MECÂNICA QUÂNTICA I – 4300403

Primeiro Semestre de 2013 - Noturno

Lista de Exercícios 3

Entrega: 21 de março de 2013

Entregar exercícios marcados com "●".

1. Verifique que $\psi(x)$ e $e^{i\alpha}\psi$, α =cte., resultam nos mesmos observáveis $\rho(x,t)$, $j(x,t)$, $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, etc. (e, portanto, representam o mesmo estado quântico).

2. Prove os seguintes teoremas:
   (a) Para soluções normalizáveis, a constante de separação deve ser real. SUGESTÃO: Escreva E como $E_0 + i\Gamma$ (com E_0 e Γ reais) em $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ e mostre que, se a condição de normalização $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |\Psi(x,t)|^2 = 1$ é mantida para todo t, então Γ deve ser zero.
   (b) Se $V(x)$ é uma função *par*, isto é, $V(-x) = V(x)$, então $\psi(x)$ pode ser sempre tomado par ou ímpar. SUGESTÃO: Se $\psi(x)$ satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo para uma dada energia E,$\psi(-x)$ e a combinação linear $\psi(x) \pm \psi(-x)$ também satisfaz a mesma equação.

3. Mostre que não existe solução normalizável para a equação de Schrödinger independente do tempo, para o poço de potencial quadrado infinito, com $E = 0$ ou $E < 0$. Faça isso resolvendo a equação de Schrödinger explicitamente e mostrando que você não pode encontrar Ψ diferente de zero em $0 \leq x \leq a$.

● 4. Calcule $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle p^2\rangle$, σ_x e σ_p, para o estado fundamental do poço de potencial quadrado infinito. Cheque que o princípio de incerteza é satisfeito, i.e., $\sigma_x\sigma_p \geq \hbar/2$.

● 5. Uma partícula está dentro de um poço quadrado infinito e tem uma função de onda inicial que é uma mistura par dos dois primeiros estados estacionários:

$$\Psi(x,0) = A(\psi_1(x) + \psi_2(x)) \tag{5.1}$$

   (a) Normalize $\Psi(x,0)$, isto é, encontre A (isso é muito fácil se você explorar a ortonormalidade de $\psi_1(x)$ e de $\psi_2(x)$). Lembre-se que tendo normalizado Ψ em $t = 0$, você pode assegurar que ela *está* normalizada em *qualquer tempo t* (se você duvida disso, cheque explicitamente essa afirmação depois de fazer o item (b)).
   (b) Encontre $\Psi(x,t)$ e $|\Psi(x,t)|^2$. (Expresse a última em termos de funções senoidais do tempo, eliminando as exponencias com ajuda da formula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$). Defina também $\omega = \pi^2\hbar/2ma^2$.
   (c) Calcule $\langle x\rangle$. Note que ele oscila no tempo. Qual é a frequência de oscilação? Qual é a amplitude de oscilação?
   (d) Calcule $\langle p\rangle$.
   (e) Encontre o valor esperado de H. Como ele se compara com E_1 e E_2?
   (f) Uma partícula clássica neste potencial se chocaria continuamente contra as paredes. Se sua energia é igual ao valor esperado que você encontrou no item (e), qual é a freqüência do movimento clássico. Como você compara isso com a frequência quântica que você encontrou no item (c)?

6. Embora uma fase constante na função de onda como um todo não tenha significado físico (veja o exercício 1), a fase relativa da expansão dos coeficientes de $\Psi(x,t)$ é importante. Por exemplo, suponha que nós trocamos a fase relativa de ψ_1 e ψ_2 do problema anterior, para:

$$\Psi(x,0) = A(\psi_1(x) + e^{i\alpha}\psi_2(x)), \tag{6.1}$$

onde α é alguma constante real. Encontre $\Psi(x,t)$, $|\Psi(x,t)|^2$ e $\langle x \rangle$ e compare seus resultados com o que você obteve antes. Estude os casos especiais $\alpha = \pi/2$ e $\alpha = \pi$.

- 7. Uma partícula sujeita a um poço quadrado infinito tem a função de onda

$$\Psi(x,0) = Ax(a-x), \quad \text{com } 0 \leq x \leq a. \tag{7.1}$$

(a) Normalize $\Psi(x,0)$. Desenhe seu gráfico. Com qual dos estados estacionários do poço de potencial quadrado infinito ele se parece?

(b) Calcule $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ e $\langle H \rangle$ em $t = 0$. (NOTA: Desta vez você não pode encontrar $\langle p \rangle$ diferenciando $\langle x \rangle$ diretamente, porque você conhece somente $\langle x \rangle$ em $t = 0$). Compare $\langle H \rangle$ com o valor E_1 do autoestado $n = 1$.

(c) Calcule os coeficientes da expansão: $\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(x)$ de $\psi(x,0)$ em termos dos autoestados ψ_n do poço infinito.

(d) Do resultado anterior escreva a expressão para $\psi(x,t)$.

(e) Qual é a probabilidade de uma medida de energia dar E_1?

8. Uma partícula de massa m está sujeita a um poço de potencial quadrado infinito (de largura a) a sua função de onda inicial é dada por

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A & \text{se } 0 \leq x \leq a/2 \\ 0 & \text{se } a/2 \leq x \leq a \end{cases} \tag{8.1}$$

(a) Normalize $\Psi(x,0)$.

(b) Calcule $\langle H \rangle$

(c) Qual é a probabilidade de que uma medida da energia produza o valor $E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$?

9. Uma partícula de massa m está num poço de potencial infinito que se estende de $y = -a/2$ a $y = a/2$.

(a) Encontre as autofunções e os respectivos autovalores resolvendo a equação de Schrödinger e admitindo as soluções de contorno convenientes.

(b) Verifique que essas autofunções podem ser obtidas a partir das autofunções do poço de potencial infinito que se estende de $x = 0$ a $x = a$, pela transformação de variáveis: $y \equiv x + a/2$.

10. Uma partícula de massa m está no estado fundamental de um poço de potencial infinito em $x = (0, a)$. Subtamente a parede do poço que estava em $x = a$ é afastada para a posição $x = 2a$. Durante esse processo a função de onda ψ_1 (do poço original) da partícula não se altera.

(a) Escreva as novas autofunções $\psi_n(x)$ e E_n do poço $x = (0, 2a)$.

(b) Decomponha ψ_1 em função das novas ψ_n's

(c) Qual é a probabilidade de encontrar E_1 e de encontrar E_2 numa medida da energia do novo poço de potencial?