

Lista de Exercícios 2

Entrega: 14 de março de 2013

Entregar exercícios marcados com “●”.

- 1. Verifique que: $\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$. Este resultado é conhecido como *Teorema de Ehrenfest*, ou seja, valores esperados obedecem *leis clássicas*. Repare na semelhança com a segunda lei de Newton da mecânica clássica.
- 2. Dada uma função de onda $\psi(x, t)$, devidamente normalizada, verifique que: $\langle xp \rangle - \langle px \rangle = i\hbar$.
- 3. Suponha que você adicione uma constante real V_0 à energia potencial $V(x)$, isto é substitua $V(x)$ por $V(x) + V_0$ nas equações de movimento. Em mecânica clássica isso não muda nada. Mostre que, na mecânica quântica, a função de onda adquire um fator extra de fase dependente do tempo: $\exp(-iV_0t/\hbar)$. Qual é o efeito produzido por esta mudança na função de onda sobre o valor esperado de uma variável dinâmica?
- 4. Uma partícula de massa m está no estado

$$\Psi(x, t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar) + it]} \quad (4.1)$$

onde A e a são constantes positivas e reais.

- (a) Encontre A em função dos outros parâmetros.
- (b) Para qual função energia potencial $V(x)$, Ψ satisfaz a equação de Schrödinger?
- (c) Calcule os valores esperados de x , x^2 , p e p^2
- (d) Calcule σ_x e σ_p . O produto entre eles é consistente com o princípio de incerteza?
- 5. Suponha que você queira descrever uma *partícula instável*, que espontaneamente se desintegra com uma vida média τ . Neste caso a probabilidade total de encontrar a partícula em algum lugar não é constante, mas diminui com o tempo em uma razão exponencial

$$P(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(x, t)|^2 = e^{-t/\tau}. \quad (5.1)$$

A conservação de probabilidade é obtida levando-se em conta o fato de que a energia potencial é *real*. Se a energia potencial passa a ser *complexa*, com $V = V_0 - i\Gamma$ (onde V_0 é a energia potencial e Γ uma constante real e positiva):

- (a) Mostre que, nesse caso, obtemos: $\frac{dP}{dt} = -\frac{2\Gamma}{\hbar}P$.
- (b) Resolva para $P(t)$ e encontre a vida média em termos de Γ .

6. No caso em que V é real, mostre que $\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_1^* \Psi_2 = 0$, para quaisquer duas soluções Ψ_1 e Ψ_2 (normalizáveis) da equação de Schrödinger.

7. Uma partícula é representada (em $t = 0$) pela função de onda

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & \text{se } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{se } x < -a \text{ ou } x > a \end{cases} \quad (7.1)$$

- (a) Determine a constante de normalização A .
- (b) Qual é o valor esperado de x (em $t = 0$)?
- (c) Qual é o valor esperado de p (em $t = 0$)? (Note que você não pode obtê-lo de $p = m \frac{d\langle x \rangle}{dt}$. Por que?)
- (d) Calcule o valor esperado de x^2 e p^2 .
- (e) Calcule a incerteza σ_x .
- (f) Calcule a incerteza σ_p .
- (g) Cheque que seus resultados são consistentes com o princípio da incerteza.

8. Seja $P_{ab}(t)$ a probabilidade de encontrar uma partícula no intervalo $(a < x < b)$, no instante t .

(a) Mostre (para $V(x)$ real) que

$$\frac{dP_{ab}(t)}{dt} = j(a, t) - j(b, t) \quad (8.1)$$

onde a *Corrente de Probabilidade* é dada por

$$j(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{d\Psi^*}{dx} - \frac{d\Psi}{dx} \Psi^* \right) \quad (8.2)$$

(b) Calcule $j(x, t)$ para o $\Psi(x, t)$ do exercício 4 desta lista.