MECÂNICA QUÂNTICA I – 4300403

Primeiro Semestre de 2013 - Noturno

Lista de Exercícios 1

Entrega: 07 de março de 2013

Entregar exercícios marcados com "●".

● 1. Considere a sequência formada pelos primeiros 25 dígitos na expansão decimal de π:

$$\pi = 3,1415926535897932384626 43$$

(a) Quais são as probabilidades $P(j)$ de encontrar cada um dos dígitos $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ nessa seqüência?

(b) Qual é o dígito mais provável?

(c) Qual é o valor médio desses dígitos?

(d) Qual é o valor quadrático médio?

(e) Encontre o desvio padrão desta distribuição.

(f) Desenhe um histograma e identifique o ponto mais provável e o desvio padrão.

● 2. Considere a distribuição de probabilidades (gaussiana):

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2} \tag{2.1}$$

onde A, a e λ são constantes reais e positivas.

(a) Normalize a distribuição, i.e., encontre A em função de λ e a.

(b) Encontre $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e σ

(c) Desenhe o gráfico de $\rho(x)$ marcando os pontos a, $a + \sigma$, $a - \sigma$ e as respectivas alturas.

● 3. No instante $t = 0$, uma partícula é representada pela função de onda

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A\frac{x}{a} & \text{se } 0 \leq x \leq a \\ A\frac{b-x}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases} \tag{3.1}$$

onde A, a e b são constantes e $b > a$.

(a) Normalize Ψ (encontre A em função de a e b), i.e., imponha:

$$\int dx \; |\Psi|^2 = 1 \tag{3.2}$$

(b) Desenhe $\Psi(x, 0)$ em função de x.

(c) Onde é mais provável de se encontrar a partícula (em $t = 0$)?

(d) Qual a probabilidade de encontrar a partícula à esquerda de $x = a$? Cheque seu resultado nos casos limites $b = a$ e $b = 2a$.

(e) Qual o valor esperado $\langle x \rangle$?

(f) Qual o valor esperado $\langle x^2 \rangle$?

(g) Qual é o desvio padrão σ_x no valor médio (ou valor esperado) de x.

4. Considere a função de onda

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t} \tag{4.1}$$

onde A, λ e ω são constantes reais e positivas.

(a) Normalize Ψ.

(b) Determine $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$.

(c) Encontre o desvio padrão de σ de x.

(d) Desenhe o gráfico de $|\Psi|^2$ como função de x, e marque os pontos $\langle x \rangle$ e $\langle x \rangle \pm \sigma$. Qual é a probabilidade de encontrar a partícula fora deste intervalo.

5. Uma partícula parte, no instante $t = 0$, do repouso em $x = 0$, com aceleração constante, e passa por $x = L$ no instante T. Durante esse intervalo de tempo, uma câmera bate um número $N \gg 1$ de fotos, uma a cada intervalo de tempo $dt = \frac{T}{N}$.

(a) Quantas imagens dN da partícula são feitas pela câmera entre as posições x e $x + dx$?

(b) Podemos definir a probabilidade (clássica) dP de encontrar a partícula entre x e $x + dx$ como:

$$\rho(x)dx = dP \equiv \frac{dN}{N} \tag{5.1}$$

Qual a probabilidade (cássica) de encontrar a partícula entre x e $x + dx$?

6. O movimento de uma partícula clássica é dado por:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi_0). \tag{6.1}$$

O período do movimento é $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Durante um período T, uma câmera bate um número $N \gg 1$ de fotos, uma a cada $dt = \frac{T}{N}$.

(a) Quantas imagens dN da partícula aparecem mostrando-a entre a posição x e a posição $x + dx$, sendo $-x_0 < x < x_0$ e $dx \ll x_0$?

(b) Qual é a densidade (clássica) de probabilidade de encontrar a partícula no ponto x? (lembre que a partícula passa duas vezes pelo intervalo $(x, x + dx)$ em cada periodo)

(c) Verifique que:

$$\int_{-x_0}^{x_0} dx\, \rho(x) = 1 \tag{6.2}$$

(d) Desenhe o gráfico de $\rho(x)$