainda haverá uma quebra suave de simetria. Nesse caso, para que ocorra a restauração, a evolução desses parâmetros deve ser tal que eles tendam a um mesmo valor. Por outro lado, de nada adianta impor  $a_1 = b_1$  como ponto de partida pois, se esses parâmetros não permanecerem constantes ou se não evoluírem juntos, a SQED usual não poderá ser recuperada. Então, se fizermos  $a_1 = b_1$ , devemos ter também  $s \frac{da_1}{ds} = s \frac{db_1}{ds}$ , que implica que  $\beta_{a_1} = \beta_{b_1}$ .

Embora as considerações acima sejam razoavelmente simples, as funções do GR determinadas na seção anterior carregam consigo uma dependência complicada em um grande número de parâmetros:  $e$ ,  $\lambda$ ,  $m$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$  e  $\xi_n$ ,  $n = a, b, c$ . Com isso, pode ser difícil na prática determinar relações gerais entre esses parâmetros que fixem os intervalos nos quais as variações  $s \frac{da}{ds}$  são positivas, negativas ou zero. Além

disso, ainda pesa o fato que, dadas a necessidade do cálculo de funções 1PI de 4 e 6 pontos e a existência de contribuições de 2-loops em baixas ordens de perturbação, nem todas as funções do GR puderam ser determinadas. Assim, para poder extrair alguma informação sobre a evolução dos parâmetros, devemos impor certas simplificações e analisar diferentes casos.

A primeira simplificação que iremos adotar será fazer  $\xi_n = 0$ . Essa escolha só faz sentido se termos divergentes com a forma dos vértices proporcionais aos  $\xi_n$  não forem gerados no cálculo das funções de 4 pontos. Caso contrário, aqueles termos devem ser mantidos na lagrangiana para que as divergências possam ser canceladas.

Vamos então considerar a situação em que forçamos a teoria a ter  $a_1 = b_1 = c$  com o vínculo adicional  $\beta_{a_1} = \beta_{b_1}$ . Esse vínculo impõe que os parâmetros  $a_1$  e  $b_1$  devem evoluir juntos, de forma a permanecerem iguais. Nesse caso, colocando um fator  $c^2$  em evidência na lagrangiana (3.2) e redefinindo apropriadamente  $c^{-1}\partial_0 \rightarrow \partial_0$ ,  $c^{-1}A_0 \rightarrow A_0$ ,  $c^{-2}m^2 \rightarrow m^2$ ,  $c^{-2}\lambda \rightarrow \lambda$  e  $c^{-2}g \rightarrow g$ , iremos obter novamente os termos usuais da SQED em  $(4 + 1)$  dimensões e os termos com derivadas de ordem superior aparecerão todos divididos por um fator  $c^2$ . Essa escolha corresponde a assumir que, independentemente da escala de energia, os termos usuais se mantêm isotrópicos. Nesse caso, embora a simetria de Lorentz ainda seja quebrada por causa da presença dos termos com derivadas de ordem superior, se esses termos vierem a desaparecer, o que sobrar será uma teoria invariante de Lorentz. Fisicamente, a escolha  $a_1 = b_1 = c$  corresponde a assumir que, na ausência dos termos de derivadas altas, temos uma velocidade da luz bem definida. O vínculo  $\beta_{a_1} = \beta_{b_1}$ , por sua vez, diz que essa velocidade da luz deve continuar bem definida, ainda que seu valor possa variar com a escala de energia.

Fazendo  $\xi_n = 0$  e  $a_1 = b_1 = c$ , as funções  $\beta_{a_1}$  e  $\beta_{a_2}$ , dadas por (4.28),  $\beta_{b_1}$  e  $\beta_{b_2}$ , dadas por (4.33) e  $\beta_{b_3}$ , dada em (4.35), passam a depender somente de  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  e  $b_4$ , porém, a única dessas funções que depende de  $b_4$  é  $\beta_{a_1}$ .

A seguir, impondo o vínculo  $\beta_{a_1} = \beta_{b_1}$ , podemos eliminar  $b_4$  em função de  $a_2$ ,  $b_2$  e  $b_3$ , de modo que as funções beta passam a depender somente dessas variáveis.

Tendo colocado em evidência um fator global  $c^2$  na lagrangiana, este pode ser desconsiderado, pois não irá afetar as equações de movimento. Olhando agora para os termos com derivadas altas, os acoplamentos aparecem divididos por  $c^2$ . Seja  $a$ , um dos acoplamentos de termos que quebram a simetria de Lorentz, como  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  ou  $b_4$ , por exemplo. De acordo com (2.47), a variação relativa da combinação  $a^2/c^2$  é obtida fazendo:

$$s \frac{d}{ds} \left( \frac{a^2}{c^2} \right) = \frac{2a^2}{c^2} [z(\beta_a - \beta_c) - (\dim(a) - \dim(c))] \quad (4.36)$$

onde  $\beta_c \equiv \beta_{a_1} = \beta_{b_1}$ .

Para que ocorra a restauração da simetria de Lorentz, devemos ter  $s \frac{d}{ds} \left( \frac{a^2}{c^2} \right) > 0$ . Logo, de acordo com (4.36), a condição que deve ser satisfeita é:

$$\beta_a - \left( \beta_c + \frac{\dim(a) - \dim(c)}{z} \right) > 0 \quad (4.37)$$

Neste ponto, convém dividir a análise em 3 diferentes casos:

- **1º Caso:** A importância dos termos usuais *decrece* com a escala de energia, ou seja,  $s \frac{dc}{ds} > 0$ .
- **2º Caso:** Os termos usuais *não evoluem* com a escala de energia, ou seja, devemos ter  $s \frac{dc}{ds} = 0$ .
- **3º Caso:** A importância dos termos usuais *cresce* quando a escala de energia diminui, ou seja,  $s \frac{dc}{ds} < 0$ .

**1º Caso:**  $s \frac{dc}{ds} > 0$ 

Nesse caso a importância dos termos usuais *decrece* com a escala de energia, ou seja,  $s \frac{dc}{ds} > 0$  e, de acordo com (2.41), devemos ter  $\beta_c > (z - 1)/z = 1/2$ . Nessa situação, a restauração da simetria requer, necessariamente, que as funções  $\beta_a$  sejam positivas, além de satisfazerem à condição (4.37).

Esse caso corresponde a uma situação em que a importância dos termos usuais diminui quando reduzimos a escala de energia. Isso implicaria que, em um universo de altíssimas energias, a velocidade da luz poderia ser maior, o que, em princípio, parece compatível com um cenário de inflação cósmica. Para que essa hipótese faça sentido, porém, é preciso que os acoplamentos dos termos de derivadas de ordem superior diminuam mais rapidamente do que os termos usuais. Essa exigência é atendida quando as funções beta satisfazem à condição (4.37).

**2º Caso:**  $s \frac{dc}{ds} = 0$ 

Os termos usuais *não evoluem* com a escala de energia, ou seja,  $s \frac{dc}{ds} = 0$ . Então, de acordo com (2.41), temos  $\beta_c = 1/2$ . Como  $(\dim(a) - \dim(c))/z = -1/2$ , a condição (4.37) se reduz a  $\beta_a > 0$  e, por isso, nesse caso, basta analisar o sinal das funções  $\beta_a$ . Se elas forem positivas, a importância dos termos de derivadas altas diminui com a escala de energia e a simetria de Lorentz é restaurada.

Essa é a situação em que temos uma velocidade da luz bem definida e constante, seja no universo de altas ou baixas energias.

**3º Caso:**  $s \frac{dc}{ds} < 0$ 

A importância dos termos usuais *crece* quando a escala de energia diminui, ou seja,  $s \frac{dc}{ds} < 0$ , o que requer, de acordo com (2.41), que tenhamos  $\beta_c < 1/2$ . Nesse caso, as funções  $\beta_a$  podem ser positivas ou negativas, desde que a condição (4.37) ainda seja

satisfeita.

Aqui, a velocidade da luz tende a aumentar com a diminuição da energia. Isso faz com que os termos usuais ganhem importância no nosso universo. Porém, no universo de altíssimas energias, em princípio seria possível inclusive assumir que os termos usuais podem ser desconsiderados, o que corresponde a tomar  $a_1 = b_1 = 0$  como ponto de partida. Assim, os termos usuais funcionariam sob um regime de liberdade assintótica. Em especial, quando fazemos  $a_1 = b_1 = 0$ , não apenas as partes divergentes das integrais  $J(x, y, z)$  (ver Eq. (3.36)) podem ser calculadas<sup>3</sup>, mas também as contribuições às partes finitas das funções 1PI.

Para analisar esse caso, podemos fazer a escolha particular  $\beta_c = 0$ . Com isso, garantimos que a condição (2.41) seja satisfeita, isto é, teremos  $\beta_c < 1/2$ . Além disso, com essa escolha, o vínculo  $\beta_{a_1} = \beta_{b_1}$  se torna particularmente simples de se lidar. Como essas funções beta dependem de  $e$  como um fator multiplicativo global, quando elas são igualadas a zero, o fator que depende de  $e$  pode ser cancelado. Depois, é possível determinar não só  $b_4$ , mas também  $b_3$  como função dos parâmetros  $a_2$  e  $b_2$ . As expressões de  $b_3$  e  $b_4$  são as soluções do sistema formado pelas equações  $\beta_{a_1} = 0$  e  $\beta_{b_1} = 0$ , sendo dadas por:

$$b_3 = \sqrt{\frac{b_2}{3(a_2^2 + a_2b_2 + b_2^2)}} \left[ 3b_2(3a_2^2 - a_2b_2 - b_2^2) \right. \\ \left. \pm \sqrt{3} \sqrt{-2a_2^6 - 4a_2^5b_2 + 8a_2^4b_2^2 + 7a_2^3b_2^3 + 18a_2^2b_2^4 + 18a_2b_2^5 + 9b_2^6} \right]^{1/2} \quad (4.38)$$

<sup>3</sup>Uma dedução do cálculo das integrais  $J(x, y, z)$  para o caso em que os termos usuais são mantidos “desligados” pode ser encontrada no Apêndice C.

e

$$b_4 = \sqrt{\frac{b_2}{6(a_2^2 + a_2b_2 + b_2^2)}} \left[ 3b_2(a_2^2 - 7a_2b_2 - 7b_2^2) \right. \\ \left. \pm 4\sqrt{3}\sqrt{-2a_2^6 - 4a_2^5b_2 + 8a_2^4b_2^2 + 7a_2^3b_2^3 + 18a_2^2b_2^4 + 18a_2b_2^5 + 9b_2^6} \right]^{1/2} \quad (4.39)$$

A única função beta que depende de  $b_4$  é  $\beta_{a_1}$ , mas a expressão de  $b_4$  dada em (4.39) foi obtida justamente de modo a satisfazer o vínculo  $\beta_{a_1} = \beta_{b_1} = 0$ . Da mesma forma, o  $b_3$  dado em (4.38) é justamente aquele que se obtém ao satisfazer esse mesmo vínculo. As outras funções,  $\beta_{a_2}$ ,  $\beta_{b_2}$  e  $\beta_{b_3}$ , quando fazemos  $a_1 = b_1 = c$ , dependem somente de  $a_2$ ,  $b_2$  e  $b_3$ . A dependência em  $b_3$  pode ser eliminada, substituindo o resultado (4.38) nas fórmulas dessas funções beta. Com isso, temos:

$$\beta_{a_2} = \frac{e^2}{27648\pi^2 a_2 b_2} \left\{ 108a_2^2 + 27b_2^2 + \frac{42b_2 \left( 3b_2 P_1(a_2, b_2) \mp 2\sqrt{3}\sqrt{P_2(a_2, b_2)} \right)}{P_3(a_2, b_2)} \right. \\ \left. + \frac{\left( 3b_2 P_1(a_2, b_2) \mp 2\sqrt{3}\sqrt{P_2(a_2, b_2)} \right)^2}{(P_3(a_2, b_2))^2} \right\}, \quad (4.40)$$

$$\beta_{b_2} = \frac{e^2}{2304\pi^2} \left\{ -36 + \frac{1}{a_2(a_2 + b_2)^3} \left[ 9b_2^2(23a_2^2 + 37a_2b_2 + 16b_2^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{a_2(a_2 + 3b_2) \left( 3b_2 P_1(a_2, b_2) \mp 2\sqrt{3}\sqrt{P_2(a_2, b_2)} \right)^2}{(P_3(a_2, b_2))^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{6b_2(7a_2^2 + 9a_2b_2 + 4b_2^2) \left( 3b_2 P_1(a_2, b_2) \mp 2\sqrt{3}\sqrt{P_2(a_2, b_2)} \right)}{P_3(a_2, b_2)} \right] \right\} \quad (4.41)$$

e

$$\begin{aligned}
\beta_{b_3} = & \frac{e^2}{1536\pi^2(a_2 + b_2)^3} \sqrt{\frac{P_3(a_2, b_2)}{b_2 \left( -3b_2 P_1(a_2, b_2) \mp 2\sqrt{3}\sqrt{P_2(a_2, b_2)} \right)}} \\
& \times \left\{ 9b_2(3a_2^4 + 9a_2^3b_2 + 25a_2^2b_2^2 + 41a_2b_2^3 + 20b_2^4) \right. \\
& + \frac{3(15a_2^4 + 45a_2^3b_2 + 5a_2^2b_2^2 - 69a_2b_2^3 - 40b_2^4) \left( 3b_2 P_1(a_2, b_2) \mp 2\sqrt{3}\sqrt{P_2(a_2, b_2)} \right)}{P_3(a_2, b_2)} \\
& \left. + \frac{2b_2(8a_2^2 + 15a_2b_2 + 6b_2^2) \left( 3b_2 P_1(a_2, b_2) \mp 2\sqrt{3}\sqrt{P_2(a_2, b_2)} \right)^2}{(P_3(a_2, b_2))^2} \right\} \quad (4.42)
\end{aligned}$$

onde os polinômios  $P_1(a_2, b_2)$ ,  $P_2(a_2, b_2)$  e  $P_3(a_2, b_2)$  foram definidos para tornar a notação mais compacta e por serem expressões que se repetiam nas diferentes funções beta. Esses polinômios são:

$$\begin{aligned}
P_1(a_2, b_2) &= -3a_2^2 + a_2b_2 + b_2^2 \\
P_2(a_2, b_2) &= -2a_2^6 - 4a_2^5b_2 + 8a_2^4b_2^2 + 7a_2^3b_2^3 + 18a_2^2b_2^4 + 18a_2b_2^5 + 9b_2^6 \\
P_3(a_2, b_2) &= a_2^2 + a_2b_2 + b_2^2
\end{aligned} \quad (4.43)$$

Observamos, contudo, que mesmo com todos os sucessivos processos de simplificação, as expressões das funções do GR apresentadas acima ainda são complicadas e difíceis de analisar. Realizar uma expansão em série dessas funções em torno de  $a_2 = b_2 = 0$  não faz sentido pois, como pretendemos analisar um cenário onde esses acoplamentos decrescem, esperamos que na escala de altíssimas energias, as constantes  $a_2$  e  $b_2$  não possam ser consideradas pequenas. Desse modo, recorreremos a um método de solução numérica para determinar as raízes das funções (4.42) e depois analisamos o comportamento do sinal das funções sob perturbações de diferentes ordens de grandeza ao redor dos valores dessas raízes. Quando consideramos  $b_3$  e  $b_4$  com o sinal ‘-’ onde aparece ‘±’, não existe solução para a qual as 3 funções beta acima são positivas. Considerando,

então, o caso com sinal '+' onde aparece ' $\pm$ ' em (4.38) e (4.39), constatamos que:

- No intervalo  $0 \leq \frac{b_2}{a_2} < 0,62429879$ , temos  $\beta_{a_2} > 0$ .
- No intervalo  $\frac{b_2}{a_2} > 0,48792827$ , temos  $\beta_{b_2} > 0$ .
- No intervalo  $\frac{b_2}{a_2} > 0,49508332$ , temos  $\beta_{b_3} > 0$ .

Com isso, concluímos que, para que a simetria de Lorentz possa ser restaurada, a relação entre os valores de partida dos acoplamentos  $b_2$  e  $a_2$  deve ser tal que:

$$0,49508332 < \frac{b_2}{a_2} < 0,62429879 \quad (4.44)$$

Para verificar se a restauração de fato ocorre, é preciso ainda, analisar o sinal de  $\beta_{b_4}$ . Para obter essa função seguindo o mesmo procedimento perturbativo usado no caso das outras, mais funções de vértice precisariam ter sido calculadas. No entanto, como o vínculo  $\beta_{a_1} = \beta_{b_1}$  forneceu uma expressão de  $b_4$  como função apenas de  $a_2$  e  $b_2$  (Eq. (4.39)), podemos usar a regra da cadeia escrever a derivada de  $b_4$  com respeito a  $\mu$  e, então, usar as definições (4.18) das funções beta para obter uma fórmula para  $\beta_{b_4}$ :

$$\mu \frac{db_4}{d\mu} = \mu \frac{da_2}{d\mu} \frac{\partial b_4}{\partial a_2} + \mu \frac{db_2}{d\mu} \frac{\partial b_4}{\partial b_2} \quad \Rightarrow \quad b_4 \beta_{b_4} = a_2 \beta_{a_2} \frac{\partial b_4}{\partial a_2} + b_2 \beta_{b_2} \frac{\partial b_4}{\partial b_2} \quad (4.45)$$

onde, no último passo, foram identificadas as funções  $\beta_{a_2}$  e  $\beta_{b_2}$ .

Testando a expressão acima dentro do intervalo (4.44), constatamos que os valores obtidos para a função  $\beta_{b_4}$  são positivos no subintervalo:

$$0,50848002 < \frac{b_2}{a_2} < 0,62429879 \quad (4.46)$$

Portanto, no caso aqui considerado, se  $b_2/a_2$  estiver no intervalo (4.46) acima, a simetria de Lorentz é, de fato, restaurada.



## 5. Considerações Finais

A proposta inicial desse trabalho envolvia o estudo e o desenvolvimento de um modelo análogo à eletrodinâmica quântica escalar, estendida para conter termos com derivadas de ordem superior. Essa extensão se baseia na proposta de Horava [5] [6] e Lifshitz [7] de introduzir termos anisotrópicos com maior número de derivadas apenas na parte espacial da ação. Uma versão preliminar do nosso modelo, contendo tanto um setor escalar como um espinorial, foi estudada por M. Gomes *et al* [21]. Naquele trabalho, porém, os termos usuais, análogos àqueles proporcionais a  $a_1$  e  $b_1$  que aparecem na lagrangiana (3.2), foram omitidos. Quando os termos usuais não aparecem, as integrais  $J(x, y, z)$  têm solução exata (Ver Apêndice C) de modo que, não apenas as contribuições divergentes podem ser calculadas, mas também as partes finitas das funções 1PI até a aproximação de 1-loop. Isso que permite, por exemplo, determinar as primeiras correções radiativas à ação efetiva. Um questionamento que surge nesse cenário, porém, é se faria sentido escolher “desligar” os termos usuais. Afinal, sabemos que no nosso universo são eles e não os termos de derivadas mais altas que estão de fato presentes. Essa escolha, no entanto, pode fazer sentido em um contexto de desacoplamento entre escalas de energia, isto é, em um universo de altíssimas energias no qual a relevância dos termos com derivadas de ordem superior é muito maior que a dos termos usuais. No nosso trabalho, a escolha de manter os termos usuais “ligados” traz como consequência o aumento da dificuldade para determinar as partes finitas das integrais de 1-loop. Essa dificuldade, porém, não inviabiliza a determinação dos contratermos e nem a

análise da evolução dos parâmetros por meio do grupo de renormalização, ainda que o volume de cálculos seja considerável.

Outra característica do nosso estudo é a escolha relativamente simples de um termo de fixação de calibre do tipo Coulomb-Landau, por meio da qual os propagadores mistos  $\langle A_0 A_i \rangle$  dos campos de calibre se anulam. Uma escolha diferente desta, por exemplo, corresponde ao uso de um termo fixador não-local [19] [20] [21] [22] que, embora contenha tanto campos  $A_0$  quanto  $A_i$ , ainda é capaz de manter o desacoplamento entre as partes espacial e temporal. Nossa escolha, porém, segue a proposta de Iengo e Serone [9] segundo a qual, em um cenário de quebra da simetria de Lorentz, a escolha do calibre de Coulomb não traz problemas adicionais e é particularmente conveniente por sua simplicidade. No trabalho de Iengo e Serone [9], diferentemente do nosso, é analisada uma teoria de calibre fermiônica e uma série de simplificações é imposta de modo a viabilizar o estudo. Ao tentar construir uma versão análoga àquela para o caso de campos de matéria bosônicos sem impor as mesmas restrições, acabamos por nos deparar com uma estrutura muito mais complexa. Isso porque as simetrias que a lagrangiana (3.2) deve respeitar – unitariedade, simetria de calibre, invariância rotacional e invariância sob conjugação de carga – não impõem uma restrição suficientemente forte para evitar a inclusão de uma série de termos de interação que podem, e de fato são, gerados pelas correções radiativas. Além das simetrias da lagrangiana, o único fator limitante em relação à inclusão de novos vértices, corresponde à exigência de que a teoria permaneça renormalizável. Essa grande quantidade de vértices que a teoria deve conter, acaba por aumentar drasticamente o volume de cálculos e constitui, junto com a presença dos termos usuais nas integrais, uma das principais dificuldades encontradas neste trabalho.

A grande quantidade de vértices também influi na possibilidade de analisar de maneira concisa a evolução dos parâmetros com a escala de energia. De fato, para

---

chegar a alguma conclusão acerca da restauração da simetria de Lorentz, uma série de simplificações se fizeram necessárias. Assim, optamos por analisar o caso em que os termos usuais se mantêm com o mesmo peso de modo que, quando os termos de derivadas de ordem superior decrescem, temos uma velocidade da luz bem definida. Para garantir que esses pesos se mantivessem iguais, foi imposto, como vínculo adicional, que as funções beta dos acoplamentos dos termos usuais deveriam ser iguais. Depois disso, separamos a análise em 3 casos distintos e analisamos o terceiro deles. Para o caso analisado, constatamos a possibilidade de haver restauração da simetria de Lorentz para certos intervalos de valores relativos dos acoplamentos dos termos de derivadas altas.

Devemos destacar, por fim, que ainda há muito a ser feito no sentido de ampliar o estudo aqui apresentado. De forma imediata, podemos seguir com a análise dos outros 2 casos destacados no final do Capítulo 4. Ambos envolvem a solução de sistemas de inequações relativamente complicadas e provavelmente, assim assim como no terceiro caso, irão requerer uma abordagem numérica. O primeiro caso, que é aquele em que a velocidade da luz diminui quando reduzimos a escala de energia, é provavelmente o mais interessante dos três dentro da perspectiva de se estudar um modelo inflacionário de teoria quântica de campos. Nesse contexto, um passo necessário para dar sequência ao estudo da restauração da simetria de Lorentz, é o cálculo das contribuições divergentes das funções de 4 e 6 pontos. Esse cálculo, além de permitir a determinação de outros contratermos, complementando com isso o procedimento de renormalização, abriria a possibilidade de explorar novas equações do grupo de renormalização. A complexidade das funções do GR, em si, já configura mais uma oportunidade de pesquisa no sentido de explorar diferentes casos caracterizados por diferentes vínculos entre os parâmetros. Mais um ponto de possível interesse reside no desenvolvimento do cálculo das integrais  $J(x, y, z)$ . Até então, exceto quando os termos usuais são “desligados”, apenas as partes

divergentes dessas integrais puderam ser determinadas. O próprio caso de ausência de termos usuais carece de maior desenvolvimento, além de permitir a determinação de correções radiativas à ação efetiva, mais um ponto a ser explorado. Outra oportunidade pode surgir no estudo da estrutura das integrais dos diagramas de 2-loops que, como vimos, podem contribuir com a análise do grupo de renormalização mesmo em baixas ordens de perturbação.

# A. Equações de Euler-Lagrange e o Teorema de Noether

Em um dos apêndices da tese de doutoramento de P. R. S. Gomes [35], é apresentada uma dedução do teorema de Noether [1] para teorias com derivadas de terceira ordem. Aqui buscamos encontrar a forma geral das equações de Euler-Lagrange para teorias com um número arbitrário de derivadas a partir do princípio variacional. Em seguida fazemos uma dedução do teorema de Noether nessa situação e exibimos a expressão da corrente conservada associada.

Vamos supor que a densidade lagrangiana de uma teoria de campos possa depender de um campo  $\phi$  e de derivadas desse campo até ordem  $N \geq 1$ , ou seja:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi, \partial\phi, \partial^2\phi, \dots, \partial^N\phi] \quad (\text{A.1})$$

Quando o campo  $\phi$  varia de uma quantidade  $\delta\phi$ , a lagrangiana varia de uma quantidade  $\delta\mathcal{L}$  dada por:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \dots + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1}\dots\partial_{\mu_N}\phi)}\delta(\partial_{\mu_1}\dots\partial_{\mu_N}\phi) = \sum_{n=0}^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^n\phi)}\delta(\partial^n\phi) \quad (\text{A.2})$$

onde, na segunda igualdade, definimos uma notação mais compacta que será conveniente nas deduções que seguem.

De acordo com o princípio variacional, a ação  $S = \int dx\mathcal{L}$  deve se manter constante

de modo que  $\mathcal{L}$  não pode variar por mais do que uma divergência total irrelevante sob integração. Com isso em mente, podemos usar a regra do produto sucessivas vezes para reescrever a expressão (A.2) como:

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{n=0}^N (-1)^n \partial^n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^n\phi)} \delta\phi + \partial \left[ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \left( \partial^{m-1} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^m\phi)} \right) \partial^{n-m} \delta\phi \right] \quad (\text{A.3})$$

O segundo termo do lado direito da expressão acima é, de fato, uma divergência total e irá se anular sob integração. Assim, concluímos que a validade do princípio variacional requer que o primeiro termo do lado direito se anule. Portanto, para uma variação  $\delta\phi$  arbitrária, devemos ter:

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n \partial^n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^n\phi)} = 0 \quad (\text{A.4})$$

que são as *equações de Euler-Lagrange*.

De fato, é fácil ver que para o caso mais comum  $N = 1$ , a expressão acima se torna:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0$$

Por fim, sob a imposição da validade de (A.4), se  $\mathcal{L}$  varia apenas por uma divergência total, isto é, se  $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\theta^\mu$ , podemos definir uma corrente conservada  $j^\mu$  tal que  $\partial_\mu j^\mu = 0$  fazendo:

$$0 = \partial_\mu j^\mu = \delta\mathcal{L} - \partial_\mu\theta^\mu$$

e, comparando essa expressão com (A.3), podemos escrever:

$$j^\mu = \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \left( \partial^{m-1} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial^{n-1}\phi)} \right) \partial^{n-m} \delta\phi \right\} - \theta^\mu \quad (\text{A.5})$$

que é a corrente de Noether associada a  $\phi$ .

## B. Ação Fixadora de Calibre e Ação de Fadeev-Popov

Neste apêndice procuramos seguir as notas de aula de M. Veltman [56] para explicar o procedimento de fixação de calibre e o surgimento dos fantasmas de Fadeev-Popov.

Sob o ponto de vista do formalismo de integrais de trajetória, o funcional gerador das funções de Green ordinárias seria dado por (2.1) e poderíamos escrever<sup>1</sup>:

$$Z[J] = \int DA_\mu e^{i(S+J^\mu A_\mu)} \quad (\text{B.1})$$

onde a ação  $S$  é simplesmente a integral sobre as coordenadas do espaço-tempo da densidade lagrangiana (1.36). Entretanto, a integral de trajetória (B.1) soma sobre todos os possíveis  $A_\mu$ , inclusive aqueles relacionados meramente por uma transformação de calibre e que, do ponto de vista da ação  $S$  que define a teoria, são completamente equivalentes.

Procuramos então *fixar o calibre*, isto é, encontrar uma maneira de redefinir a teoria de modo que a integral de trajetória não se estenda sobre valores de  $A_\mu$  relacionados por transformações de calibre. Esperamos ainda que essa redefinição permita encontrar um propagador bem definido. Isso é feito acrescentando o novo termo (1.38) à lagrangiana original.

Conforme dito no Capítulo 1, esse novo termo deve ser escolhido de modo a *quebrar*

---

<sup>1</sup>Aqui iremos ignorar o fator de normalização  $\mathcal{N}$  que aparecia originalmente em (2.1) uma vez que este não é relevante para a discussão desenvolvida.

a invariância de calibre da teoria definida por (1.36) para que, com isso, essa teoria passe a depender de particulares escolhas de calibre. Essa quebra de simetria é o preço a se pagar para que seja possível definir um propagador não singular.

Veamos agora qual é o efeito sobre o funcional  $Z[J]$  da adição da ação fixadora de calibre à ação original da teoria. Levando em conta essa modificação, reescrevemos (B.1) como:

$$Z[J] = \int DA_\mu e^{i(S+J^\mu A_\mu) - i\frac{\eta}{2} \int dx G^2} \quad (\text{B.2})$$

onde a ação  $S$  que aparece na exponencial ainda é a integral da densidade lagrangiana antes da introdução do termo fixador de calibre (1.38).

Sob transformações de calibre, o termo de fonte  $J^\mu A_\mu$  se transforma como:

$$J^\mu A_\mu \longrightarrow J^\mu (A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda) = J^\mu A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu (\Lambda J^\mu) - \frac{1}{e} \Lambda \partial_\mu J^\mu \quad (\text{B.3})$$

onde, na última passagem foi feita uma integração por partes. O termo de superfície  $\partial_\mu (\Lambda J^\mu)$  deve se anular sob integração.

Então, para que o termo de fonte seja invariante de calibre, a fonte  $J^\mu$  deve ser tal que:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (\text{B.4})$$

Com essa escolha, entre os termos que aparecem na exponencial em (B.2), apenas o termo fixador irá depender da escolha de calibre. Em outras palavras, se uma transformação de calibre corresponde a fazer  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda$ , apenas o último termo na exponencial depende de uma particular função  $\Lambda(x)$ .

Por outro lado, conforme dito acima, a integração sobre o campo  $A_\mu$  carrega consigo o problema de, no sentido de transformações de calibre, integrar sobre infinitos valores

equivalentes desse campo para cada ponto do espaço-tempo. Porém, considerando  $A'_\mu$ , a forma de  $A_\mu$  para uma particular escolha da função  $\Lambda$ , podemos reescrever a medida de integração  $DA_\mu$  como  $DA'_\mu D\Lambda$  e separar a integral de trajetória em (B.2) de modo que:

$$Z[J] = \int DA'_\mu e^{i(S+J^\mu \cdot A_\mu)} \int D\Lambda e^{-\frac{i}{2\alpha} \int dx G^2} \quad (\text{B.5})$$

Como a integral de trajetória  $\int D\Lambda$  soma sobre todos os possíveis  $\Lambda$ , cuja dependência  $G$  contém e que representam as infinitas possibilidades de escolha de calibre, cada particular escolha de  $G$  corresponderia a diferentes maneiras de atribuir mais ou menos “peso” a determinada escolha de calibre em comparação com as outras. Para contornar isso, devemos modificar a definição dessa integral de modo que ela passe a independe de uma particular escolha da forma de  $G$ . Isso pode ser feito introduzindo um fator jacobiano que transforme a integral sobre todos os possíveis  $\Lambda$  em uma integral sobre todos os possíveis  $G$ , o que corresponde a assumir que a soma sobre todas as possíveis escolhas de calibre para cada particular  $A'_\mu$  deve, na verdade ser feita de modo que a liberdade de calibre seja diretamente representada por  $G$  e não por  $\Lambda$ . Assim, redefinimos (B.5) como:

$$Z[J] = \int DA'_\mu e^{i(S+J^\mu \cdot A_\mu)} \int D\Lambda \det\left(\frac{\delta G}{\delta \Lambda}\right) e^{-\frac{i}{2\alpha} \int dx G^2} \quad (\text{B.6})$$

Esse novo fator jacobiano  $\det\left(\frac{\delta G}{\delta \Lambda}\right)$  é chamado *determinante de Faddeev-Popov*. É possível mostrar que ele pode ser escrito na forma de uma integral de trajetória sendo dado por:

$$\det\left(\frac{\delta G}{\delta \Lambda}\right) = \int D\bar{C}DC e^{i \int dx \bar{C} \left(\frac{\delta G}{\delta \Lambda}\right) C} \quad (\text{B.7})$$

onde  $\bar{C}(x)$  e  $C(x)$  são campos não físicos anticomutantes introduzidos pela conveniência

de escrever o determinante jacobiano em forma integral e são chamados *fantasmas de Faddeev-Popov*. Assim, lembrando que  $DA'_\mu D\Lambda = DA_\mu$ , podemos escrever a versão final do funcional gerador de uma teoria de calibre como:

$$Z[J] = \int DA_\mu D\bar{C} DC e^{i(S+S_{\text{GF}}+S_{\text{F-P}}+J^\mu \cdot A_\mu)} \quad (\text{B.8})$$

onde  $S$  é a ação invariante de calibre original,  $S_{\text{GF}}$  é a ação fixadora de calibre, dada pela integral sobre as coordenadas do espaço-tempo da densidade lagrangiana (1.38) e  $S_{\text{F-P}}$  é a então chamada *ação de Faddeev-Popov*, sendo dada por:

$$S_{\text{F-P}} = \int d^D x \bar{C} \left( \frac{\delta G}{\delta \Lambda} \right) C \quad (\text{B.9})$$

Embora tenhamos, por simplicidade, partido do exemplo abeliano da eletrodinâmica (Eq.(1.36)) essa particularização se refletiu somente no que se referia à singularidade do propagador. Ainda assim, o problema do propagador dos campos de calibre é comum a qualquer teoria de calibre. Mesmo que, em teorias não abelianas, possamos mostrar que o campo de calibre adquire massa por meio do mecanismo de Higgs, por exemplo, em sua definição fundamental essas teorias carregam o mesmo problema da singularidade do propagador livre. Desse modo, podemos afirmar que a discussão acima é bastante geral no sentido de se estender à teorias não abelianas simplesmente considerando os campos envolvidos, inclusive os fantasmas, como quantidades Lie-avaliadas e tomando alguns traços de produtos de geradores  $T_a$  onde for necessário. A inclusão de termos de acoplamento à matéria na teoria, por sua vez, exige somente a integração correspondente desses campos no funcional gerador e também não altera consideravelmente o conteúdo aqui discutido.

Por fim, devemos notar que, como neste trabalho nos restringimos a considerar teorias abelianas, a ação de Fadeev-Popov se desacopla da teoria podendo, portanto, ser

ignorada. Isso é assim pois, conforme explicado acima, esses termos vêm da variação do termo de fixação de calibre que, por sua vez, depende da variação de  $A_\mu$ , que no caso abeliano é apenas  $\partial_\mu \Lambda$ . Então, para o calibre de Coulomb, por exemplo, o termo fixador se transforma como:

$$G = \partial_i A_i \longrightarrow \partial_i \left( A_i + \frac{1}{e} \partial_i \Lambda \right) = G + \Delta \Lambda, \quad (\text{B.10})$$

de modo que:

$$\frac{\delta G}{\delta \Lambda} = \frac{1}{e} \Delta \quad (\text{B.11})$$

onde  $\Delta = \partial_i \partial_i$  é simplesmente um operador laplaciano.

Assim, o objeto  $\left( \frac{\delta G}{\delta \Lambda} \right)$  é independente de  $A_\mu$  e a ação  $S_{\text{F-P}}$  não terá termos de interação entre os fantasmas e os campos de calibre. De fato, para o exemplo do calibre de Coulomb, redefinindo os campos  $\bar{C}$  e  $C$  para absorver o fator  $1/e$ , teremos:

$$S_{\text{F-P}} = \int d^D x \bar{C} \Delta C, \quad (\text{B.12})$$

de modo que a dinâmica dos fantasmas é completamente independente dos campos físicos da teoria.



# C. Cálculo das Integrais em 1-Loop

## C.1. Cálculo da Parte Divergente das Integrais

Nesta seção iremos demonstrar como deduzir a expressão (3.37) que representa a parte divergente das integrais (3.36). A dedução é feita em um dos apêndices da tese de doutoramento de P. R. S. Gomes [35] e também mostrada no trabalho [10]. Essas integrais surgem nos cálculos das correções de 1-loop às funções de Green 1PI da teoria descrita pela densidade lagrangiana (3.2) e sua forma geral é:

$$J(x, y, z) = \int [dk_0][d^d \vec{k}] \frac{k_0^x |\vec{k}|^y}{[k_0^2 - b_1^2 \vec{k}^2 - b_2^2 \vec{k}^4 - m^2 + i\epsilon]^z} \quad (\text{C.1})$$

onde  $d$ ,  $x$ ,  $y$  e  $z$  devem ser tais que essas integrais sejam no máximo quarticamente divergentes. Aqui, passamos a explicitar um termo  $i\epsilon$  que desloca o pólo do integrando, bem como escrevemos  $[dk] = [dk_0][d^d \vec{k}]$  de modo a explicitar a separação entre as partes temporal e espacial.

Ao executar uma rotação de Wick para  $J(x, y, z)$ , fazemos  $k_0 \rightarrow ik_0$  e, com isso, passamos a ter:

$$J(x, y, z) = i^{1+x-2z} \int [dk_0][d^d \vec{k}] \frac{k_0^x |\vec{k}|^y}{[k_0^2 + b_1^2 \vec{k}^2 + b_2^2 \vec{k}^4 + m^2]^z} \quad (\text{C.2})$$

Partindo da definição da função  $\Gamma(z)$  e fazendo uma mudança de variável  $t \rightarrow \gamma A$ , temos:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} = A^z \int_0^\infty d\gamma \gamma^{z-1} e^{-\gamma A} \Rightarrow \frac{1}{A^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty d\gamma \gamma^{z-1} e^{-\gamma A} \quad (\text{C.3})$$

onde  $A^z$  representa o denominador do integrando de (C.2).

A parametrização de Schwinger corresponde a substituir a transformação acima no integrando de (C.2). Depois disso, reorganizando essa expressão apropriadamente, temos:

$$J(x, y, z) = \frac{i^{1+x-2z}}{\Gamma(z)} \int_0^\infty d\gamma \gamma^{z-1} e^{-\gamma m^2} \int [dk_0] k_0^x e^{-\gamma k_0^2} \int [d^d \vec{k}] |\vec{k}|^y e^{-\gamma(b_1^2 \vec{k}^2 + b_2^2 \vec{k}^4)} \quad (\text{C.4})$$

A integral em  $k_0$  pode ser feita diretamente bastando para isso, utilizar a definição da função  $\Gamma(z)$  e fazer uma mudança de variável. Quando o expoente  $x$  é um número ímpar, o integrando é uma função ímpar e imediatamente temos que a integral se anula. Se  $x$  é um número par, por outro lado, temos:

$$I_{k_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)} k_0^x e^{-\gamma k_0^2} = \frac{1}{2\pi\gamma^{(x+1)/2}} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \quad (\text{C.5})$$

A seguir podemos passar a integral da parte espacial para coordenadas esféricas, obtendo:

$$I_{\vec{k}} = \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} |\vec{k}|^y e^{-\gamma(b_1^2 \vec{k}^2 + b_2^2 \vec{k}^4)} = \frac{2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \int_0^\infty d|\vec{k}| |\vec{k}|^{d+y-1} e^{-\gamma b_1^2 |\vec{k}|^2 - \gamma |\vec{k}|^4} \quad (\text{C.6})$$

O resultado dessa integral pode ser escrito em termos da função hipergeométrica confluyente  ${}_1F_1$ , sendo dado por:

$$I_{\vec{k}} = \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} \left\{ \frac{1}{(\gamma b_2^2)^{(d+y)/4}} \Gamma\left(\frac{d+y}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{d+y}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma b_1^4}{4b_2^2}\right) - \frac{\gamma b_1^2}{(\gamma b_2^2)^{(d+y+2)/4}} \Gamma\left(\frac{d+y+2}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{d+y+2}{4}, \frac{3}{2}, \frac{\gamma b_1^4}{4b_2^2}\right) \right\} \quad (C.7)$$

As funções  ${}_1F_1$  que aparecem acima podem, por sua vez, ser expandidas em torno de  $\gamma = 0$  e essa expansão é dada por:

$$\begin{aligned} {}_1F_1\left(\frac{d+y}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma b_1^4}{4b_2^2}\right) &= 1 + \frac{(d+y)b_1^4}{8b_2^2}\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) \\ {}_1F_1\left(\frac{d+y+2}{4}, \frac{3}{2}, \frac{\gamma b_1^4}{4b_2^2}\right) &= 1 + \mathcal{O}(\gamma) \end{aligned} \quad (C.8)$$

onde o termo de ordem  $\gamma$  na segunda linha foi desconsiderado porque a função  ${}_1F_1$  ali expandida aparece em (C.7) multiplicada por um fator  $\gamma^{1/2}$  adicional.

Substituindo (C.8) em (C.7) e esta, por sua vez, em (C.4) juntamente com o resultado obtido em (C.5), nos resta fazer a integral em  $\gamma$ . A integral (C.1) é divergente para  $k_0 = \pm\sqrt{b_1^2\vec{k}^2 + b_2\vec{k}^4 + m^2}$ . Após executar a rotação de Wick, o comportamento divergente passa a se manifestar no limite  $\gamma \rightarrow 0$ . Isso justifica tomar apenas os primeiros termos nas expansões (C.8), já que estes serão os termos dominantes nesse caso. Assim, realizando a integração em  $\gamma$ , chegamos finalmente a:

$$\begin{aligned} J(x, y, z) &= i^{1+x-2z} \frac{2^{-d-3}\pi^{-\frac{d}{2}-1} [(-1)^x + 1] i^{z-x-1} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) (b_2^2)^{\frac{1}{4}(-d-y)-1}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma(z)} \times \\ &\left\{ b_2^2 e^{\frac{i\pi x}{4}} (-1)^{\frac{1}{8}(-d-y+2)} \Gamma\left(\frac{d+y}{4}\right) (im^2)^{\frac{1}{4}(d+2x+y-4z+2)} \Gamma\left(\frac{-d-2x-y+4z-2}{4}\right) \right. \\ &- ib_1^2 b_2 e^{2i\pi x} (-1)^{\frac{1}{8}(-d-14x-y)} \Gamma\left(\frac{d+y+2}{4}\right) (im^2)^{\frac{1}{4}(d+2x+y-4z)} \Gamma\left(\frac{-d-2x-y+4z}{4}\right) \\ &\left. + \frac{i}{8} b_1^4 e^{\frac{i\pi x}{4}} (-1)^{\frac{1}{8}(-d-y+2)} (d+y) \Gamma\left(\frac{d+y}{4}\right) (im^2)^{\frac{1}{4}(d+2x+y-4z-2)} \Gamma\left(\frac{-d-2x-y+4z+2}{4}\right) \right\} \quad (C.9) \end{aligned}$$

Definindo  $\omega \equiv (4z - 2x - y - d)/4$  e usando o fato de que a expressão acima se anula para  $x$  ímpar para calcular as exponenciais complexas, podemos escrever o resultado

de forma simplificada:

$$J(x, y, z) = \frac{i^{1+x-2z}}{(4\pi)^{(d+2)/2}} \frac{[(-1)^x + 1]}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(z)} \times \sum_{n=0}^2 \frac{(-b_1^2)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{d+y+2n}{4}\right)\Gamma\left(\omega + \frac{(n-1)}{2}\right)}{(b_2^2)^{(d+y+2n)/4}(m^2)^{\omega + \frac{(n-1)}{2}}} \quad (\text{C.10})$$

que é o resultado apresentado em (3.37).

## C.2. Truque de Feynman e Integrais com Mais de um Propagador

O truque de Feynman para o cálculo de integrais de 1-loop, cuja expressão é dada em (3.50), é descrito por 't Hooft e Veltman em [33]. O desenvolvimento feito em (C.3) pode ser facilmente generalizado para o caso de denominadores diferentes, resultando em:

$$\frac{1}{A^{z_a} B^{z_b}} = \frac{1}{\Gamma(z_a)\Gamma(z_b)} \int_0^\infty da db a^{z_a-1} b^{z_b-1} e^{-aA-bB} \quad (\text{C.11})$$

Utilizando a identidade  $\delta(f(\gamma)) = \frac{1}{|f'(\gamma_0)|} \delta(\gamma - \gamma_0)$ , onde  $\gamma_0$  é raiz de  $f(\gamma)$ , podemos mostrar que:

$$1 = \int_0^\infty d\gamma \frac{1}{\gamma} \delta\left(1 - \frac{1}{\gamma}(a+b)\right)$$

e, inserindo essa expressão no integrando de (C.11), temos:

$$\frac{1}{A^{z_a} B^{z_b}} = \frac{1}{\Gamma(z_a)\Gamma(z_b)} \int_0^\infty da db d\gamma \frac{1}{\gamma} \delta\left(1 - \frac{1}{\gamma}(a+b)\right) a^{z_a-1} b^{z_b-1} e^{-aA-bB} \quad (\text{C.12})$$

A seguir, fazendo as mudanças de variáveis  $a \rightarrow \gamma x$  e  $b \rightarrow \gamma y$  e usando o delta de Dirac para fazer a integração em  $y$ , temos:

$$\frac{1}{A^{z_a} B^{z_b}} = \frac{1}{\Gamma(z_a)\Gamma(z_b)} \int_0^1 dx x^{z_a-1} (1-x)^{z_b-1} \int_0^\infty d\gamma \gamma^{z_a+z_b-1} e^{-\gamma[xA+(1-x)B]} \quad (\text{C.13})$$

sendo que, como o delta de Dirac  $\delta(1-x-y)$  garante que  $x+y=1$ , a região de integração em  $x$  pode ser limitada ao intervalo  $[0, 1]$ .

A integral em  $\gamma$ , de acordo com (C.3), é:

$$\int_0^\infty d\gamma \gamma^{z_a+z_b-1} e^{-\gamma[xA+(1-x)B]} = \frac{\Gamma(z_a+z_b)}{[xA+(1-x)B]^{z_a+z_b}} \quad (\text{C.14})$$

Por fim, substituindo (C.14) em (C.13), chegamos a:

$$\frac{1}{A^{z_a} B^{z_b}} = \frac{\Gamma(z_a+z_b)}{\Gamma(z_a)\Gamma(z_b)} \int_0^1 dx \frac{x^{z_a-1} (1-x)^{z_b-1}}{[xA+(1-x)B]^{z_a+z_b}} \quad (\text{C.15})$$

que é a fórmula do truque de Feynman (3.50), dada no Capítulo 3.

### C.3. Cálculo Exato na Ausência de Termos Usuais

Na ausência de termos usuais, isto é, quando tomamos  $a_1 = 0$  ou  $b_1 = 0$ , os propagadores deixam de ter os termos proporcionais a  $\vec{k}^2$  em seus denominadores. Nesse caso, é possível efetuar o cálculo exato das integrais do tipo  $J(x, y, z)$  [10] [21], que são dadas por:

$$J(x, y, z) = \int [dk_0] [d^d \vec{k}] \frac{k_0^x |\vec{k}|^y}{[k_0^2 - b\vec{k}^4 - m^2 + i\epsilon]^z} \quad (\text{C.16})$$

onde optamos por escrever  $b$  no lugar de  $b_2^2$ .

O primeiro passo, assim como antes, consiste efetuar uma rotação de Wick fazendo  $k_0 \rightarrow ik_0$ . Em seguida, a integração em  $k_0$  é efetuada:

$$\begin{aligned}
J(x, y, z) &= i^{x-2z} \int [dk_0][d^d \vec{k}] \frac{k_0^x |\vec{k}|^y}{[k_0^2 + b\vec{k}^4 + m^2]^z} \\
&= i^{x-2z} \frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2z-x-1}{2}\right)}{2\Gamma(z)} \int [d^d \vec{k}] \frac{|\vec{k}|^y}{[b\vec{k}^4 + m^2]^{(2z-x-1)/2}}
\end{aligned} \tag{C.17}$$

A integral na parte espacial, por sua vez, pode ser escrita em coordenadas esféricas.

Com isso, temos:

$$J(x, y, z) = i^{x-2z} \frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2z-x-1}{2}\right)}{2\Gamma(z)} \left( \frac{2\pi^{d/2}}{(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \right) \int_0^\infty dk \frac{k^{y+d-1}}{[bk^4 + m^2]^{(2z-x-1)/2}} \tag{C.18}$$

e, mudando para a variável  $u = k^2$ , ficamos com:

$$J(x, y, z) = \frac{i^{x-2z}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2z-x-1}{2}\right)}{2\Gamma(z)} \left( \frac{2\pi^{d/2}}{(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \right) \int_0^\infty du \frac{u^{(y+d-1)/2}}{[bu^2 + m^2]^{(2z-x-1)/2}} \tag{C.19}$$

Notando que:

$$\left( \frac{\partial}{\partial b} \right)^n \frac{u^{\alpha-2n}}{[bu^2 + m^2]^{\beta-n}} = \frac{u^\alpha}{[bu^2 + m^2]^\beta},$$

a integral em  $u$  que aparece em (C.19) pode ser escrita como:

$$\left( \frac{\partial}{\partial b} \right)^{(y-d+1)/2} \left\{ b^{-(4z-2x-y+d-3)/4} \int_0^\infty du \frac{u^{d-1}}{[u^2 + \Delta]^{(4z-2x-y+d-3)/4}} \right\} \tag{C.20}$$

onde  $\Delta = m^2/b$  e sendo que a integral em  $u$  em (C.20) é dada por:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty du \frac{u^{d-1}}{[u^2 + \Delta]^{(4z-2x-y+d-3)/4}} \\
&= \left( \frac{(2\pi)^d \Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \right) \frac{\Gamma((4z-2x-y-d-3)/4)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma((4z-2x-y+d-3)/4)} \left( \frac{1}{\Delta} \right)^{(4z-2x-y-d-3)/4}
\end{aligned} \tag{C.21}$$

Substituindo (C.21) em (C.20), efetuando as operações de derivação em  $b$  e depois substituindo o resultado em (C.19), chegamos a:

$$J(x, y, z) = \frac{i^{x-2z}}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2z-x-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4z-2x-y-d-3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{2-d}{2}\right)}{2\Gamma(z) \Gamma\left(\frac{4z-2x-y+d-3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1-y}{2}\right)} \frac{b^{-(y+1)/2}}{m^{(4z-2x-y-d-3)/2}} \quad (\text{C.22})$$

O resultado acima também pode ser obtido seguindo o procedimento da Seção C.1 deste apêndice. Fazendo  $b_1 = 0$  e  $b_2 = b$  em (C.7) e considerando apenas o primeiro termo da expansão (C.8), o que corresponde a tomar:

$${}_1F_1\left(\frac{d+y}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma b_1^4}{4b^2}\right) \approx 1,$$

uma expressão mais simples para  $I_{\vec{k}}$  é obtida e o mesmo desenvolvimento descrito naquela seção pode ser repetido normalmente.



# Referências Bibliográficas

- [1] E. Noether, *Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse* (1918) 235–257.
- [2] P. A. M. Dirac, *Proc.Roy.Soc.* **A133** (1931) 60.
- [3] S. W. Hawking and T. Hertog, *Phys.Rev.* **D65** (2002) 103515.
- [4] I. Antoniadis, E. Dudas, and D. M. Ghilencea, *Nucl.Phys.* **B767** Issues 1-2 (2007) 29-53.
- [5] P. Horava, *Phys.Rev.* **D79** (2009) 084008.
- [6] P. Horava, *JHEP* **03** (2009) 020.
- [7] E. M. Lifshitz, *Zh.Eksp.Teor.Fiz.* **11** (1941) 255 & 269.
- [8] P. R. S. Gomes, *Int.J.Mod.Phys.* **A31** (2016) 1630009.
- [9] R. Iengo and M. Serone, *Phys.Rev.* **D81** (2010) 125005.
- [10] P. R. S. Gomes and M. Gomes, *Phys.Rev.* **D85** (2012) 085018.
- [11] H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, *Nuovo Cim.* **1** (1955) 205.
- [12] S. Weinberg, *Phys.Rev.* **118** (1960) 838.
- [13] W. Zimmermann, *Commun.Math.Phys.* **11** (1968) 1.

- [14] W. Zimmermann, *Commun.Math.Phys.* **15** (1969) 208.
- [15] D. Anselmi and M. Halat, *Phys.Rev.* **D76** (2007) 125011.
- [16] R. Iengo, J. G. Russo and M. Serone, *JHEP* **11** (2009) 020.
- [17] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **B12** (1972) 20-26.
- [18] G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl.Phys.* **B44-1** (1972) 189-213.
- [19] C. F. Farias, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, and A. J. da Silva, *Phys.Rev.* **D85** (2012) 127701.
- [20] C. F. Farias, J. R. Nascimento, and A. Yu. Petrov, *Phys.Lett.* **B719** (2013) 196.
- [21] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, J. M. Queiruga, and A. J. da Silva, *Phys. Rev.* **D92** (2015) 065028.
- [22] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, and A. J. da Silva, arXiv:1607.01240 [hep-th] 5 Jul 2016.
- [23] M. Gomes, J. Queiruga, and A. J. da Silva, *Phys.Rev.* **D92** (2015) 025050.
- [24] C. Mergulhão, C. E. I. Carneiro, *Phys.Rev.* **B59** (1998) 13954.
- [25] E. Witten, *Nucl.Phys.* **B185** (1981) 513.
- [26] E. Witten, *Nucl.Phys.* **B202** (1982) 253.
- [27] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys.Rev.* **D7** (1973) 1888.
- [28] R. Jackiw, *Phys.Rev.* **D9** (1974) 1686.
- [29] S. Weinberg, *Phys.Rev.* **D7** (1973) 2887.
- [30] B. S. DeWitt, *Phys.Rev.* **162** (1967) 1195.

- [31] B. S. DeWitt, *Phys.Rev.* **162** (1967) 1239.
- [32] G. 't Hooft, *Acta Universitatis Wratislavenensis* **38** (1975).
- [33] G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B153** (1979) 365-401.
- [34] F. Marques, M. Gomes, and A. J. da Silva, to be published.
- [35] P. R. S. Gomes, *Aspectos de Teoria de Campos e Mecânica Estatística*, tese de doutoramento, Brasil: Universidade de São Paulo (2013).
- [36] E. A. Gallegos, *Quebra Dinâmica de Simetria e Finitude em Modelos Supersimétricos de Gauge em 3D*, tese de doutoramento, Brasil: Universidade de São Paulo (2011).
- [37] M. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos*. EDUSP, 2015 (2nd ed).
- [38] W. Greiner, and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, 1996.
- [39] M. E. Peskin, and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, New York, 1995.
- [40] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996 (2nd ed).
- [41] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*. Wiley, 2010 (2nd ed).
- [42] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*. Westview, 2001 (2nd ed).
- [43] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2006.
- [44] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.
- [45] A. Das, *Field Theory: A Path Integral Approach*. World Scientific, 1993.

- [46] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, 2010 (2nd ed).
- [47] J. Collins, *Renormalization*. Cambridge University Press, 1984.
- [48] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2013 (2nd ed).
- [49] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*. Cambridge University Press, 1985.
- [50] U. Wiese, *An Introduction to Lattice Field Theory*. Universität Bern, 2009.
- [51] E. S. Abers and B. W. Lee, *Gauge Theories*. PHYSICS REPORTS (Sec. C of Phys.Lett.) **9** No. 1 (1973) 1-141.
- [52] D. Bailin and A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*. IOP Publishing Ltd, 1994.
- [53] P. Pascual and R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*, Springer-Verlag, 1984.
- [54] B. S. DeWitt, *A Gauge Invariant Effective Action*, Santa Barbara preprint NSF-ITP-80-31, 1980.
- [55] D. Boulware, *Gauge Dependence of the Effective Action*, University of Washington preprint RLO-1388-822, 1980.
- [56] M. Veltman, *Path Integrals, Feynman Rules, Gauge Theories*, University of Utrecht, International School of Particle Physics, Basko-Polje, 1974.
- [57] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, 2005 (6th ed).

- 
- [58] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, 1972.
- [59] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products: Corrected and Enlarged Edition*. Academic Press Inc., San Diego, 1980.