MECÂNICA QUÂNTICA I – 4300403

Primeiro Semestre de 2013

# Lista de Exercícios 8

Entrega: 09 de maio de 2013

*Entregar exercícios marcados com "●".*

1. O operador $\hat{P}_i = |i\rangle \langle i|$ (sem somatório em $i$) projeta um vetor $|\alpha\rangle$ qualquer na direção $|i\rangle$:

$$\hat{P}_i |\alpha\rangle = |i\rangle \langle i|\alpha\rangle = |i\rangle \alpha^i \tag{1.1}$$

   (a) Verifique que $\hat{P}_i\hat{P}_i = \hat{P}_i$.

   (b) $\hat{P}_i\hat{P}_j = 0$ se $i \neq j$.

● 2. Considere o espaço vetorial tridimensional gerado por uma base ortonormal $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$. Vetores $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ dados por

$$|\alpha\rangle = \mathrm{i}\,|1\rangle - 2\,|2\rangle - \mathrm{i}\,|3\rangle\,, \quad |\beta\rangle = \mathrm{i}\,|1\rangle + 2\,|3\rangle \tag{2.1}$$

   (a) Construa $\langle\alpha|$ e $\langle\beta|$ (em termos da base dual $\langle 1|$, $\langle 2|$, $\langle 3|$).

   (b) Encontre $\langle\alpha|\beta\rangle$ e $\langle\beta|\alpha\rangle$ e confirme que $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$

   (c) Encontre todos os nove elementos de matriz do operador $\hat{A} = |\alpha\rangle\langle\beta|$, nessa base, e construa a matriz $\mathbf{A}$. Ele é hermitiano?

3. O Hamiltoniano para um certo sistema de dois níveis é

$$\hat{H} = \varepsilon\Big\{ |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \Big\} \tag{3.1}$$

   onde $|1\rangle$, $|2\rangle$ são uma base ortonormal e $\varepsilon$ é um grandeza com dimensão de energia. Encontre os autovalores e autovetores (como combinações lineares de $|1\rangle$ e $|2\rangle$). Qual é a matriz $\mathbf{H}$ representando $H$ com respeito a essa base?

4. Seja $\hat{Q}$ um operador com um conjunto completo de autovetores ortonormais:

$$\hat{Q}\,|e_n\rangle = q_n\,|e_n\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.1}$$

   Mostre que $\hat{Q}$ pode ser escrito em termos da sua *decomposição espectral*:

$$\hat{Q} = \sum_n q_n\,|e_n\rangle\langle e_n| \tag{4.2}$$

   SUGESTÃO: Um operador é caracterizado pela sua ação sobre todos os possíveis vetores, então você deve mostrar que

$$\hat{Q}\,|\alpha\rangle = \left\{ \sum_n q_n\,|e_n\rangle\langle e_n| \right\} |\alpha\rangle \tag{4.3}$$

   para qualquer vetor $|\alpha\rangle$.

- 5. O Hamiltoniano para um certo sistema de três níveis é representado pela matriz

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

onde $a$, $b$ e $c$ são números reais (assuma que $a - c \neq \pm b$).

(a) Se o sistema começa no estado

$$|s(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

calcule $|s(t)\rangle$.

(b) Se o sistema começa no estado

$$|s(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

calcule $|s(t)\rangle$.

6. O Hamiltoniano para um certo sistema de três níveis é representado pela matriz

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Dois observáveis, $\hat{A}$ e $\hat{B}$, são representados pelas matrizes

$$\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

onde $\omega$, $\lambda$ e $\mu$ são números reais positivos.

(a) Encontre os autovalores e o autovetores normalizados de **H**, **A** e **B**.

(b) Suponha um sistema começa no estado genérico

$$|s(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

com $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$. Encontre o valor esperado (em $t = 0$) de $\hat{H}$, $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

(c) O que é $|s(t)\rangle$? Se você medir a energia desse estado (no tempo $t$), qual valores você pode obter, e qual é a probabilidade de cada um? Responda a mesma questão para $\hat{A}$ e $\hat{B}$.