MECÂNICA QUÂNTICA I – 4300403

Primeiro Semestre de 2013 - Noturno

Lista de Exercícios 6

Entrega: 18 de abril de 2013

Entregar exercícios marcados com "●".

● 1. Calcule as integrais:
   (a) $\int_{-3}^{4}(x^3-3x)\delta(x-2)dx$
   (b) $\int_{-3}^{0}(x^3-3x)\delta(x-2)dx$
   (c) $\int_{0}^{\infty}\sin(3x)\delta(x-\frac{\pi}{2})dx$
   (d) $\int_{-3}^{5}e^{|x|}\delta(x+2)dx$

2. Verifique que:
   (a) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(ax-b)dx=\frac{1}{|a|}f(\frac{b}{a})$
   (b) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{d}{dx}\delta(x-b)=-\frac{d}{dx}f(b)$

3. Calcule a transformada de Fourier ($\delta_\epsilon(k,a)$) de $\delta_\epsilon(x-a)$
   (a) Escreva $\delta_\epsilon(x-a)$ como uma representação de Fourier em termos de $\delta_\epsilon(k,a)$.
   (b) Faça o limite $\epsilon\to 0$ e obtenha a representação de Fourier de $\delta(x-a)$

● 4. Trabalhando com $\delta_\epsilon(x-a)$, $\theta_\epsilon(x-a)$ e $\epsilon_\epsilon(x-a)$ verifique que:
   (a) $\frac{d}{dx}\theta(x-a)=\delta(x-a)$
   (b) $\frac{d}{dx}\theta(a-x)=-\delta(x-a)$
   (c) $\frac{d}{dx}\epsilon(x-a)=2\delta(x-a)$
   (d) $\frac{d}{dx}\epsilon(a-x)=-2\delta(x-a)$

5. Calcule a integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ax^2+bx+c)dx$. SUGESTÃO: Faça uma mudança de variável $x=y+d$ ($d=$?) convenientemente para obter a integral de Gauss.

6. Considere o pacote de onda dado por:

$$\psi(x,0)=\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha^2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}+\mathrm{i}k_0x\right) \tag{6.1}$$

   (a) Calcule a transformada de Fourier $\phi(k)$.
   (b) Desenhe um gráfico de $\phi(k)$. O que k_0 representa em termos de probabilidade?

(c) Calcule a transformada inversa $\psi(x,t)$. SUGESTÃO: Ao invés de integrar em k, defina uma nova variável de integração $k' = k - k_0$ para fazer a integração (o resultado fica mais transparente).

(d) Calcule a função real $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$.

(e) Desenhe um gráfico de $\rho(x,0)$ marcando o ponto de máximo, e a largura tipica, isto é, os pontos onde a altura é um fator $1/e$ menor que o valor máximo.

(f) No mesmo gráfico desenhe $\rho(x,t)$, para um $t > 0$, indicando os mesmos pontos relevantes que na primeira figura.

(g) Como evolui a altura maxima no tempo? E a largura? Qual é a velocidade de grupo?

• 7. Uma partícula livre tem a função de onda inicial

$$\psi(x,0) = A\exp(-a\,|x| - \mathrm{i}k_0 x) \tag{7.1}$$

(a) Normalize $\psi(x,0)$, isto é calcule A.

(b) Encontre $\phi(k)$.

(c) Escreva $\psi(x,t)$ como um integral em $\phi(k)$ e discuta os casos a muito grande e a muito pequeno.

8. Calcule a densidade de probabilidade $\rho(x,t)$ e a corrente de probabilidade associada a uma partícula com a função de onda $\psi(x,t) = A\exp[\mathrm{i}(kx - Et)]$. Deixe o resultado em função de A.

9. Uma partícula livre tem a função de onda:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax & \text{se } 0 \le x \le a/2 \\ A(a-x) & \text{se } a/2 \le x \le a \\ 0 & \text{se } x \notin (0,a) \end{cases} \tag{9.1}$$

(a) Calcule $\frac{d\Psi(x)}{dx}$ e escreva-a em função de $\epsilon(x-b)$. Quem é b?

(b) Calcule $\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}$ em termos de $\delta(x-b)$.

(c) Calcule o valor esperado da energia neste estado.

10. Uma partícula de massa m está sujeita a um poço de potencial quadrado infinito (de largura a) a sua função de onda inicial é dada por

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A & \text{se } 0 \le x \le a/2 \\ 0 & \text{se } a/2 \le x \le a \end{cases} \tag{10.1}$$

(a) Normalize $\Psi(x,0)$.

(b) Calcule $\langle H \rangle$

(c) Qual é a probabilidade de que uma medida da energia produza o valor $E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$?

SUGESTÃO: Na lista 3 esse exercício foi resolvido calculando $\langle H \rangle$ pela expansão de função de onda $\psi(x,0) = \sum c_n \phi_n(x)$. Resolva agora, calculando explicitamente $\langle H \rangle = \left\langle -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \right\rangle$ aplicada a função de onda $\psi(x,0)$ escrita na forma $\psi(x,0) = A(\theta(x) - \theta(x - \frac{a}{2}))$