

Lista de Exercícios 5

Entrega: 8 de abril de 2013

Entregar exercícios marcados com “●”.

- 1. Considere a hamiltoniana H do oscilador harmônico.
 - (a) Verifique que $[H, a] = -\hbar\omega a$ e que $[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$.
 - (b) Supondo que ψ satisfaz $H\psi = E\psi$, calcule os autovalores de H para os autoestados $(a\psi)$, $(a^2\psi)$ e $(a^\dagger\psi)$, em função de E , $\hbar\omega$, etc.
- 2. Usando a equação $a\psi_0 = 0$ e a forma explícita de a em função de x e $\frac{d}{dx}$, mais a condição de normalização, construa a função de onda $\psi_0(x)$.
- 3. A partir de $\psi_0(x)$:
 - (a) Construa o estado $\psi_1 = \frac{a^\dagger}{\sqrt{1}}\psi_0$ e o estado $\psi_2 = \frac{(a^\dagger)^2}{\sqrt{2!}}\psi_0$
 - (b) Desenhe ψ_0 , ψ_1 e ψ_2 .
 - (c) Mostre a ortogonalidade desses estados por integração explícita. SUGESTÃO: Observe que ψ_0 e ψ_2 são pares e ψ_1 é ímpar.
- 4. (a) Calcule os valores esperados $\langle V(x) \rangle$ e $\langle T(x) \rangle$ das energias potencial e cinética de uma partícula no estado fundamental de um oscilador harmônico. (Observe que a energia total deste oscilador é $E = \frac{\hbar\omega}{2}$).
- (b) Calcule $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ e $\sigma_x\sigma_p$ para este estado. Este resultado está de acordo com o princípio da incerteza?
- 5. Para um oscilador harmônico:
 - (a) Calcule o valor esperado da energia potencial do estado ψ_n .
 - (b) Calcule o valor esperado da energia cinética de ψ_n .
 - (c) Qual o valor esperado da energia total? Sua resposta confere com o resultado obtido na solução da equação de Schrödinger (Lista 4)?
- 6. Uma partícula no potencial do oscilador harmônico começa no estado

$$\Psi(x, 0) = A(2\psi_0(x) + \psi_1(x)) \quad (6.1)$$

- (a) Calcule A .
- (b) Construa $\Psi(x, t)$ e $|\Psi(x, t)|^2$.

- (c) Calcule $\langle x \rangle$ e $\langle p \rangle$. Compare a frequência de oscilação dessas grandezas com a frequência clássica de oscilação dessa mesma partícula, sujeita ao mesmo potencial: $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.
- (d) Calcule a energia média $\langle H \rangle$ desse estado.
- (e) Se você medir a energia desse estado, quais valores você observará e com quais probabilidades.

7. Uma partícula de massa m está no estado fundamental de um oscilador harmônico de frequência angular clássica ω . Repentinamente, em $t = 0$ a constante de mola é quadruplicada, de modo que $\omega \rightarrow \omega' = 2\omega$ sem que a função de onda do estado inicial varie. A partir de $t = 0_+$, este estado vai evoluir no tempo de acordo com o novo hamiltoniano.

Qual a probabilidade de que uma medida de energia nesse estado, num instante $t > 0$ dê o valor $\frac{\hbar\omega}{2}$?

Qual a probabilidade de encontrar a energia $\frac{\hbar\omega}{4}$? E para o valor $\frac{3}{4}\hbar\omega$?

8. No estado fundamental do oscilador harmônico, qual a probabilidade de se encontrar a partícula dentro da região classicamente permitida para esta energia? (Expresse sua resposta em função de uma integral que só pode ser calculada numericamente).

9. Dadas $f(x)$ e $g(x)$ de quadrados integráveis verifique que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(a^\dagger g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (af)^* g \quad (9.1)$$

- 10. Usando o teorema do exercício 9 verifique que $c_n = \sqrt{n+1}$ e $d_n = \sqrt{n}$ onde: $a^\dagger \psi_n = c_n \psi_{n+1}$ e $a \psi_n = d_n \psi_{n-1}$ para os auto-estados do oscilador harmônico.

11. Encontre os autoestados de potencial que é uma semi-oscilador harmônico

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (11.1)$$

SUGESTÃO: Estude quais autoestados do oscilador harmônico usual satisfazem as condições de contorno extras do semi oscilador harmônico.