

Lista de Exercícios 11

Entrega: 06 de junho de 2013

Entregar exercícios marcados com “●”.

1. Utilize o método de separação de variáveis em coordenadas cartesianas para resolver o poço de potencial infinito cúbico (ou “partícula na caixa”) $V(x, y, z) = 0$ para x, y e z no intervalo $(0, a)$ e infinito fora dessa região.

(a) Encontre as funções de onda para os estados estacionários e suas energias correspondentes.

(b) Nomeie as energia distintas por $E_1, E_2, E_3, \dots$, em ordem crescente de energia. Encontre E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 e E_6 . Determine a degenerescência de cada uma desses níveis de energia, ou seja, o número de diferentes estados que possuem a mesma energia.

- 2. Utilize o método de separação de variáveis em coordenadas cartesianas para resolver o Oscilador Harmônico tridimensional:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2). \quad (2.1)$$

(a) Encontre as autofunções e autovalores correspondentes.

(b) Qual a degenerescência do nível de energia $E = \hbar\omega\left(\frac{3}{2} + 5\right)$? Faça uma tabela dos diferentes (n_x, n_y, n_z) correspondentes.

3. Da definição de $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ obtenha as expressões dos L_i com $i = x, y, z$ e de L^2 em coordenadas esféricas.

4. Construa Y_0^0 e Y_2^1 . Você deve utilizar as fórmulas:

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} P_l(x), \quad P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l \quad (4.1)$$

$$Y_l^m(\theta, \phi) \equiv \varepsilon \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta). \quad (4.2)$$

5. Mostre que para $l = m = 0$ além da solução regular P_0^0 temos a solução singular (não normalizável): $\Theta(\theta) = A \log \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$ para a equação:

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [l(l+1) \sin^2\theta - m^2] \Theta = 0 \quad (5.1)$$

6. Utilize a última equação do exercício 4 para encontrar $Y_l^l(\theta, \phi)$ e $Y_3^2(\theta, \phi)$. Cheque que, para valores apropriados dos parâmetros l e m , elas satisfazem a equação de momento angular

$$\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} = -l(l+1) \sin^2\theta Y. \quad (6.1)$$

- 7. Uma partícula de massa m está aprisionada numa caixa esférica de raio a (isto é $V(r) = 0$ para $r < a$ e $V(r) = \infty$ para $r \geq a$). Resolva a equação de Schrödinger radial (por série de potências) e obtenha os possíveis níveis de energia.

8. Considere um oscilador harmônico isotrópico $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Resolva a equação de Schrödinger radial (por série de potências) e ache os possíveis níveis de energia.