MECÂNICA QUÂNTICA I – 4300403

Primeiro Semestre de 2013

Lista de Exercícios 10

Entrega: 27 de maio de 2013

Entregar exercícios marcados com "●".

1. Definindo a base $|x\rangle$ tal que: $|f\rangle = \int dx\ |x\rangle\, f(x)$ e usando a definição de produto escalar no espaço de funções:$\langle g|f\rangle = \int dx\, g^*(x)f(x)$, verifique que:
   (a) $\langle y|x\rangle = \delta(y-x)$.
   (b) $f(x) = \langle x|f\rangle$.
   (c) $\int dx\ |x\rangle\,\langle x| = \hat{1}$.
   (d) Usando: $\langle f|\hat{x}f\rangle = \int dx\, f^*(x)xf(x)$ e a fórmula do item (c) acima verifique que: $\langle x|\hat{x}|f\rangle = xf(x)$ e portanto que $\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle$, pois f é uma função qualquer.

2. Se $f_n(x)$ é uma base ortonormal: $\langle f_n|f_m\rangle = \delta_{nm}$ e se uma função qualquer $f(x)$ se escreve como $f(x) = \sum_n c_n f_n(x)$ onde $c_n = \langle f_n|f\rangle$ e se $|f\rangle = \int dx\ |x\rangle\, f(x)$ e $|f_n\rangle = \int dx\ |x\rangle\, f_n(x)$, verifique que:
   (a) $|f\rangle = \sum_n c_n\,|f_n\rangle$.
   (b) $\sum_n |f_n\rangle\,\langle f_n| = \hat{1}$.

3. Se o operador $\hat{p}$ é definido por $\hat{p}\,|f\rangle \equiv |-i\hbar\frac{df}{dx}\rangle$, isto é, quando $|f\rangle$ é representado como $|f\rangle = \int dx f(x)\,|x\rangle$, então $\hat{p}\,|f\rangle$ é representado por $|\hat{p}f\rangle = \int dx\left(-i\hbar\frac{df(x)}{dx}\right)|x\rangle$. Considerando também que as auto-funções de $\hat{p}$ são definidas por $\hat{p}\,|p\rangle = p\,|p\rangle$:
   (a) Mostre que $p(x) = \langle x|p\rangle$ é dada por $Ae^{\mathrm{i}px/\hbar}$. Determine A usando a condição $\langle p'|p\rangle = \delta(p'-p)$ e a completeza da base $|x\rangle$ (isto é, o resultado 1(c)).
   (b) Mostre que: $\int dp\ |p\rangle\,\langle p| = \hat{1}$.
   (c) Mostre que: $f(p) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\mathrm{i}px/\hbar} f(x)$ e que: $f(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\mathrm{i}px/\hbar} f(p)$.

● 4. Considere a função de onda de uma partícula no estado fundamental do Oscilador Harmônico. Qual é a probabilidade de encontra-la na região classicamente permitida, isto é, no intervalo $(-x_0, x_0)$ onde $\frac{m\omega^2 x_0}{2} = \frac{\hbar\omega}{2}$ (deixe o resultado em função de uma integral adimensional)? Encontre agora a função de onda correspondente no espaço de momentos.

5. Mostre que $\langle f|xf\rangle = \int dp\, f^*(p)\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right) f(p)$. De uma maneira mais geral, mostre também que para $Q(\hat{x},\hat{p})$ temos:

$$\langle Q(x,p)\rangle = \begin{cases} \int dx\,\Psi^*(x)\hat{Q}\left(x, \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x) \\ \int dp\,\Psi^*(p)\hat{Q}\left(-\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial p}, p\right)\Psi(p) \end{cases} \tag{5.1}$$

6. (a) Prove a seguinte identidade para comutadores: $[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$.
   (b) Mostre que $[\hat{x}^n, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar n\hat{x}^{n-1}$.
   (c) Mostre que, de uma maneira geral, $[f(\hat{x}), \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar\frac{df}{d\hat{x}}$, para qualquer função $f(\hat{x})$.

7. Prove o **Princípio da Incerteza**, relacionado a incerteza na posição $(A = x)$ à incerteza na energia $(B = p^2/2m + V(x))$: $\sigma_A\sigma_B \geq \frac{\hbar}{2m}\,|\langle p\rangle|$.

8. Aplique a equação: $\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{Q}]\rangle$ aos seguintes casos:
   (a) $\hat{Q} = \hat{1}$ (conservação de probabilidade).
   (b) $\hat{Q} = \hat{x}$ (prova da hipótese $\langle p\rangle = m\frac{d}{dx}\langle x\rangle$).
   (c) $\hat{Q} = \hat{H}$ (conservação de energia).
   (d) $\hat{Q} = \hat{p}$ (teorema de Ehrenfest: $\frac{d}{dt}\langle p\rangle = \left\langle -\frac{dV}{dx}\right\rangle$).

9. **Teorema do Virial**. Utilize a equação $\frac{d}{dt}\langle\hat{Q}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{Q}]\rangle$ para $\hat{Q} = \hat{x}\hat{p}$ e mostre que: $\frac{d}{dt}\langle xp\rangle = 2\langle T\rangle - \left\langle x\frac{dV}{dx}\right\rangle$ onde $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$. Para um estado estacionário, mostre que $\frac{d}{dt}\langle xp\rangle = 0$, de onde segue que $2\langle T\rangle = \langle x\frac{dV}{dx}\rangle$.

10. **Medidas seqüenciais**. Um operador $\hat{A}$, representado um observável A, tem dois autoestados normalizáveis ψ_1 e ψ_2, com autovalores a_1 e a_2, respectivamente. Um operador $\hat{B}$, representado um observável B, tem dois autoestados normalizáveis ϕ_1 e ϕ_2, com autovalores b_1 e b_2. Os autoestados estão relacionados por $\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5, \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$.
    (a) O observável A é medido, e o valor a_1 é obtido. Qual é o estado do sistema (imediatamente) apos a medida?
    (b) Se B é medido, quais os possíveis resultados e qual são as suas probabilidades?
    (c) Logo apos a medida de B, A é medido novamente. Qual a probabilidade de obter a_1? (Note que a resposta seria bem diferente se tivéssemos dito qual foi o resultado da medida de B)

11. Encontre no espaço de momentos a função de onda $\Phi_n(p,t)$ para o n-ésimo estado estacionário do poço de potencial infinito. Desenhe $|\Phi_1(p,t)|^2$ e $|\Phi_2(p,t)|^2$, como funções de p (preste atenção aos pontos $p = \pm n\pi\hbar/2$). Use $\Phi_n(p,t)$ para calcular o valor esperado de p^2.

12. Considere a função de onda

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2n\lambda}} e^{i2\pi x/\lambda}, & -n\lambda < xn\lambda \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \tag{12.1}$$

    onde n é algum inteiro positivo. Esta função é puramente senoidal (com comprimento de onda λ) no intervalo $-n\lambda < x < n\lambda$, porem ela ainda carrega vários valores de momento, já que as oscilações não continuam até o infinito. Encontre a função de onda no espaço dos momentos $\Phi(p,0)$. Desenhe os gráficos de $|\Psi(x,0)|^2$ e $|\Phi(p,0)|^2$, e determine suas larguras σ_x e σ_p (como a distancia entre zeros de cada lado do pico principal). Note o que acontece com as larguras quando $n \to \infty$. Usando σ_x e σ_p como estimativas de Δx e Δp, cheque que o principio de incerteza é satisfeito. CUIDADO: Se você tentar calcular σ_p, você vai ter uma surpresa. Você consegue encontrar o problema?

13. (a) Escreva a "Equação de Schrödinger" dependente do tempo no espaço dos momentos, para um partícula livre e resolva-a.
    (b) Encontre $\Phi(p,0)$ para o pacote de onda gaussiano em movimento e construa $\Phi(p,t)$ para este caso. Também construa $|\Phi(p,t|^2$ e note que ele é independente do tempo.
    (c) Calcule $\langle p\rangle$ e $\langle p^2\rangle$ calculando as integrais apropriadas envolvendo Φ.
    (d) Mostre que $\langle H\rangle = \langle p\rangle^2/2m + \langle H_0\rangle$ (onde o índice 0 denota o pacote gaussiano estacionário) e comente o resultado.