MECÂNICA QUÂNTICA I – 4300403

Primeiro Semestre de 2013

Lista de Exercícios 7

Entrega: 29 de março de 2013

Entregar exercícios marcados com "●".

1. Verifique que corroborando a interpretação de $|\phi(k)|^2$ como densidade de probabilidade, temos que
$$1 = \int |\varphi(x,t)|^2 \, dx = \int |\phi(k)|^2 \, dk \tag{1.1}$$
e também que:
$$\langle p \rangle \equiv \int dx \, \varphi^*(x,t) \left(-\mathrm{i}\hbar \frac{d}{dx} \varphi(x,t) \right) = \int dk \, (\hbar k) \, |\phi(k)|^2 \tag{1.2}$$

2. Calcule os coeficientes de transmissão e de reflexão, e os deslocamentos de fase para o espalhamento de uma partícula livre de massa m e energia $E > 0$ incidindo pela esquerda sobre a barreira de potencial:
$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ -V_0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{2.1}$$
com $V_0 > 0$.

3. Considere agora um potencial igual ao do exercício anterior, mas trocando $-V_0$ por V_0, isto é, uma barreira ao invés de um poço. Para uma partícula incidindo pela esquerda sobre a barreira, estude o espalhamento nos casos em que: (a) $0 < E < V_0$ e (b) $E > V_0$.

● 4. Considere uma partícula livre que incide sobre uma barreira de potencial,
$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -a \\ V_0 & \text{se } -a < x < a \\ 0 & \text{se } x > a \end{cases} \tag{4.1}$$
com $V_0 > 0$, vinda da esquerda, com energia $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > V_0$. Portanto, temos:
$$\Psi(x < -a) = Ae^{\mathrm{i}kx} + Be^{-\mathrm{i}kx} \qquad \text{e} \qquad \Psi(x > a) = Fe^{\mathrm{i}kx} \tag{4.2}$$
   (a) Encontre uma solução da forma $\Psi = Ce^{\mathrm{i}k'x} + De^{-\mathrm{i}k'x}$, ($k' = ?$), para a equação de Schrödinger na região $-a < x < a$.
   (b) Usando as condições de contorno em $x = -a$ e $x = a$, obtenha F (amplitude da onda transmitida) em função de A. SUGESTÃO: Use primeiro as condições de contorno em $x = a$ e resolva C e D em função de F. Depois, use as condições de contorno em $x = -a$ e resolva A em função de C e D, obtendo A em função de F.
   (c) Calcule T e o deslocamento de fase da onda transmitida. Para que valores de E temos $T = 1$, isto é, transparência total do potencial, como na mecânica clássica?

5. Estude o mesmo problema anterior para o poço de potencial quadrado (faça $V_0 \to -V_0$ na definição do V e nas solução anteriores em que $E > V_0$).

• 6. TUNELAMENTO QUÂNTICO: No problema 4 considere o caso em que $0 < E < V_0$ (para $V_0 > 0$).
   (a) Da mesma forma que no exercícios anterior, encontre a solução $\Psi = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$, $(\kappa = ?)$ na região $-a < x < a$.
   (b) Usando as condições de contorno, obtenha F em função de A. Calcule o coeficiente de transmissão e o deslocamento de fase.OBSERVAÇÃO: O fenômeno que consiste na existência de uma onda transmitida ($F \neq 0$), o que é classicamente impossível, pois a energia é menor que a altura do potencial, é chamado de *Tunelamento Quântico*.

   O resultado para $T = \left|\frac{F}{A}\right|^2$ deve ser:

$$T = \left\{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left[\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}\right]\right\}^{-1} \tag{6.1}$$

7. No poço de potencial quadrado

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -a \\ -V_0 & \text{se } -a < x < a \\ 0 & \text{se } x > a \end{cases} \tag{7.1}$$

com $V_0 > 0$, do exercício 4, estude os estados ligados, i.e., as soluções com: $0 > E > -V_0$.

8. Uma partícula de massa m está no potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x < 0 \\ -32\frac{\hbar^2}{ma^2} & \text{se } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{se x>0} \end{cases} \tag{8.1}$$

   (a) Quantos estados ligados existem?
   (b) No estado ligado de energia mais alta possível, qual é a probabilidade de encontrar a partícula fora do poço, isto é, em $x > a$?

   Observação: Considere as soluções do poço quadrado de profundidade finita, que vai de $x = -a$ até $x = a$ e que satisfaz as condições de contorno convenientes em $x = 0$.

9. Considere o potencial $V(x) = \alpha\delta(x)$.
   (a) Com $\alpha > 0$ calcule a probabilidade de tunelamento e o deslocamento de fase de uma partícula livre com $E > 0$, vindo da esquerda.
   (b) Como no caso (a) calcule o coeficientes de transmissão e o deslocamento de fase para o caso $\alpha = -|\alpha| < 0$.
   (c) Calcule a função de onda e o nível de energia do estado ligado quando: $\alpha = -|\alpha| < 0$