

Lista de Exercícios 9

Entrega: 20 de maio de 2013

Entregar exercícios marcados com “●”.

1. Espaço de Hilbert

- (a) Mostre que o conjunto de funções de quadrados integráveis é um espaço vetorial, isto é, verifique que a soma de funções e o produto por um escalar, satisfazem as propriedades correspondentes dessas operações num espaço vetorial. SUGESTÃO: O principal problema é mostrar que a soma de duas funções de quadrado integrável também é de quadrado integrável. Utilize a *identidade de Schwarz*.
- (b) Mostre que a integral: $\langle f|g \rangle = \int_a^b dx f(x)^* g(x)$ satisfaz as propriedades de um produto interno no espaço vetorial das funções de quadrado integral em $x = (a, b)$.
- (c) O conjunto de todas as funções normalizadas é um espaço vetorial?

2. (a) Para quais valores de ν a função $f(x) = x^\nu$ deve estar no espaço de Hilbert, no intervalo $(0, 1)$? Assuma que ν é real, mas não necessariamente positivo.
- (b) Para o caso específico em que $\nu = 1/2$, $f(x)$ está no espaço de Hilbert? E para a função $xf(x)$? E se a função for $\frac{d}{dx}f(x)$?

3. O hermitiano conjugado ou adjunto de um operador $\hat{Q}$ é o operador $\hat{Q}^\dagger$ tal que

$$\langle f|\hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}^\dagger f|g \rangle \quad \text{para todo } f \text{ e } g \quad (3.1)$$

(Um **operador hermitiano** é, por definição, igual ao seu hermitiano conjugado: $\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger$).

- (a) Encontre os hermitianos conjugados dos operadores x , i , d/dx , id/dx , xd/dx , x^2d/dx e de x^2d^2/dx^2 .
 - (b) Para dois operadores $\hat{Q}$ e $\hat{R}$ mostre que $(\hat{Q}\hat{R})^\dagger = \hat{R}^\dagger\hat{Q}^\dagger$
4. Mostre que, se $\langle h|\hat{Q}h \rangle = \langle \hat{Q}h|h \rangle$ para todas as funções h (no espaço de Hilbert), então $\langle f|\hat{Q}g \rangle = \langle \hat{Q}f|g \rangle$, para todo f e g . SUGESTÃO: Primeiro faça $h = f + g$ e depois $h = f + ig$.
 5. (a) Mostre que a soma de dois operadores hermitianos resulta em um operador hermitiano.
 - (b) Suponha que o operador $\hat{Q}$ seja hermitiano, e α um número complexo. Sob quais condições (em termos de α), $\alpha\hat{Q}$ é hermitiano?
 - (c) Quando o produto de dois operadores hermitiano é hermitiano?
 - (d) Mostre que o operador posição $\hat{x} = x$ e o operador hamiltoniano $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ são hermitianos.

- 6. Considere o operador $\hat{Q} = \frac{d^2}{d\varphi^2}$, onde φ é o ângulo azimutal em coordenadas polares, e as funções sobre as quais ele atua satisfazem as condições de contorno $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$. O operador $\hat{Q}$ é hermitiano? Encontre suas autofunções e seus autovalores. Qual é o espectro de $\hat{Q}$? Este espectro é degenerado?
- 7. (a) Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ são duas autofunções de um operador $\hat{Q}$, com mesmo autovalor q , e são de quadrado integráveis no intervalo $(0, 2\pi)$. Mostre que qualquer combinação linear de f e g é uma autofunção de $\hat{Q}$, com autovalor q .
 (b) Cheque que $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$ são autofunções do operador d^2/dx^2 , com o mesmo autovalor. Construa duas combinações lineares de f e g que são auto-funções *ortogonais* entre si no intervalo $(-1, 1)$.
- 8. (a) Cheque que os autovalores do operador hermitiano $\hat{Q} = i \frac{d}{d\varphi}$ atuando nas funções do exercício 6 são reais. Mostre que as autofunções (para distintos auto-valores) são ortogonais.
 (b) Faça o mesmo para o operador do problema 6.
- 9. (a) Cite um hamiltoniano (além do hamiltoniano do oscilador harmônico) que tenha somente um espectro discreto.
 (b) Cite um hamiltoniano (além da partícula livre) que tenha somente um espectro contínuo.
 (c) Cite um hamiltoniano (além do poço de potencial quadrado finito) que contenha ambos os espectros, o discreto e o contínuo.
- 10. O estado fundamental do poço quadrado infinito é uma autofunção do momento? Se sim, qual é seu momento, Se não, por que?
- 11. Mostre que dois operadores que não comutam não podem ter uma base completa de autofunções em comum. SUGESTÃO: Mostre que, se $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ têm uma base completa de autofunções em comum, então $[\hat{P}, \hat{Q}]f = 0$ para qualquer função no espaço de Hilbert.