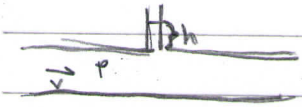
FII-3

03 / 04 / 2013

Física II



Tenho uma relação entre h e v!! Medidas externas me dão informações sobre a sit. interna

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \cancel{p_0}$$
$$\parallel$$
$$\cancel{p_0} + \rho g h$$

(igual ao Tubo de Pitot)

Ex. 9

03/04:

$\begin{cases} 2^a, 3^a, 5^a: 8-9\text{ am} \\ 4^a \quad 12-2\text{ pm} \end{cases}$

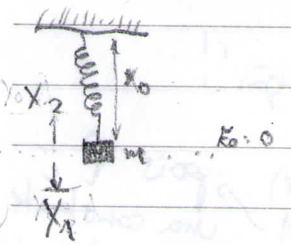
Sala Seminários DFMA
Diego Trancanelli
MT = (Listas + P1 + P2 + P3)/4

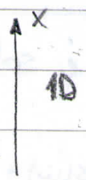
Oscilações, Ondas, Termodinâmica
Livres, Forçadas, Atenuadas (3,4) — Ondas (5,6) — Termodinâmica (7-10)

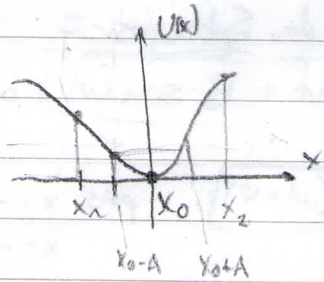
→ sistema central (clássica, MQ, T. Quant. Campos), outras coisas são tratadas como perturbações

Oscilador Harmônico:

(= única coisa que a gente sabe resolver exatamente em física)







Entre $X_0 - A$ e $X_0 + A$, a curva pode ser aproximada para uma parábola (peq. oscilações)
↳ Taylor no mínimo (derivada 1ª é 0 e 2ª é import.)

∴ Perto do mínimo qqr coisa é um Oscilador Harmônico

arbit. 0

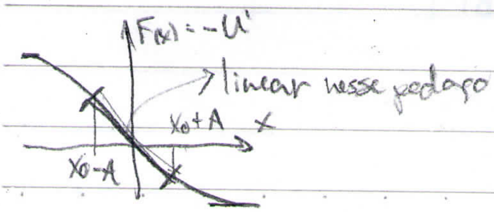
$$U(x) = \cancel{U(x_0)} + (x-x_0)\cdot \cancel{U'(x_0)} + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 \cdot U''(x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^3)$$

peq. oscilaç.

$$\therefore \boxed{U(x) \approx \frac{1}{2}(x-x_0)^2 \cdot U^{(2)}(x_0)}$$

Fazendo $X_0 = 0$ e $U^{(2)}(x_0) = k$, temos

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow F(x) = -kx \quad \text{Lei Hooke}}$$



$$F(x) = -kx = m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-k}{m}x = -\omega^2 x$$

onde $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ $[\omega] = \frac{1}{s} = Hz$

03 / 04 / 2013

Eq. Movimento: $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-k}{m}x \equiv -\omega^2 x}$ Linear, Homogênea

9.6 Feynman:

$x(t)$ dado

$\omega = 1$

entra dinâmica, eq. do mov.

$$\begin{cases} x(t+\varepsilon) \approx x(t) + (\cancel{t}+\varepsilon-\cancel{t})\cdot\dot{x}(t) \\ \quad \varepsilon << 1s \quad , \ \underline{x(t+\varepsilon) = x(t) + \varepsilon\cdot v(t)} \\ v(t+\varepsilon) = v(t) + \varepsilon\cdot\dot{v}(t) = v(t) + \varepsilon\cdot a(t) \Rightarrow \underline{v(t+\varepsilon) = v(t) - \varepsilon\cdot x(t)} \\ \underline{a(t) = -x(t)} \end{cases}$$

no meio dos intervalos

$\therefore$ Daí se faz a solução numérica (dividindo em intervalos que distam ε e tendo as cond. iniciais)

"Leap frog"

$x(t+\varepsilon) = x(t) + \varepsilon\cdot v(t+\varepsilon/2)$, $v(t+\varepsilon/2) = v(t-\varepsilon/2) + \varepsilon\cdot a(t)$, $a(t) = -x(t)$

Assim, pode-se dizer que $\begin{cases} x_1 = \cos t \\ x_2 = \operatorname{sen} t \end{cases}$

Eq. Homogênea $\Rightarrow$ multiplicar simplesmente dá uma resposta tbm solução da homogênea

Eq. Linear $\Rightarrow$ Princípio da Sobreposição

$\therefore$ $\boxed{X = A\cdot\cos\omega t + B\cdot\operatorname{sen}\omega t}$ ainda é solução!!

$$\boxed{X = C\cdot\cos(\omega t+\varphi)}$$

, pois $\dot{x} = -C\omega\cdot\cos(\omega t+\varphi)$, $\ddot{x} = -C\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$ pois φ é uma constante para o tempo!!

Duplas: $(A,B) \times (C,\varphi)$

↳ Há uma relação entre as duplas

melhor p/ problemas físicos pelos significados para C, ω, φ

$C\cos(\omega t+\varphi) = \boxed{C}\cos\omega t\cdot\boxed{\cos\varphi} - \boxed{C}\cdot\operatorname{sen}\omega t\cdot\boxed{\operatorname{sen}\varphi}$

$\therefore$ $\boxed{A = C\cdot\cos\varphi}$ e $\boxed{B = -C\cdot\operatorname{sen}\varphi}$

$A^2+B^2 = C^2 \Rightarrow \boxed{C = \sqrt{A^2+B^2}}$ $\boxed{\varphi = \operatorname{tg}^{-1}(-A/B)}$

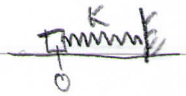
FII-4

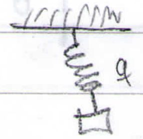
04/04/2013

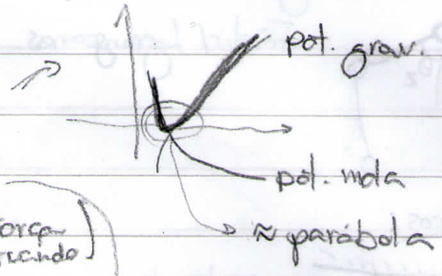
Física II

04/04:

$$\begin{cases} F = -kx \\ U = \frac{1}{2}kx^2 \end{cases}$$







Oscilações Livre (única força atuando)

$x(t) = A\cdot\cos(\omega t) + B\cdot \mathrm{sen}(\omega t)$

$= C\cdot\cos(\omega t + \varphi)$ $\qquad (A,B) \leftrightarrow (C,\varphi)$

C é constante

$C = |x(t)|_{max}$: amplitude $\overset{máx}{\vee}$ oscilações

$\omega t + \varphi$: $\omega t \to \omega t + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$

$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$, $\omega = 2\pi\nu$: frequência angular

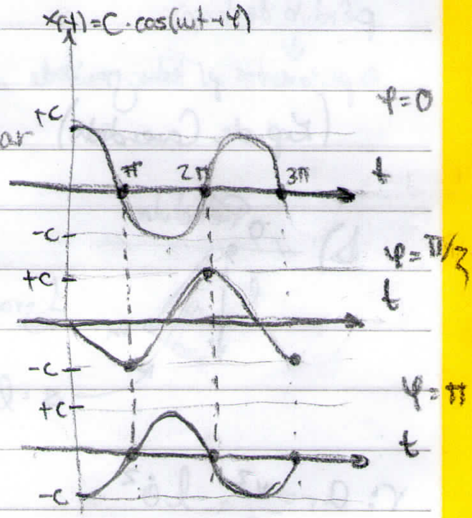
período, frequência

fase

$x(0) = C\cdot\cos\varphi$

$\varphi = \pi/2 \begin{cases} x(t) = C\cdot\cos(\omega t + \pi/2) \\ x(t) = -C\cdot\mathrm{sen}(\omega t) \end{cases}$

$\varphi = \pi \begin{cases} x(t) = C\cdot\cos(\omega t + \pi) \\ x(t) = -C\cdot\cos(\omega t) \end{cases}$



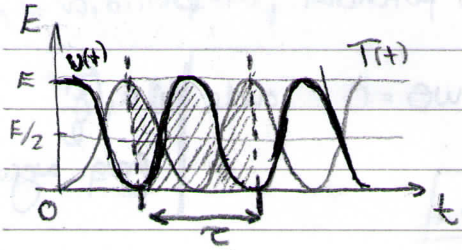
$X = C\cdot\cos(\omega t + \varphi)$

$\dot{X} = -C\cdot\omega\cdot\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$

$$\left.\begin{cases} T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mC^2\omega^2\cdot\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi) \\ U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kC^2\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}mC^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi) \end{cases}\right\}$$

$k = m\omega^2$

$\therefore$ $\boxed{E_T = T(t) + U(t) = \frac{1}{2}m\cdot C^2\cdot\omega^2 = \text{cte.}}$

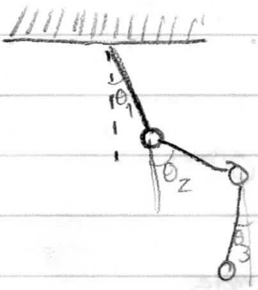


$$\overline{T} = \overline{U} = \frac{1}{\tau}\cdot\int_0^\tau dt\, T(t) = \frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{2}mC^2\omega^2 \underbrace{\int_0^\tau \mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi)\,dt}_{\tau/2}$$

$\therefore$ $\boxed{\overline{T} = \overline{U} = \frac{1}{2}E}$

↳ E total distribuída igualmente entre T e U!!

08/04/2013

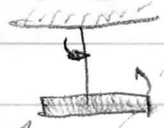


3 graus liberdade

Fácil c/ Lagrangeanas

Ex. Práticos:

a)



coordenada angular $\varphi(t)$

pêndulo de torção

experimentos p/ testar gravidade (Exp. de Cavendish)

$F = -Kx \Rightarrow \tau = -K\varphi$

↳ cte. de torção — oposição do fio ao torque ↳ resposta

$= I\ddot{\varphi}$

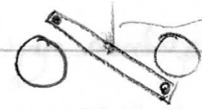
↳ $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$

↳ $\omega^2 = \frac{K}{I}$ — massa inercial

⇓

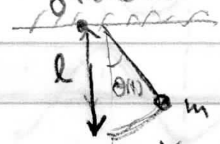
mesma coisa

$F = -\frac{GM_m}{|r_1 - r_2|^2}$



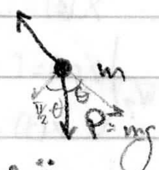
fios mt sensíveis p/ amplificar

b) Pêndulo



$s = l\cdot\theta$

1 grau ≡ ângulo no plano



Coord. polares $\begin{cases} r \equiv l = \text{const} \\ \theta(t) \end{cases}$

$\theta: m\cdot a_\theta = m\cdot l\cdot\ddot{\theta} = mg\,\text{sen}\,\theta$

$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\cdot\text{sen}\,\theta}$ ← (*)

$r: a_r = -\frac{v^2}{l} = -l\dot{\theta}^2$

$m\cdot a_r = -ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \Rightarrow \boxed{T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2}$

(*) $\theta << 1 \Rightarrow \text{sen}\,\theta \approx \theta$

08/04:

$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\cdot\text{sen}\,\theta}$

para um potencial de qqr fórmula, mas para ângulos $\theta << 1$, pode-se aproximar p/ um potencial parabólico, ou seja:

$\ddot{\theta} \approx -\frac{g}{l}\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + w\theta = 0$ onde $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$ freq. angular

$\boxed{\tau = 2\pi w: \text{período}}$

isocronismo ⇒ não depende da amplitude (θ)

FII-5

08/04/2013

Física II

$s = l\cdot\theta$

$v = \dot{s} = l\cdot\dot{\theta}$

$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\cdot\dot{\theta}^2 \quad \therefore \boxed{T = \frac{1}{2}ml^2\cdot\dot{\theta}^2}$

$U = -W = mgl\int_0^{\theta_0} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\,\hat{\theta}\cdot\hat{\theta} = -mgl\cos\theta\Big|_0^{\theta_0}$

$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l}$; $\vec{F} = -mg\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}$, $d\vec{l} = l\,d\theta\,\hat{\theta}$ (direção tangencial)

$\therefore \boxed{U = mgl(1-\cos\theta_0)}$

$E = T + U$

$\boxed{E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta)}$ $\forall\theta$, em particular $\theta \ll 1$:

$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$: $U \approx mgl(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}) = mgl\frac{\theta^2}{2} + O(\theta^2)$

$\theta = 0 \rightarrow$ ponto de mínimo, equilíbrio estável

$\theta = \pm\pi \rightarrow$ " " máximo, " instável

Para θ maiores não há mais isocronismo. $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$

$E(\theta = \pi) = E_0 = mgl(1-\cos\theta_0)$ (-1)

$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta)$ +

$0 = \frac{1}{2}\cancel{m}l^{\cancel{2}}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \cancel{m}g\cancel{l}(\cancel{1}-\cos\theta) - \cancel{m}g\cancel{l}(\cancel{1}-\cos\theta_0)$

$\therefore \boxed{\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$

Função par $\Rightarrow$ posso escolher + $\Rightarrow$ $\boxed{\tau = \sqrt{\frac{2l}{g}}\cdot\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}}$, $\forall\theta_0$

Mecânica Lagrangeana:

$L = T - V$

L: Lagrangeana (um funcional); T: En. Cin.; V: En. Pot.

partícula em 1D c/ potencial $V(x)$

$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2 - V(x(t))$

onde $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

L é uma função implícita de t

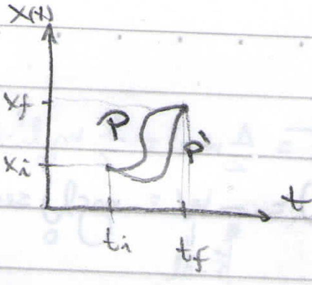
$L = L(x(t), \dot{x}(t))$

08/04/2013

Ação: $S = \int_P L(x(t), \dot{x}(t))\, dt = S[x]$

P ↳ "caminho" onde se faz a integral

funcional



S é um funcional de x

Função: IN = número, OUT = número

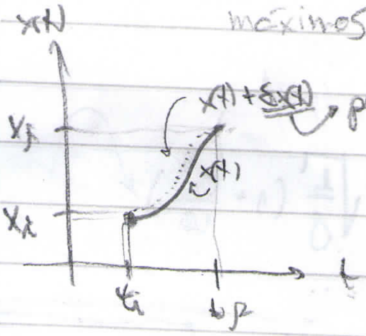
Funcional: IN = função, OUT = número

No exemplo, $S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{1}{2} m (\dot{x}(t))^2 - V(x(t)) \right\}$

↳ posso calcular p/ qqr caminho só declarando as condições de contorno $(x_i, x_f, \dots)$

$\boxed{\text{Princípio de Hamilton: A trajetória real da partícula é uma trajetória estacionária de } S}$

∴ funções que dão máximos e mínimos de funcional, tal como pontos dão os máximos e mínimos da função (pontos estacionários)



$\delta x_i = 0, \ \delta x_f = 0$

$$S[x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{1}{2} m (\dot{x}(t))^2 - V(x(t)) \right\}$$

$$S[x(t) + \delta x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{1}{2} m \left(\frac{d\,[x(t) + \delta x(t)]}{dt} \right)^2 - V(x(t) + \delta x(t)) \right\}$$

$$\simeq \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{1}{2} m \left(\dot{x}(t) + \frac{d(\delta x(t))}{dt} \right)^2 - V(x(t)) - V'(x(t)) \cdot \delta x(t) \right\} + \mathcal{O}(\delta x^2)$$

$$S[x(t) + \delta x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{m}{2} (\dot{x}(t))^2 + \frac{m}{2} \, 2 \, \dot{x}(t) \frac{d(\delta x(t))}{dt} - V(x(t)) - \underbrace{V'(x(t))}_{\frac{dV}{dx}} \cdot \delta x(t) \right\} + \mathcal{O}(\delta x^2)$$

$$\therefore S[x(t) + \delta x(t)] = S[x] + \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ m \dot{x}(t) \cdot \frac{d\, \delta x(t)}{dt} - V'(x) \cdot \delta x(t) \right\}}_{\delta S[x]}$$

$V' = -F$

$$\delta S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ m \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \cdot \delta x(t) \right) - m \ddot{x}(t) \delta x(t) - V' \cdot \delta x(t) \right\} = \cancel{m \dot{x} \delta x \Big|_{t_i}^{t_f}}^{\,0} - \int_{t_i}^{t_f} dt \, \delta x(t) \underbrace{(m\ddot{x} + V')}_{=0}$$

↳ precisamos $\delta S[x] = 0$

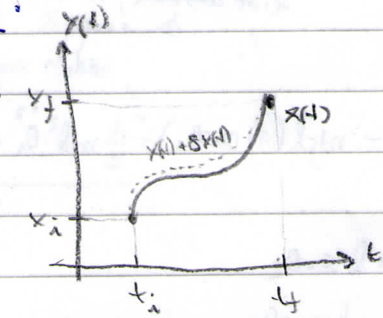
FII-6

09 / 04 / 2013

Física II

09/04:

$S[x]$



$x_i = x(t_i)$, $x_f = x(t_f)$

$\delta x_i = 0 = \delta x_f$

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(x(t), \dot{x}(t))$$

apenas depend. implícita do t

$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$

$$\delta S = 0 = \cancelto{0}{m\dot{x}\,\delta x(t)\Big|_{x_i}^{x_f}} + \int_{t_i}^{t_f} \delta x(t)\underbrace{\left[-m\ddot{x} - V'\right]}_{\text{arbitrário}} dt$$

$= 0$

recorrendo devido à mínima ação

Mais em geral, $L = L(x(t), \dot{x}(t))$

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(x(t), \dot{x}(t)) \quad , \quad \delta S \overset{!}{=} 0 = \int_{t_i}^{t_f} dt\left[\frac{\delta L}{\delta x}\delta x + \frac{\delta L}{\delta \dot{x}}\frac{d\,\delta x}{dt}\right]$$

→ nós quero essa derivada sobre δx. Ele tem q ficar isolado p/ igualarmos a zero ⇓ Novamente Partes

$$\delta S = 0 = \int_{t_i}^{t_f} dt\left[\frac{\delta L}{\delta x}\delta x + \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}}\delta x\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{x}}\right)\delta x\right]$$

$$= \cancelto{0}{\frac{\delta L}{\delta \dot{x}}\delta x\Big|_{t_i}^{t_f}} + \int_{t_i}^{t_f} dt \underbrace{\left[\frac{\delta L}{\delta x} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{x}}\right]}_{\text{Deve ser } =0}\delta x$$

pela escolha de $\delta x_i = 0 = \delta x_f$

$$\therefore \boxed{\frac{\delta L}{\delta x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}}\right) = 0}$$

Eq. de Euler-Lagrange

Re-particularizando:

particulariz.

$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$

$$-V' - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \Rightarrow \boxed{-V' = m\ddot{x} = F}$$ 2ª Lei Newton!!

Ex: Pêndulo Simples

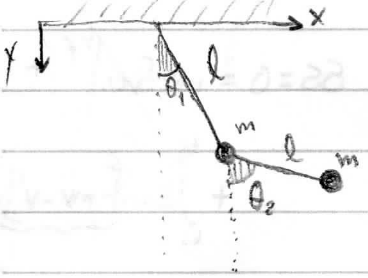
$L = T - V = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$ $\qquad x \to \theta$ 1 grau liberdade

$$\frac{\delta L}{\delta \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow -mgl\,\text{sen}\,\theta - \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow -\cancel{m}g\cancel{l}\,\text{sen}\,\theta = \cancel{m}l^{\cancel{2}}\ddot{\theta}$$

$$\therefore \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0}$$ Obtivemos a Eq. do Sistema

09 / 04 / 2013

Ex.: Pêndulo Duplo



2 graus liberdade: θ_1, θ_2

termo constante, do zero da energia

módulo uma constante

$$L_1 = T_1 - V_1 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 - mgl(1-\cos\theta_1) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + mgl\cos\theta_1$$

Coord. da 2ª massa: $\begin{cases} x_2 = l \cdot \operatorname{sen}\theta_1 + l \cdot \operatorname{sen}\theta_2 \\ y_2 = l \cdot \cos\theta_1 + l \cdot \cos\theta_2 \end{cases}$

$V_2 = mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$ $\quad L_2 = T_2 - V_2 = \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - mgy_2$

$\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$

$$T_2 = \frac{m}{2} l^2 \left[(\cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + \cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2)^2 + (\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + \operatorname{sen}\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2)^2 \right]$$
$$= \frac{m}{2} l^2 \left[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1) \right]$$

$\therefore L_T = L = L_1 + L_2$
$$= ml^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}_2^2 + ml^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + 2 \cdot mgl \cdot \cos\theta_1 + mgl \cdot \cos\theta_2$$

$\theta_1, \theta_2 \ll 1 \Rightarrow \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

acoplamento!!

$$\therefore \boxed{L = ml^2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \omega_0^2 \theta_1^2 - \frac{\omega_0^2}{2} \theta_2^2 \right)}$$

não é da forma $\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)$!!
por isso foi bom generalizar

$$\frac{\delta L}{\delta \theta_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_i} \right) = 0 \quad ; \; i = 1, 2 \text{ (2 equações de E.L.)}$$

EL:

$i=1$: $\quad -2\omega_0^2 \theta_1 - \frac{d}{dt}(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) = 0$

$i=2$: $\quad -\omega_0^2 \cdot \theta_2 - \frac{d}{dt}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -2\omega_0^2 \theta_1 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -\omega_0^2 \theta_2 \end{cases}}$$

"desligando" θ_2 em (1) e θ_1 em (2) volta-se p/ o pêndulo simples

ACOPLAMENTO ENTRE θ_1 e θ_2

generalização de $\cos(\omega t)$, $\operatorname{sen}(\omega t)$

Chute: $\theta_1 = A \cdot e^{i\omega t}$, $\theta_2 = B \cdot e^{i\omega t}$, $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$

pegando só a parte Real volta-se ao pêndulo simples

$$\begin{cases} (-2A\omega^2 - B\omega^2 + 2A\omega_0^2)\, e^{i\omega t} = 0 \\ (-A\omega^2 - B\omega^2 + B\omega_0^2)\, e^{i\omega t} = 0 \end{cases} \xrightarrow[A,B \neq 0]{\text{sol. não trivial}} \begin{pmatrix} -2\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

FII-7

10 / 04 / 2013

Física II

Para soluções não-triviais, o determinante da matriz deve ser nulo:

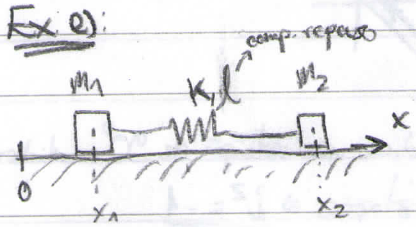
$$\det\begin{pmatrix} 2w_0^2-2w^2 & -w^2 \\ -w^2 & w_0^2-w^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2(w_0^2-w^2)^2 = w^4 \Rightarrow \begin{cases} w_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\; w_0 \\ w_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\; w_0 \end{cases}$$

auto-frequências

10/04:

Exemplos c) e d) do Moysés → Leitura Individual

Ex e):



Reduzido a 1 grau de liberdade → CM, dist. relativa

Deformação mola: $\boxed{x = (x_2 - x_1) - l}$ $x<0$, compressão; $x>0$, esticamento; $x=0$, repouso

tq $F_1 = Kx = -F_2$ $\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = +Kx & (I) \\ m_2\ddot{x}_2 = -Kx & (II) \end{cases}$

Procedimento padrão para sistemas onde $V(x_1, x_2) = V(x_1 - x_2)$ é um sistema de coordenadas CM e relativa

$\therefore$ $\boxed{X_{CM} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}}$ $\boxed{x = (x_2 - x_1) - l}$

I + II

$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = Kx - Kx = 0$

$\ddot{X}_{CM} = 0 \Rightarrow$ Movimento Uniforme do CM (trivial, sem dinâmica)

$$\left.\begin{aligned} m_1 m_2 \ddot{x}_1 &= m_2 Kx \\ -m_1 m_2 \ddot{x}_2 &= m_1 Kx \end{aligned}\right\} \xRightarrow{m_2 I - m_1 II} m_1 m_2 \underbrace{(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}_{-\ddot{x}} = K(m_1+m_2)x \Rightarrow \boxed{\mu\ddot{x} = -Kx}$$

grau de liberdade relativo para o CM c/ massa μ

$-\ddot{x}$, pois $x = x_2 - x_1$

onde μ: massa reduzida $= \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

"reais" → "virtuais"

não-separáveis: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ m_1, & m_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{CM} & x \\ M & \mu \end{pmatrix}$ trivial, dinâmica

$\ddot{x}_{CM} = 0 \Rightarrow F_{CM} = 0 \Rightarrow -V_{CM}$ 0

dinâmica do problema só em μ

$$E = E_{CM} + E_{rel} = \underset{\frac{1}{2}\underbrace{(m_1+m_2)}_{M}\dot{x}_{CM}^2}{T_{CM}} + \cancel{U_{CM}} + \underset{\frac{1}{2}\mu\dot{x}^2}{T_{rel}} + \underset{\frac{1}{2}Kx^2}{U_{rel}} \Rightarrow \therefore \boxed{E = \frac{1}{2}\left(M\dot{x}_{CM}^2 + \mu\dot{x}^2 + Kx^2\right)}$$

E ↓ independe das "coordenadas", só do sistema

10/04/2013

$V_1 = V_1(x_1)$ $\quad$ $V_2 = V_2(x_2)$

Analisando: $L = T_1 + T_2 - V_1 - V_2$ desacoplados, não conecta um com o outro (Problema Separável)

corpos desacoplados

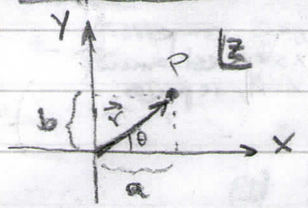
Mas no nosso caso, o potencial não é separado, as partículas se acoplam

$$V(x) = V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \left[(x_2 - x_1) - \ell\right]^2 = V(x_1 - x_2)$$

Problema não-separável mas que só depende de uma variável $x = x_1, x_2$

$\therefore$ Passo descrever o potencial não-separável do tipo $V(x_1,x_2) = V(x_2 - x_1)$ como dependente apenas de uma única "partícula" imaginária

Números $\mathbb{C}$:



$\vec{r} = a\hat{x} + b\hat{y} \longleftrightarrow z = a + ib$ — i indica uma rotação de $90°$ anti-horária no plano

(a,b) $\quad$ 2 rotações $\Rightarrow i^2 = -1$

$a = Re(z)$ $\quad$ $b = Im(z)$

$\therefore z = Re(z) + i \cdot Im(z)$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

Operações: $z_1 + z_2 = (Re(z_1) + Re(z_2)) + i\,(Im(z_1) + Im(z_2))$ soma

$z^* = Re(z) - i \cdot Im(z)$ complexo conjugado

$$\therefore \boxed{Re(z) = \frac{z + z^*}{2}, \quad Im(z) = \frac{z - z^*}{2i}} \quad (A)$$

módulo

$\therefore |z|^2 = z \cdot z^* = (Re(z) + i \cdot Im(z))(Re(z) - i \cdot Im(z))$

$= (Re(z))^2 - (i \cdot Re(z))^2 \Rightarrow \boxed{|z|^2 = (Re(z))^2 + (Im(z))^2}$

Fórmula de Euler:

$$f(x) = e^{\lambda x} \quad \begin{cases} \dfrac{df}{dx} = \lambda \cdot f & (1a) \\ f(0) = 1 & (1b) \end{cases}$$

$\dfrac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$, $\quad \dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x + i \cdot \cos x \overset{i^2=-1}{=} i(\cos x + i \operatorname{sen} x) \quad (2a)$$

$$\cos(0) + \operatorname{sen}(0) = 1 \quad (2b)$$

Comparando (1a) c/ (2a) e (1b) c/ (2b), vem:

$$\therefore \boxed{e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x} \quad \to e^{i\pi} + 1 = 0$$

Fórmula de Euler

$$\therefore \begin{cases} \cos x = Re(e^{ix}) \\ \operatorname{sen} x = Im(e^{ix}) \end{cases} \overset{(A)}{\Rightarrow} \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

FII-8

10 / 04 / 2013

Física II

Forma Trigonométrica:

$(x,y) \Rightarrow (r,\theta)$ $\quad x = r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = |z| \\ \theta = \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) = Arg\, z \end{cases}$

$\quad y = r\,sen\theta \Rightarrow \frac{sen\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} \Rightarrow$

$\therefore \boxed{z = r e^{i\theta}}$

$\hookrightarrow Re(z) = r\cos\theta,\ Im(z) = r\,sen\theta$ usando Euler

Produto: $z_1 \cdot z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Divisão: $z_1 \cdot z_2^{-1} = r_1 \cdot r_2^{-1} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

Oscilador:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 x = 0 \overset{z = x+iy}{\Longleftrightarrow} Re\left(\frac{d^2z}{dt^2} + w^2 z\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + w^2 z = 0} \ (*)$$

Chute: $z(t) = C\, e^{pt}$

$\frac{dz}{dt} = Cp \cdot e^{pt}$

$\frac{d^2z}{dt^2} = Cp^2 \cdot e^{pt}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} p^2 = -w^2 \Rightarrow \boxed{p = \pm iw} \therefore \boxed{z(t) = C e^{+iwt}}$ Solução p/ o Oscilador Harmônico

$C \in \mathbb{C}$, $C = A e^{i\phi}$ ← real

$z(t) = A e^{iwt + i\phi}$, $Re(z) = A\cos(wt + \phi)$

11/04:

$z(t) = C \cdot e^{iwt}$, mas $C = A \cdot e^{i\varphi}$ $\Rightarrow z(t) = A \cdot e^{i(wt+\varphi)} \overset{Euler}{=} A(\cos(wt+\varphi) + i\,sen(wt+\varphi))$

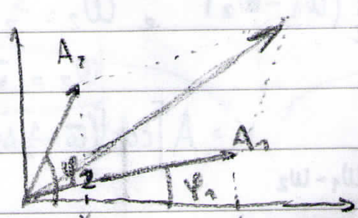
$Re(z) = A\cos(wt+\varphi)$

Superposições:

a) 1D + mesmo w

$x(t)$ $\quad x_1 = A_1\cos(wt + \varphi_1)$

$\quad x_2 = A_2\cos(wt + \varphi_2)$



$x_1 = Re(z_1) = Re(A_1 e^{i\varphi_1} e^{iwt})$

$x_2 = Re(z_2) = Re(A_2 e^{i\varphi_2} e^{iwt})$ $\quad x_1 + x_2 = Re(z_1 + z_2) = Re\left[e^{iwt}(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})\right]$

$$= Re\left[e^{i(wt+\varphi_1)}\underbrace{\left[A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}\right]}_{A \cdot e^{i\beta}}\right], \ \boxed{\beta = \varphi_2 - \varphi_1}$$

11/04/2013

Continuando: $x_1 + x_2 = Re\left[e^{i(\omega t + \varphi_1)} \cdot A \cdot e^{i\beta}\right] = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_1 + \beta)$

A: $\left(A_1 + A_2 \cdot e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}\right)\left(A_1 + A_2 \cdot e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}\right) = A e^{i\beta} \cdot A e^{-i\beta} = A^2$

$A_1^2 + A_1 A_2 \cdot e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} + A_1 \cdot A_2 \cdot e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + A_2^2 = A^2$

$\therefore \boxed{A^2 = A_1^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_2^2}$

β: $A_1 + A_2 \cdot e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} = A \cdot e^{i\beta}$

$A_1 + A_2 \cdot e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} = A \cdot e^{-i\beta}$ (-1) $\Rightarrow A_2 \underbrace{\left(e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} - e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}\right)}_{= 2i \, sen(\varphi_2 - \varphi_1)} = A \cdot \underbrace{\left(e^{i\beta} - e^{-i\beta}\right)}_{= 2i \, sen\beta}$

$\therefore \boxed{sen\beta = \frac{A_2}{A} \, sen(\varphi_2 - \varphi_1)}$

b) 1D + freq. (ω) diferentes $\quad x = x_1 + x_2$

$x(t) \begin{cases} x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$

Vamos imaginar que $\exists \tau$ período tq dps de τ os 2 osciladores voltem, simultaneamente, à pos. inicial:

$\begin{cases} \omega_1 \tau = 2\pi n_1 \\ \omega_2 \tau = 2\pi n_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_2}{\tau_1}}$

$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ $\quad \Downarrow$

$\boxed{n_1 \tau_1 = n_2 \tau_2 = \tau}$

Condição p/ Movimento Periódico

Batimentos:

$A_1 = A_2 = A, \; \varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$x = x_1 + x_2 = A\left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right]$

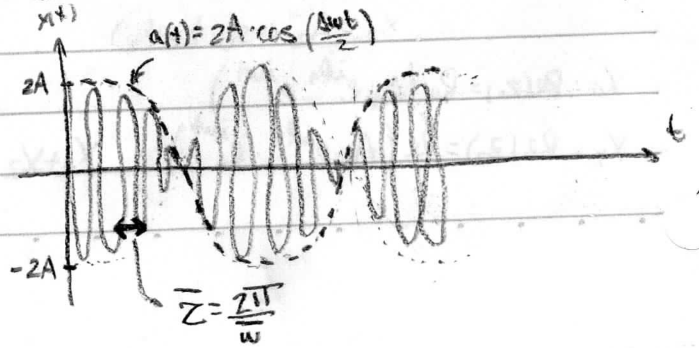
$\omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ e $\omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ "abrindo" os cossenos

$\boxed{\omega_1 = \overline{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega}$ $\quad \boxed{\omega_2 = \overline{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega}$

$x = A\left[\cos\left[\left(\overline{\omega} + \tfrac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right] + \cos\left[\left(\overline{\omega} - \tfrac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right]\right] = 2A \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \cos(\overline{\omega} t)$

$\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \; \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$

$\boxed{\Delta\omega << \overline{\omega}} \Rightarrow$ Batimentos



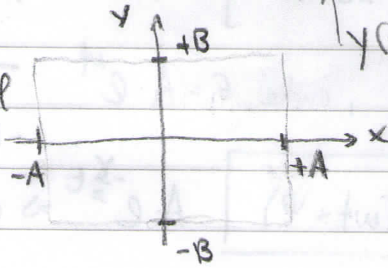
FI-9

11/04/2013

Física II

(c) mesma frequência, 2D $(x(t), y(t))$ $\Rightarrow \begin{cases} x(t) = A\cdot\cos(wt+\varphi_1) \\ y(t) = A\cdot\cos(wt+\varphi_2)\end{cases}$

S.P. General $\Rightarrow \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \varphi$



15/04: $\begin{cases} \text{Lista 1} \rightarrow 24/04 \\ \text{P1} \longrightarrow 08/05 \quad \text{Cap. 3,4} \end{cases}$

Oscilações Amortecidas: (Cap. 4)

situação linearizada = velocidades pequenas

$F_{atrito}: f(v) \approx f_0 + f_1 v \longrightarrow \boxed{F_{at.} = -\rho\dot{x}}$

f_0: pequeno

$f_1 < 0$, oposição ao mov.

$m\ddot{x} = -Kx - \rho\dot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma\dot{x} = 0}$ onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ e $\gamma = \frac{\rho}{m} > 0$

$x = Re(z)$ tq (chute) $z = C\cdot e^{pt}$

qqr de das o resultado (Homogênea

$z = e^{pt}$

$\dot{z} = p\cdot e^{pt}$

$\ddot{z} = p^2\cdot e^{pt}$

$p^2 e^{pt} + \omega_0^2 e^{pt} + p\gamma\cdot e^{pt} = 0 \Rightarrow \boxed{p^2 + \omega_0^2 + p\gamma = 0}$

$\boxed{p_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}}$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

$p_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega$

3 casos possíveis:

(i) $\frac{\gamma}{2} < \omega_0 \Rightarrow$ Amortecimento Sub-Crítico

(ii) $\frac{\gamma}{2} = \omega_0 \Rightarrow$ // Crítico

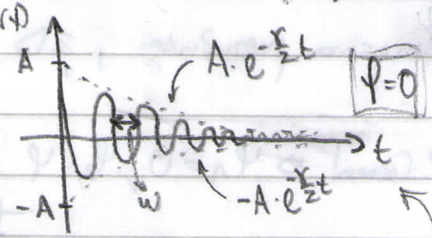
(iii) $\frac{\gamma}{2} > \omega_0 \Rightarrow$ // Super-Crítico

15/04/2013

$z(t) = a \cdot e^{p_+ t} + ib \cdot e^{p_- t}$ (Combinação Linear das Soluções)

$= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[a \cdot e^{i\omega t} + ib \cdot e^{-i\omega t}\right]$

$= C \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot e^{i\omega t}$, onde $C = A \cdot e^{i\varphi}$



$\boxed{x = Re(z) = A \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)}$ $A \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \Rightarrow$ amplitude que decai exponencialmente

Energia $\Rightarrow$ sendo transferida p/ o ambiente

$E(t) = \frac{1}{2} m (\dot{x}(t))^2 + \frac{1}{2} K (x(t))^2$

$0 > \frac{dE(t)}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + Kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + Kx) = \dot{x}(-\rho\dot{x}) = -\rho(\dot{x})^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d\,E(t)}{dt} = -\rho \cdot \dot{x}^2}$

$\frac{\partial E}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$ $\qquad m\ddot{x} = -Kx - \rho\dot{x}$

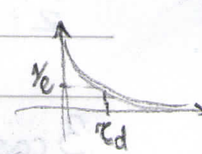
$E(t) = \frac{1}{2} m \cdot A^2 e^{-\gamma t}\left[\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)\cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi) + \frac{\gamma}{2}\omega_0 \operatorname{sen}[2(\omega t + \varphi)]\right]$

Valor Médio de E(t) em um "período":

$\bar{E}(t) = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} E(t')dt'$ Amortecimento Fraco: $\boxed{\gamma << \frac{1}{\tau}}$ ($\propto \omega_0$) $\Rightarrow e^{-\gamma t}$ não muda muito em um "período"

$\bar{E}(t) = \frac{m \cdot A^2 \cdot e^{-\gamma t}}{2\tau}\int_t^{t+\tau}\left[\omega^2\cos^2 + \omega^2 \operatorname{sen}^2 + \cancel{\omega \cdot \operatorname{sen}}\right]dt'$ (não dá contribuições) $\qquad \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\cos^2(\omega t')dt' = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\operatorname{sen}^2(\omega t')dt' = 1/2$

$\bar{E}(t) = \frac{m \cdot A^2 \cdot e^{-\gamma t}}{2\tau} \cdot \left(\frac{1}{2}\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right) + \frac{\omega^2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\bar{E}(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t}}$ $\gamma << \omega_0$



decaimento exponencial c/ $\boxed{\tau_d = \frac{1}{\gamma}}$ (tempo de decaimento) que indica o quão rápido é o decaimento $\frac{1}{e}$

$[\gamma] = Hz \Rightarrow \left[\frac{1}{\gamma}\right] = $ tempo

FI-10

15/04/2013

Física II

$m\ddot{x} = -Kx - \rho\dot{x}$, fazendo análise da eq.ção

m, K, ρ, t
$\downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow$
$M \quad L \qquad T$

$[m\ddot{x}] = \frac{ML}{T^2}$, $[\rho\dot{x}] = \frac{ML}{T^2} \Rightarrow [\rho] = \frac{M}{T} \Rightarrow \boxed{\left[\frac{m}{\rho}\right] = T}$

ρ: fator relativo ao amortecimento

$\left[\frac{m}{\rho}\right]$: parâmetro que diz quão rapidamente as coisas mudam no sistema (dissipação)

<u>Ex.</u>: Grandeza Quântica (Relativística)

$G_N = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$, $\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-34} \frac{kg \cdot m^2}{s}$, $c = 2{,}998 \cdot 10^8\, m/s$

$$l_p = \sqrt{\frac{G_N \cdot \hbar}{c^3}} = 1{,}616 \cdot 10^{-33}\, cm \Rightarrow [l] = \sqrt{\frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot \frac{kg\, m^2}{s} \cdot \frac{s^3}{m^3}} = m$$

$$t_p = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{G_N \cdot \hbar}{c^5}} = 5{,}391 \cdot 10^{-44}\, s$$

l_p é a única combinação possível? SIM!

$[G_N]^\alpha [\hbar]^\beta [c]^\gamma = L$

$$\frac{L^{3\alpha}}{M^\alpha T^{2\alpha}} \cdot \frac{M^\beta L^{2\beta}}{T^\beta} \cdot \frac{L^\gamma}{T^\gamma} = L \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = -3/2}$$

$$M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = 2{,}176 \cdot 10^{-5}\, g$$

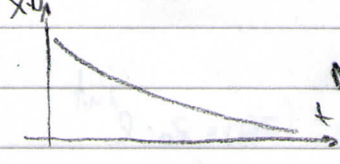
$\boxed{m_{proton} = 10^{-19} \cdot M_p}$ Problema de Hierarquia (uma das Grandes Perguntas)

16/04: $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\rho}{m}$, $\omega_0^2 = K/m$

$x = Re(z)$, $z = e^{pt}$, $p_\pm = \frac{-\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$

(i) $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ ☑ última aula

(ii) $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$ $\quad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{2} - \omega_0^2} > 0 \quad z = a\, e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)t} + b\, e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right)t}$



NÃO tem OSCILAÇÃO (Amortec. Supercrítico)

(iii) $\frac{\gamma}{2} = \omega_0 \Rightarrow \boxed{p_+ = p_-}$ 1 solução $x_1 = e^{-\frac{\gamma}{2}t}$, $x_2 = ?$

(ou seja, falta outra pois é uma eq. 2ª ordem)

16 / 04 / 2013

$$\underline{x_2 = t \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}} \;?\quad \begin{cases} \gamma \dot{x}_2 = \gamma e^{-\frac{\gamma}{2}t} - \frac{\gamma^2}{2} t\, e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ \ddot{x}_2 = -\frac{\gamma}{2} e^{-\frac{\gamma}{2}t} - \frac{\gamma}{2} e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \frac{\gamma^2}{4} t\, e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ \frac{\gamma^2}{4} x = \frac{\gamma^2}{4} t\, e^{-\frac{\gamma}{2}t} \end{cases} \Rightarrow \therefore \ddot{x}_2 + \gamma \dot{x}_2 + \frac{\gamma^2}{4} x = 0$$

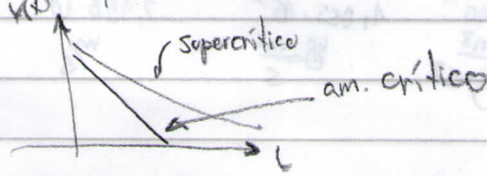
$\omega_0^2 = \frac{\gamma^2}{4}$

∴ é solução

$\beta > 0$, $\beta \to 0$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2\beta}\right) \xrightarrow[\beta \to 0]{} e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\frac{1 + \beta t - (1 - \beta t)}{2\beta}\right) = t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\therefore \boxed{x(t) = a \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} + b t \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}}$$



Oscilações Forçadas:

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)}$$

onde $F(t)$ é periódica de período ω → $\boxed{F(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t)}$

Eq. ñ-homogênea

↳ indep. de ω_0

Se x_1 e x_2 são soluções,

$x_1 + x_2$ não será solução

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega_0^2 (x_1 + x_2) = (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) + (\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2) = 2F$$

Modificação

$x_1 : \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = F_1$, $x_2 : \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = F_2$

$$X = a x_1 + b x_2 : \underbrace{(a\ddot{x}_1 + b\ddot{x}_2)}_{\ddot{X}} + \omega_0^2 \underbrace{(a x_1 + b x_2)}_{X} = a F_1 + b \cdot F_2$$

Em particular: $\begin{cases} F_2 = 0 \\ a = 1 \\ F_1 = F \end{cases}$ $X = x_1 + b x_2$ solução de $\ddot{X} + \omega_0^2 X = F_1$

∴ x_2 é solução da eq. homogênea e x_1 é solução part. da eq. ñ-homog.

Então, x_2 já é conhecido, basta achar 1 solução x_1:

$z(t) = x(t) + i y(t)$, $x(t) = Re(z(t))$

$$\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}}$$ eq. a ser resolvida

Chute: $\begin{cases} z(t) = z_0 \cdot e^{i\omega t} \\ \dot{z}(t) = i\omega z(t) \\ \ddot{z}(t) = -\omega^2 z(t) \end{cases}$

FII-11

16/04/2013

Física II

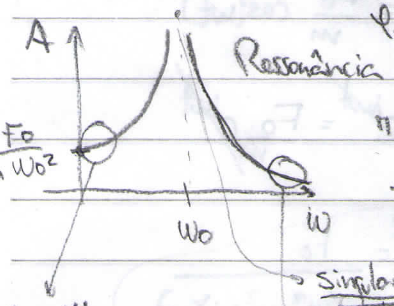
$$-w^2 z + w_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{iwt}$$

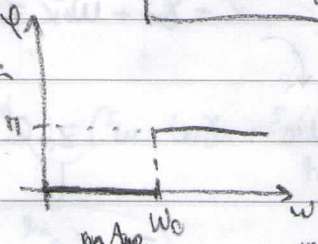
$$\boxed{z(t) = \frac{F_0}{m(w_0^2 - w^2)} e^{iwt}}$$

tq $\frac{F_0}{m(w_0^2-w^2)} = A \cdot e^{i\varphi}$

onde $A = \frac{F_0}{m|w_0^2 - w^2|} > 0$

e $\varphi = \begin{cases} 0, & w < w_0 \\ \pi, & w > w_0 \end{cases}$





p/a Amp. Singularidade, p/ a fase descontinuidade

$\boxed{w_0 = \text{fixo} = \text{auto-frequência} \,/\, w = \text{variável}}$

↳ não é visto em sist. físicos ⇒ aparecer pq desconsideramos a Resistência

$w << w_0$

$\ddot{x} + w_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(wt)$

$w >> w_0$

Sistema não consegue acompanhar a freq. da força

$\varphi = \begin{cases} 0, & w < w_0 \\ \pi, & w > w_0 \end{cases}$

$$\therefore \boxed{X(t) = \underbrace{B\cos(w_0 t + \varphi_0)}_{\text{Sol. Homog.}} + \underbrace{\frac{F_0}{m(w_0^2-w^2)}\cos(wt+\varphi)}_{\text{soluções particular}}}$$

Solução do Problema

$X(0) = 0 = B\cos\varphi_0 + \frac{F_0}{m(w_0^2-w^2)} = 0$

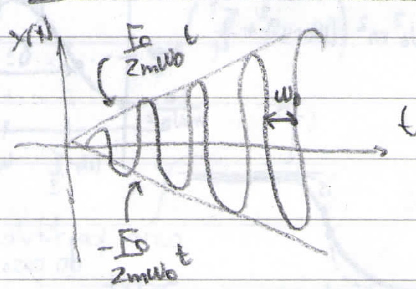
$\dot{X}(0) = 0 = -w_0 B \operatorname{sen}\varphi_0$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_0 = 0,\ B = -\frac{F_0}{m(w_0^2-w^2)}}$

$$\therefore \boxed{X(t) = \frac{-F_0}{m(w_0+w)}\left[\frac{\cos(w_0 t) - \cos(wt)}{w_0 - w}\right]} \underset{w \to w_0}{\approx} -\frac{F}{2mw_0}\left[\frac{\left(1 - \frac{w_0^2 t^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{wt^2}{2}\right)}{w_0 - w}\right]$$

fazendo a 1ª expansão c/ mais termos é + claro

$$= \frac{F_0}{2mw_0}\frac{t^2}{2}\frac{\cancel{(w-w_0)}(w_0+w)}{\cancel{(w_0-w)}} \approx \boxed{\frac{F_0}{2mw_0} t \operatorname{sen}(w_0 t)}$$



Cronograma:

P_1	~~3~~		P1: 8 Maio
	~~4~~		
	5	Ondas	
P_2	6	Som	P2: 29 Maio
	7	Temp.	
	8	1ª Lei	
P_3	9	Gases	P3: 26 Junho, talvez ele dê
	10	2ª Lei	
	11	cinética ← 21/06	
	12	Mec. Est.	

17/04/2013

Ansatz == "chute", em alemão

17/04:

Oscilações Amortecidas Forçadas:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{\frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}_{Re\left(\frac{F_0}{m}e^{i\omega t}\right)}$$

$x(t) = Re(z(t))$, $\overset{\text{Ansatz}}{z(t) = z_0 e^{i\omega t}}$ $\Rightarrow (\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2) z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$

$z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 = A e^{i\varphi}$

$\dot{z} = i\omega z$, $\ddot{z} = -\omega^2 z$

$$z_0 = A e^{i\varphi} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

$\boxed{Re(z) = A\cos(\omega t + \varphi)}$ onde:

- $|z_0|^2 = A\cancel{e^{i\varphi}} \cdot A\cancel{e^{-i\varphi}} = A^2$

$$= \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)} \cdot \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega)} = \frac{F_0^2}{m^2\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2\right)}$$

$$\therefore \boxed{A = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}}$$

- $z_0 = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{re^{i\theta}} = Ae^{i\varphi}$, $\theta = -\varphi$, onde $re^{i\theta} = \omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega$

$r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta = \omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega$

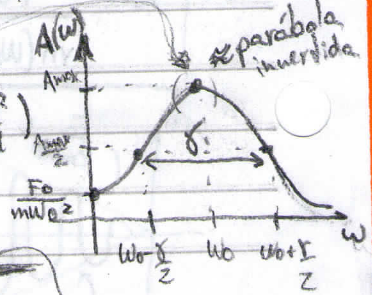
$$\begin{cases} r\cos\theta = \omega_0^2 - \omega^2 \\ r\,\text{sen}\,\theta = \gamma\omega \end{cases} \Rightarrow \theta = tg^{-1}\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

$$\therefore \boxed{\varphi = -tg^{-1}\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)}$$

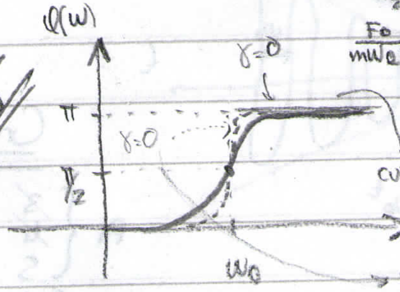
Checar: $\gamma \to 0$: $A^2 = \frac{F_0^2}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}$ ✓ e agora, quando $\omega = \omega_0$ ainda há continuidade!!

Pq $\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2\right) \neq 0$ quando $\omega = \omega_0$

$$A^2 = \frac{F_0^2}{m^2\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2\right)} \overset{\omega\approx\omega_0}{\simeq} \frac{F_0^2}{m^2\left((\omega_0-\omega)^2 4\omega_0^2+\gamma^2\omega_0^2\right)} = \frac{F_0^2}{4\omega_0^2 m^2\left((\omega_0-\omega)^2+\frac{\gamma^2}{4}\right)}$$



$\therefore$ Ressonância centrada em ω_0 c/ largura γ



$A_{max} = A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}$

$A(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$

$$\frac{A_{max}}{A(0)} = \frac{\cancel{F_0}}{\cancel{m}\gamma\cancel{\omega_0}} \cdot \frac{\cancel{m}\omega_0^{\cancel{2}}}{\cancel{F_0}} \Rightarrow \boxed{Q \equiv \frac{A_{max}}{A(0)} = \frac{\omega_0}{\gamma}}$$ Fator de amplificação

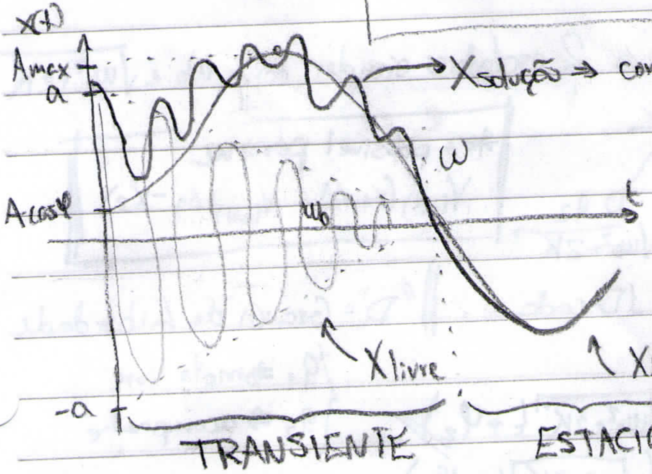
$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \gamma = 1/\tau_d$, $t \gg \tau_d$: não há mais a oscilação livre, só "sobrevive" a oscilação forçada

FII-12

17 / 04 / 2013

Física II

Soluções mais Geral: $X = X_{livre} + X_{forçado} = a \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \underbrace{\frac{F_0 \cos(\omega t + \varphi)}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}}_{A}$

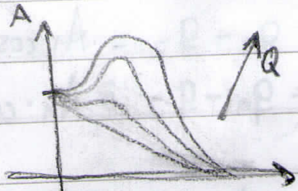


→ $X_{solução}$ → conforme X livre → 0,

X solução → X forçado

$(t \gg \tau_d)$ ⇆ Força-se o movimento de frequência ω_0 "à sua" frequência ω

"meia-vida" da ressonância



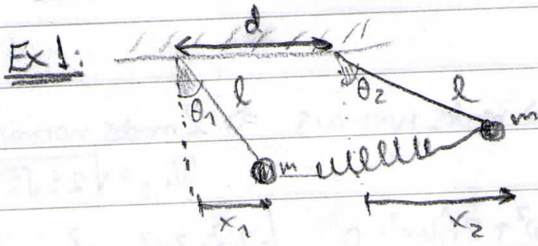
$\gamma \gg \omega_0$: $Q \ll 1$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\underbrace{\sqrt{\cancel{\omega_0^4}+\omega^4-\cancel{2\omega_0^2\omega^2}+\gamma^2\omega^2}}_{\gamma \gg \omega_0}} \Rightarrow A \sim \frac{1}{\omega}$$

4.5.14 $\frac{1}{2}m\omega_0^2\overline{x^2}$ e não $\frac{1}{2}m\omega_0^2\overline{x}^2$

Oscilações Acopladas:

Ex 1:



$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ θ_1, θ_2 pequenos: $x_1 \simeq \ell\cdot\theta_1$, $x_2 \simeq \ell\cdot\theta_2$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) \end{cases}$$ → acoplamento (*)

Mais simples do q. pêndulo duplo pq as coordenadas do CM e relativas desacoplam (*) ← COORDENADAS NORMAIS

$$K = \frac{k}{m} : \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = K(x_2 - x_1) & (i) \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_1 = K(x_1 - x_2) & (ii) \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ q_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

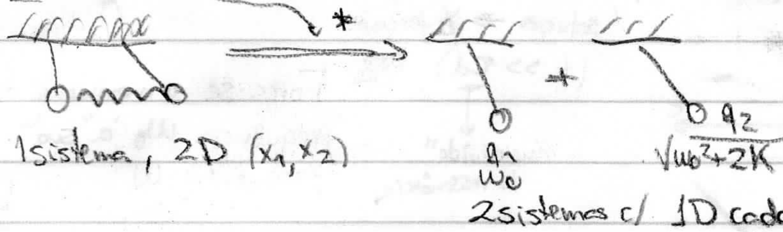
$$(i)+(ii): \underbrace{(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)}_{2\ddot{q}_1} + \omega_0^2\underbrace{(x_1 + x_2)}_{2q_1} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = 0}$$ como um pêndulo simples com ω

17/04/2013

(i)-(ii): $\underbrace{(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)}_{2\ddot{q}_2} + \omega_0^2 \underbrace{(x_1-x_2)}_{2q_2} = 2K\underbrace{(x_2-x_1)}_{-2q_2} \Rightarrow \boxed{\ddot{q}_2 + (\omega_0^2+2K)q_2 = 0}$

oscilador simples c/ $\sqrt{\omega_0^2+2K} > \omega_0$

Coord. Normais ⇒ Desacoplam o sistema em 2 osciladores simples com ω_0 e $\sqrt{\omega_0^2+2K}$



$\boxed{\text{*: possível porque } V_{(int)}(x_1,x_2) = V_{(int)}(x_1-x_2)}$

"D" = Grau(s) de Liberdade

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + q_2 = A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_1) + A_2\cos\left(\sqrt{\omega_0^2+2K}\,t+\varphi_2\right) \\ x_2 = q_1 - q_2 = A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_1) - A_2\cos\left(\sqrt{\omega_0^2+2K}\,t+\varphi_2\right) \end{cases}$$

q_1 ⇒ moto livre
q_2 ⇒ acompanhe

⁝ = mesma frequência

Escolhendo, $A_2=0 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

$A_1=0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -x_2}$

x_1 e x_2 têm a mesma frequência!!

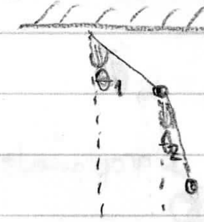
MODOS NORMAIS DA OSCILAÇÃO

→ como se não houvesse a mola: frequência $=\omega_0$ (modo simétrico)

→ mola atua, frequência $= \sqrt{\omega_0^2+2K} > 0$ (modo anti-simétrico)

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema ND} \\ \Updownarrow \\ \text{N modos normais}\end{array}}$

Voltando ao Pêndulo Duplo:



$$\begin{cases}\theta_1 = A\cdot e^{i\omega t} \\ \theta_2 = B\cdot e^{i\omega t}\end{cases}$$ → mesmo ω ⇒ modos normais ⇒ 2 modos normais

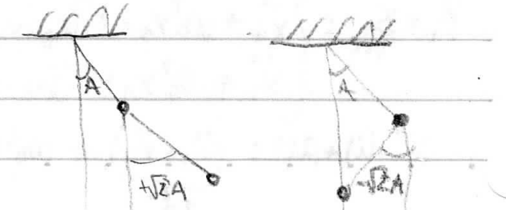
$\omega_{1,2} = \sqrt{2\pm\sqrt{2}}\,\omega_0$

$$\begin{cases} -2A\omega^2 - B\omega^2 + 2A\omega_0^2 = 0 \\ -A\omega^2 - B\omega^2 + B\omega_0^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2\omega^2+2\omega_0^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2+\omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix}$$

Se houver inversa, basta multiplicar na esquerda e $A,B=0$ (Sol. Trivial). Assim, a matriz não deve ter inversa, ou seja, $\underline{\det M = 0}$

$\left(\ \right)_{\omega=\omega_1}\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix} = 0 \rightarrow B = -\sqrt{2}A$ ⇒ Modos Normais:

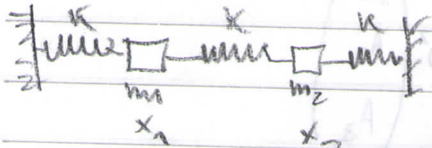
$\left(\ \right)_{\omega=\omega_2}\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix} = 0 \rightarrow B = +\sqrt{2}A$



FII-13

17/04/2013

Física II



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k(x_1 - x_2) = -2kx_2 + kx_1 \end{cases}$$

Queremos generalizar p/ n corpos, então vai-se usar o método do pêndulo duplo, e não o método "$V_{ini}(x_1,x_2) = V_{fin}(x_1,x_2)$"

$$\begin{cases} X_1 = A_1 \cdot e^{i\omega t} \\ X_2 = A_2 \cdot e^{i\omega t} \end{cases}$$ chute de modos normais (mesmo ω)

$$\begin{pmatrix} \omega^2 m - 2k & k \\ k & \omega^2 m - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore \underbrace{\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}}_{\text{matriz sendo aplicada sobre vetor } \binom{A_1}{A_2}} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \omega^2 m \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$ Eq. de Autovalores, $\omega^2 m$ autovetor

$\omega^2 m$ é autovalor pq não há rotação, só multiplicação

$\binom{A_1}{A_2}$: autoestado, estados nos quais a eq. é válida

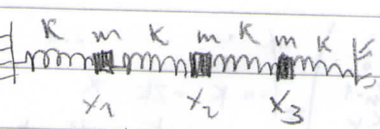
Quero $\begin{pmatrix} \omega^2 m - 2k & k \\ k & \omega^2 m - 2k \end{pmatrix}$ não invertível $\Rightarrow \det() = 0$

$$(\omega^2 m - 2k)^2 = k^2 \longrightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}}$$ modos normais

$\underline{\omega = \omega_1}$: $\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\omega = \omega_2}$: $\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 3k \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

18/04:



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ m\ddot{x}_3 = -\frac{k}{m}x_3 - \frac{k}{m}(x_3 - x_2) \end{cases}$$ $\omega_0^2 = k/m$

Procurando os <u>modos normais</u>

$x_i \longrightarrow z_i = A_i \cdot e^{i\omega t}$

$i = 1,2,3$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \qquad \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$-\omega^2 A_1 \cancel{e^{i\omega t}} = -\omega_0^2 \cdot A_1 \cdot \cancel{e^{i\omega t}} - \omega_0^2 (A_1 - A_2) \cancel{e^{i\omega t}}$

$-\omega^2 A_2 \cancel{e^{i\omega t}} = -\omega_0^2 (A_2 - A_1) \cancel{e^{i\omega t}} - \omega_0^2 (A_2 - A_3) \cancel{e^{i\omega t}}$

$-\omega^2 A_3 \cancel{e^{i\omega t}} = -\omega_0^2 (A_3 \cdot \cancel{e^{i\omega t}} - \omega_0^2 (A_3 - A_2) \cancel{e^{i\omega t}}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & -\omega^2 + 2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

18 / 04 / 2013

Ou a equação de autovalores $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$

$MA = 0$

Se $\exists M^{-1}$ então $M^{-1}MA = 0 \rightarrow A = 0$ solução trivial. Logo, $\nexists M^{-1} \rightarrow \boxed{\det M = 0}$

$\det M = (-\omega^2 + 2\omega_0^2)(\omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega^2 = 2\omega_0^2 \\ \omega^2 = (2 \pm \sqrt{2})\omega_0^2 \end{cases}$ 3 ~~modos~~ Normais

$\omega_1 = \pm\sqrt{2}\,\omega_0$

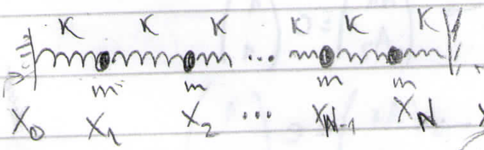
$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\omega_0^2 A_2 = 0 \\ -\omega_0^2(A_1 + A_3) = 0 \\ -\omega_0^2 A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A_2 = 0 \\ A_1 = -A_3 \end{matrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A_2 = 0$

$\omega_2 = \pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\omega_3 = \pm\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\omega_2 > \sqrt{2}\,\omega_0 = \omega_1$

N massas:



Cada X_n é medido c/ respeito à pos. de equilíbrio de n

MURO: $X_0 = 0$ $\forall t$ $X_{N+1} = 0$ $\forall t$

$m\ddot{X}_n = -K(X_n - X_{n-1}) - K(X_n - X_{n+1})$
$n = 1, 2, \dots, N$

$\Rightarrow m\frac{d^2}{dt}\begin{pmatrix} \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \\ X_{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \dots & & \\ \dots K & -2K & K & & \\ & K & -2K & K & \\ & & K & -2K & K \\ & & \dots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ X_n \\ X_{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$ $N \times N$

$X_i \rightarrow Z_i$: $\begin{pmatrix} \vdots \\ Z_{n-1} \\ Z_n \\ Z_{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ A_{n-1} \\ A_n \\ A_{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix} e^{i\omega t}$ mesmo ω modos normais

$-\omega^2 A_n = \omega_0^2(A_{n-1} - 2A_n + A_{n+1})$

$$\boxed{\frac{A_{n-1} + A_{n+1}}{A_n} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}}$$

4 incógnitas: A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, ω

1 equação

Resolver o problema:
(A_{n-1}, A_n, A_{n+1}) ou (A_{n-1}, A_n, ω)

FII-14

18 / 04 / 2013

Física II

Se $\omega \leq 2\omega_0$: $\boxed{A_n = B \cdot \cos(n\theta) + C \cdot \text{sen}(n\theta)}$ solução tirada do chapéu (chute)

↳ 3 parâmetros: (B, C, θ) → condizente c/ a equação de 4 incógnitas

(Se $\omega > 2\omega_0$ ⇒ ondas evanescentes ...)

$\therefore \cos\theta \equiv \dfrac{A_{n-1} + A_{n+1}}{2A_n} \overset{(*)}{=} \dfrac{2\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_0^2} \leq 1 \rightarrow \boxed{-2\omega_0 \leq \omega^2 \leq 2\omega_0}$

$\therefore A_0 \equiv B \cdot \cos(0 \cdot \theta) + C \cdot \text{sen}(0 \cdot \theta) = B$

$A_1 \equiv B \cdot \cos(1 \cdot \theta) + C \cdot \text{sen}(1 \cdot \theta) = B\cos\theta + C\,\text{sen}\theta$

$A_{n+1} \equiv (2 \cdot \cos\theta) A_n - A_{n-1} = (2 \cdot \cos\theta)(B \cdot \cos(n\theta) + C \cdot \text{sen}(n\theta)) - (B \cdot \cos((n-1)\theta) + C \cdot \text{sen}((n-1)\theta))$ ↳ expandiu

$= B\left(2 \cdot \cos\theta \cdot \cos n\theta - (\cos(n\theta) \cdot \cos\theta + \text{sen}(n\theta) \cdot \text{sen}\theta)\right)$

$+ C\left(2 \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}(n\theta) - (\text{sen}(n\theta) \cdot \cos\theta - \cos(n\theta) \cdot \text{sen}\theta)\right)$

$= B(\cos\theta \cdot \cos(n\theta) - \text{sen}(n\theta) \cdot \text{sen}\theta) + C(\cos\theta \cdot \text{sen}(n\theta) + \cos(n\theta) \cdot \text{sen}\theta)$

$\therefore \boxed{A_{n+1} = B\cos((n+1)\theta) + C \cdot \cos((n+1)\theta)}$ cqd Prova por Indução em n

$z_n = A_n \cdot e^{i\omega t} = (B \cdot \cos(n\theta) + C\,\text{sen}(n\theta)) \cdot e^{i\omega t}$

$X_n = \text{Re}(z_n) = F \cdot \cos(n\theta) \cdot \cos(\omega t + \beta) + G \cdot \text{sen}(n\theta) \cdot \cos(\omega t + \gamma)$

$B = F e^{i\beta}$
$C = G \cdot e^{i\gamma}$

Condições de Contorno: $X_0(t) = X_{N+1}(t) = 0 \quad \forall t$

$\therefore F \cdot \cos(0 \cdot \theta) \cdot \cos(\omega t + \beta) + G \cdot \cancel{\text{sen}(0 \cdot \theta)} \cdot \cos(\omega t + \gamma) = 0$

$\therefore F\cos(\omega t + \beta) = 0 \Rightarrow \boxed{F = 0}$

$\therefore G \cdot \underbrace{\text{sen}((N+1)\theta)} \cdot \cos(\omega t + \gamma) = 0$

$G \neq 0$, $\text{sen}((N+1)\theta) = 0 \quad \therefore \quad (N+1)\theta = m\pi, \; m \in \mathbb{Z}$

$\therefore \boxed{\theta = \dfrac{m\pi}{N+1}}$

$\therefore \boxed{X_n(t) = G \cdot \text{sen}\left(\dfrac{n \cdot m \cdot \pi}{N+1}\right) \cdot \cos(\omega t + \gamma)}$ $n = 0, 1, \dots, N, N+1$

$\therefore \boxed{\omega = 2\omega_0 \,\text{sen}\left(\dfrac{m\pi}{2(N+1)}\right)}$

Frequências são DISCRETAS
⇒ consequência das condições de contorno c/ o muro

$\cos\theta = \dfrac{2\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_0^2} \Rightarrow \omega^2 = 4\omega_0^2 \cdot \text{sen}^2\dfrac{\theta}{2} = 4\omega_0^2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{m\pi}{2(N+1)}\right)$

22/04/2013

22/04:

N graus de liberd.

$$\begin{cases} X_n(t) = G\cdot \text{sen}\left(\frac{nm\pi}{N+1}\right)\cdot\cos(\omega t+\gamma) \\ n = 0, \dots, N+1 \\ m \in \mathbb{Z} \\ \omega = 2\omega_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{2(N+1)}\right) \end{cases}$$

Aliasing (Efeito Nyquist):

$$\omega = 2\omega_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{2(N+1)}\right) = 2\omega_0\cdot\text{sen}\left(\frac{m\pi}{2(N+1)} \pm p\pi\right), \quad p\in\mathbb{Z}$$

$$\underbrace{m \to m \pm 2(N+1)p}, \quad p\in\mathbb{Z}$$

todos correspondem à mesma frequência ω (físico)

Devido a N ser finito

∴ P/ cada modo normal, há um determinado número de valores que te dá o mesmo ω (ou seja, são fisicamente equivalentes)

Checar N=2, N=3:

$N=2$: $X_n = G\cdot\text{sen}\left(\frac{nm\pi}{3}\right)\cdot\cos(\omega t+\gamma)$, $\omega = 2\omega_0\cdot\text{sen}\left(\frac{m\pi}{6}\right)$

$n = 1,2$; $m = 1,2$ (desconsid. Nyquist)

1º modo normal: $m=1$: $\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix} = G\cos(\omega t+\gamma)\begin{pmatrix}\text{sen}\,\pi/3\\ \text{sen}\,2\pi/3\end{pmatrix} = G\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cos(\omega t+\gamma)$

$$\omega_1 = 2\omega_0\,\text{sen}\,\pi/6 = \omega_0$$

$m=2$: $\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix} = G\cdot\cos(\omega t+\gamma)\begin{pmatrix}\text{sen}\,2\pi/3\\ \text{sen}\,4\pi/3\end{pmatrix} = G\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cos(\omega t+\gamma)$

$$\omega_2 = 2\omega_0\cdot\text{sen}\,\pi/3 = \sqrt{3}\,\omega_0$$

$N=3$: $X_n = G\cdot\text{sen}\left(\frac{nm\pi}{4}\right)\cdot\cos(\omega t+\gamma)$, $\omega = 2\omega_0\cdot\text{sen}\left(\frac{m\pi}{8}\right)$

$n=1,2,3$; $m = 1,2,3$

$m=1$: $\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix} = G\cos(\omega t+\gamma)\begin{pmatrix}\text{sen}\,\pi/4\\ \text{sen}\,\pi/2\\ \text{sen}\,3\pi/4\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$

- $\omega_1 = 2\omega_0\,\text{sen}(\pi/8) = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0$

Analogamente:

- $\omega_2 = 2\omega_0\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \sqrt{2}\,\omega_0$
- $\omega_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0$

$N\to\infty$: (mais simples que N finito, fato geral)

Nova notação: $x_n \equiv$ Pos. equilíbrio

ξ_n vai ser o deslocamento em torno de x_n

$$\xi_n = \xi(x_n) = \xi(x)$$

("Limite do contínuo") $\Delta x \to 0$: "etiqueta" discreta n vira uma coord. contínua

FI-15

22/04/2013

Física II

→ mesma coisa de antes: $x_n \to \xi_n$ (mudança de notação)

$$m\ddot{\xi}_n = -K(\xi_n - \xi_{n-1}) - K(\xi_n - \xi_{n+1}) = K\xi_{n-1} - 2K\xi_n + K\xi_{n+1}$$
$$= K\cdot\xi(x_{n-1}) - 2K\,\xi(x_n) + K\cdot\xi(x_{n+1})$$
$$= K\cdot\xi(x_n - \Delta x) - 2K\cdot\xi(x_n) + K\cdot\xi(x_n+\Delta x)$$

$$\frac{m}{\Delta x}\frac{d^2\xi}{dt^2} = K\left[\frac{\xi(x+\Delta x) - \xi(x)}{\Delta x} - \left(\frac{\xi(x) - \xi(x-\Delta x)}{\Delta x}\right)\right]\cdot\frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0$: $\frac{m}{\Delta x}\cdot\frac{d^2\xi}{dt^2} = (K\Delta x)\left(\xi'(x) - \xi'(x-\Delta x)\right)\cdot\frac{1}{\Delta x} = (K\cdot\Delta x)\cdot\xi''(x)$

$$\therefore \boxed{\left(\frac{m}{\Delta x}\right)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - (K\cdot\Delta x)\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0}$$ pois $\xi = \xi(x,t)$

PDE ou EDP

limite do contínuo

molas sem massa ⇒ mola massiva

$\left(\frac{m}{\Delta x}\right) = \rho$ densidade de massa, $K\cdot\Delta x = K$ módulo elástico

$$\therefore \boxed{\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \frac{K}{\rho}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0}$$ Equação de Ondas 1ª

$$\begin{pmatrix}\vdots\\ \xi_{n-1}\\ \xi_n\\ \xi_{n+1}\\ \vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vdots\\ A_{n-1}\\ A_n\\ A_{n+1}\\ \vdots\end{pmatrix} e^{i\omega t} \longrightarrow$$ Ansatz: $\xi(x,t) = a(x)\cdot e^{i\omega t}$

o que era n

as amplitudes A_n viram um "campo" $a(x)$ pois dependem do espaço

eq. de onda:

$$-\omega^2 a(x)\cdot\cancel{e^{i\omega t}} - \frac{K}{\rho}\cdot a''(x)\cdot\cancel{e^{i\omega t}} = 0 \quad \therefore a''(x) + \frac{\omega^2\rho}{K}a(x) = 0 \to \text{Oscilador Harmônico}$$

$$a(x) = A\cdot e^{px}$$
$$p^2\cancel{A}\cdot\cancel{e^{px}} + \frac{\omega^2\rho}{K}\cdot\cancel{A}\cancel{e^{px}} = 0 \Rightarrow p^2 = -\frac{\omega^2\rho}{K} \Rightarrow \boxed{p = \pm i\sqrt{\frac{\omega^2\rho}{K}}}$$

Solução da Eq. de Onda ⇒ $$\boxed{\xi(x,t) = A\cdot e^{\pm i\sqrt{\frac{\omega^2\rho}{K}}\,t}\; e^{\pm i\sqrt{\frac{\omega^2\rho}{K}}\,t} = A\cdot e^{i(\pm kx \pm \omega t)}}$$

k: vetor de onda (nada a ver c/ constante elástica)

23/04/2013

23/04: Cap. 5

Onda = transporte de E e $\vec{p}$ sem transporte de matéria

└→ longitudinais × transversais

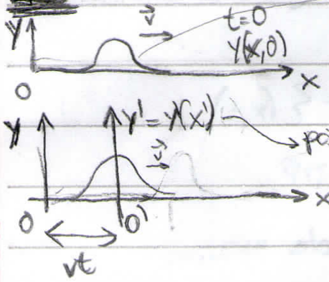
longitudinais ↓ oscilação na mesma direção da propag. da onda

transversais ↓ deslocamento perpendicular à propagação da onda (ex.: ondas eletromag. cordas vibrantes)

1D, 3D (Som → Cap. 6)

└→ estacionária × (fixa)

1D:



→ poderia não ser um perfil simples

$t=0$, $y(x,0)$

$y = y(x,t)$

$y' = y(x')$ → pois y' se move junto c/ a onda

transf. de Galileu

$$\begin{cases} y'(x') = f(x') \\ x' = x - vt \\ y' = y \end{cases}$$

$y(x,t) = f(x-vt)$ onda para direita

$y(x,t) = f(x+vt)$ onda " esquerda

∴ Perfil fixo translandando no tempo:

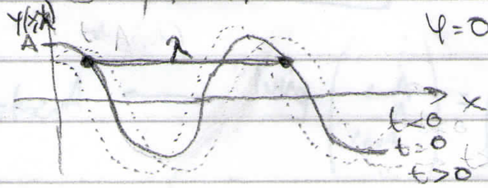
$\underbrace{y(x,t)}_{2\text{ variáveis}} \rightarrow f(\underbrace{x \pm vt}_{\text{combinação das 2 variáveis}})$

$$\boxed{y(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt)}$$

→ pode-se perceber já a semelhança c/ a Eq. de Ondas anterior

Até agora $f(x+vt)$ era uma função geral. Tomemos $f(x \pm vt)$ = harmônica

p.ex.: $\boxed{y(x,t) = A \cdot \cos(\underbrace{k(x \pm vt) + \varphi}_{\phi(x,t)})}$



OHS: $A\cos(\omega t + \varphi)$

$kv = \omega = \dfrac{2\pi}{\tau}$

$\lambda :=$ comprimento de onda

$\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

$k :=$ número de onda

$k \leftrightarrow E$

Onda Monocromática ⇕ k = constante

$\phi(x,t) = kx \pm \omega t + \varphi$

fase da onda

$y(x,t) = \mathrm{Re}\left[A \cdot e^{i(kx \pm \omega t + \varphi)}\right]$

A equação da Onda: 2ª

$$\boxed{y(x,t) = f(\underbrace{x \pm vt}_{x'})}$$

$\dfrac{\partial y}{\partial t}$: velocidade $= \dfrac{df}{dx'} \cdot \dfrac{\partial x'}{\partial t} = \dfrac{df}{dx'} \cdot (\pm v)$

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$: aceleração $= \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{df}{dx'}(\pm v)\right) = \pm v \cdot \dfrac{d}{dx'}\left(\dfrac{df}{dx'}\right)\dfrac{\partial x'}{\partial t} = v^2 \cdot \dfrac{d^2 f}{dx'^2}$ (*)

FII-16

25 / 04 / 2013

Física II

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dx'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{dx'}\right) = \frac{d}{dx'}\left(\frac{df}{dx'}\right)\cdot\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dx'^2} \quad (**)$$

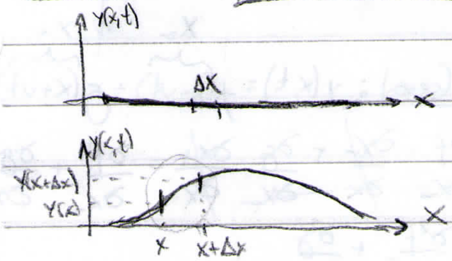
Comparando (*) com (**), temos:

$$\therefore \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \qquad v^2 = \frac{K}{\rho}$$

onde v é a velocidade de propagação da onda

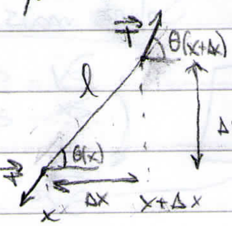
Equação de Ondas 2ª

Equação da Corda Vibrante: (violão, p.ex.)



μ: densidade de massa: $\frac{M}{L} = \frac{\Delta m}{\Delta x} \Rightarrow \Delta m = \mu\cdot\Delta x$

discretizando a corda
l = reto mas $\theta(x) \neq \theta(x+\Delta x)$



$\Delta x = l\cdot\cos(\theta(x))$

$\Delta y = l\cdot \operatorname{sen}(\theta(x))$

$\Delta x \to 0$

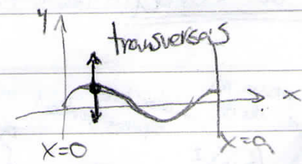
$\operatorname{tg}\theta(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\partial y}{\partial x}$

Resultante Vertical de $\vec{T}$:

$$T\,\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} - T\cdot\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

força em x+Δx — força em x

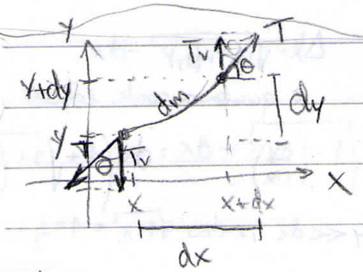
25/04:



Um ponto da corda só se desloca em y
$\therefore y = y(x,t)$

2 parâmetros: μ, T

μ: densidade de massa $\left(\frac{M}{\Delta x}\right)$ — T: Tensão da corda



$dy \ll dx$: $|\vec{T}| = $ cte (dF_H = desprezível)

dF_v: vertical

$$dF_v = T_v(x+dx) - T_v(x) = T\operatorname{sen}\theta(x+dx) - T\operatorname{sen}\theta(x+dx)$$

$$\approx T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx} - T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}$$

$$= T\left(\frac{\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}}{dx}\right)dx = \boxed{T\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx}$$

$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta \approx \operatorname{sen}\theta$

Mas $dF_v = dm\cdot a_v = \mu dx\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$$\therefore T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cancel{dx} = \mu\cancel{dx}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \therefore \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

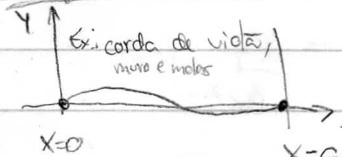
3ª Equação de Ondas

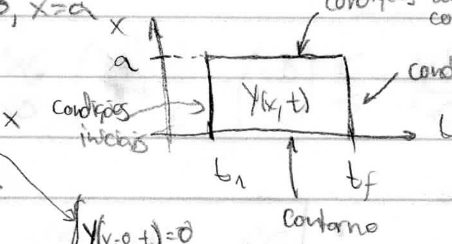
$$\frac{\mu}{T} = \frac{1}{v^2} \qquad \therefore \boxed{v_{propag} := v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

25 / 04 / 2013

|| ⇒ tempo , = ⇒ espaço

Condições de Contorno: $x=0,\ x=a$

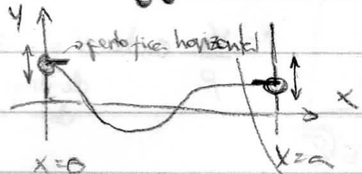




contorno: 2 pontos, $\forall t$

iniciais: $\forall$ pontos, t específico

ou



$$\begin{cases} Y(x=0,t)=0 \\ Y(x=a,t)=0 \end{cases}$$ ("Condições de Dirichlet")

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x}(x=0,t)=0 \\ \frac{\partial y}{\partial x}(x=a,t)=0 \end{cases}$$

→ pq consideramos o laço sem massa. Se houvesse $F_V \neq 0$, teríamos $a \to \infty$

($\operatorname{sen}\theta = \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow 0$ como feito há pouco)

("Condições de Neumann")

R-mover $f = f(x_-)$ L-mover $g = g(x_+)$ $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Solução mais Geral: $y(x,t) = f(\underbrace{x-vt}_{x_-}) + g(\underbrace{x+vt}_{x_+})$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x_-}\cdot\frac{\partial x_-}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x_+}\cdot\frac{\partial x_+}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x_-} + \frac{\partial g}{\partial x_+}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_-^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_+^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_-}\cdot\frac{\partial x_-}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x_-}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} = -v\cdot\frac{\partial f}{\partial x_-} + v\frac{\partial g}{\partial x_+}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_-^2} + v^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial x_+^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_-^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_+^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

2ª Maneira

Lagrangeana da Corda (ñ-relativística)

$$L = T - V$$

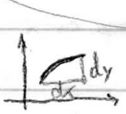
massa m_i de dx — velocidade apenas vertical

$$\Rightarrow dT = \frac{1}{2}\cdot\mu dx\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}\int_0^a \mu dx\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$$\Rightarrow dV = T\frac{dx}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{T}{2}\int_0^a dx\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

(→ Δl)

$$L = \frac{1}{2}\int_0^a dx\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$$



$\Delta l = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} - dx$

o quanto a corda esticou

$$\Delta l = dx\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - dx = dx\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\right)$$

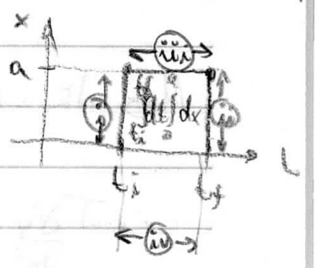
mas $dy \ll dx$, então $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots$

$$\therefore \Delta l = dx\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \cancel{1}\right) \therefore \boxed{\Delta l = \frac{dx}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

29/04:

$\mathcal{L}$ dens. Lagrangeana

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L\,dt = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx\left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$$



$$0 = \delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx\left(\frac{1}{\cancel{2}}\mu\cancel{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial t}\right) - \frac{1}{\cancel{2}}T\cancel{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\right)\right)$$

$$f = x(t)^2 \to \delta f = 2\cdot x(t)\cdot\delta x(t)$$

FII-17

29/04/2013

Física II

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \delta y\right) - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\delta y - T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\cdot \delta y\right) + T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\delta y \right]$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \underbrace{\left[-\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]\delta y}_{=0 \text{ "bulk term"}} + \mu \int_0^a dx \left[\frac{\partial y}{\partial t}\delta y \Big|_{t_i}^{t_f}\right] - T\int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial y}{\partial x}\cdot \delta y \Big|_0^a\right]$$

mas $\delta y(x,t_f) = \delta y(x,t_i) = 0$ como determinamos antes (i) (ii)

termos de borda (boundary terms)

$$\therefore \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$ Equação de Ondas (4ª)

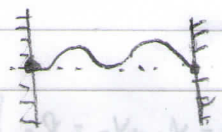
tbm deve ser zero!!

$$\frac{\partial y(a,t)}{\partial x}\delta y(a,t) - \frac{\partial y(0,t)}{\partial x}\delta y(0,t) = 0$$

$\therefore$ Cond. de Contorno
$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(a,t)}{\partial x}\cdot \delta y(a,t) = 0 & \text{(iii)} \\[2ex] \dfrac{\partial y(0,t)}{\partial x}\cdot \delta y(0,t) = 0 & \text{(iv)} \end{cases}$$

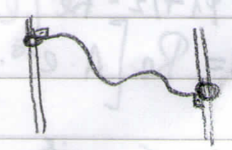
- Dirichlet:

$\delta y(0,t) = \delta y(a,t) = 0$



- Neumann:

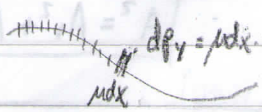
$\frac{\partial y}{\partial x}(a,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0$ *



* Derivamos as condições de Dirichlet e de Neumann pela Ação *

* $\frac{\partial y}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(a,t) = 0$ mas falta especificar qual a altura y

Momento p_y nas extremidades da corda:



$p_y = m \cdot v_y$ (uma partícula de massa m), $v_y \to \frac{\partial y}{\partial t}$, $m \to \mu dx$, integrando p/ toda a corda

$$p_y = \int_0^a \mu \frac{\partial y}{\partial t} dx \qquad \text{Está conservado?}$$

$$\frac{dp_y}{dt} = \int_0^a \mu \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \overset{\text{Eq. da Ho.}}{=} \cancel{\mu}\frac{T}{\cancel{\mu}}\int_0^a dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_0^a\right) = T\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x}(a,t) - \frac{\partial y}{\partial x}(0,t)\right)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = \begin{cases} 0, & \text{Neumann} \\ \neq 0, & \text{Dirichlet} \to \text{Há transf. de } \vec{p} \text{ c/ o muro} \end{cases}$$

(pq ele "segura" a corda na vertical)

Dirichlet → D-brana

30/04/2013

Moysés 5.3: Eq. Linear → Princípio da Superposição $\left(y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)\right)$

Moysés 5.4: Intensidade da Onda

$$F_y = -T\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \Rightarrow dW_y = F_y \cdot dy \quad , \quad P_y = \frac{dW_y}{dt} = F_y \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = F_y \cdot v_y$$

$$= -T \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

instantânea

$$y(x,t) = A\cdot\cos(kx - wt + \varphi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -Ak\,\text{sen}(kx - wt + \varphi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = +Aw\cdot\text{sen}(kx - wt + \varphi)$$

$$\boxed{P_y = TA^2 kw\,\text{sen}^2(kx - wt + \varphi)}$$

$$\overline{P_y} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\, P_y(t) = TA^2kw \cdot \overbrace{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \text{sen}^2(\dots)dt}^{1/2}$$

$$\therefore \boxed{\overline{P_y} = \frac{1}{2}kwTA^2 \equiv \text{Intensidade} := I}$$

30/04: $I = \overline{P} = \frac{1}{2}wkTA^2$

Interferência: a) Ondas no mesmo sentido $kx \pm wt$: todas c/ mesmo sinal

$$y_1 = A_1\cos(kx \pm wt + \delta_1) = Re\left(A_1 \cdot e^{i\delta_1} \cdot e^{i(kx \pm wt)}\right)$$

$$y_2 = A_2\cdot\cos(kx \pm wt + \delta_2) = Re\left(A_2 \cdot e^{i\delta_2} \cdot e^{i(kx \pm wt)}\right)$$

$$y = y_1 + y_2 = Re\left[e^{i(kx \pm wt)}\left(A_1\cdot e^{i\delta_1} + A_2\cdot e^{i\delta_2}\right)\right]$$

$:= Re\left[A\cdot e^{i\delta}\cdot e^{i(kx \pm wt)}\right]$, ou seja, definiu-se $A\cdot e^{i\delta} := A_1\cdot e^{i\delta_1} + A_2\cdot e^{i\delta_2}$

$$A\cdot e^{i\delta}\cdot Ae^{-i\delta} = \left(A_1\cdot e^{i\delta_1} + A_2\cdot e^{i\delta_2}\right)\left(A_1 e^{-i\delta_1} + A_2\cdot e^{-i\delta_2}\right) \qquad A, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_1A_2\cdot e^{i(\delta_1-\delta_2)} + A_1A_2\cdot e^{-i(\delta_1-\delta_2)} + A_2^2$$

$$\therefore \boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cdot\cos(\delta_1 - \delta_2)}$$

$I \propto A^2$ (w, k, T iguais)

$$\boxed{I_y = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cdot\cos(\delta_1 - \delta_2)}$$

"termo de interferência"

$I_y \neq I_1 + I_2$

Se $I_1 = I_2 = I$: $I_y = 2I\left(1 + \cos(\delta_1 - \delta_2)\right)$

Se as ondas estão em fase $(\delta_1 = \delta_2) \Rightarrow \boxed{I_y = 4I}$

" " " oposição de fase $(\delta_1 = \delta_2 + \pi) \Rightarrow \boxed{I_y = 0}$

02/05/2013

Física II

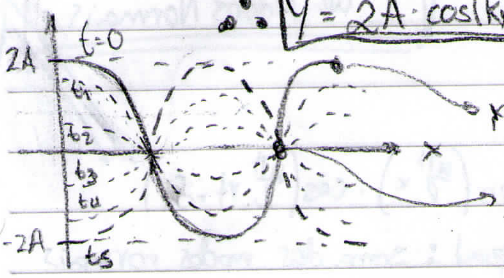
02/05:

Ondas Estacionárias: $y_1 = A\cdot\cos(kx-\omega t)$, $y_2 = A\cos(kx+\omega t)$ → $y = y_1 + y_2$

não é $f(x\pm vt)$

$$y = A\left[\cos(kx)\cos(\omega t) + \cancel{sen(kx)sen(\omega t)} + \cos(kx)\cos(\omega t) - \cancel{sen(kx)sen(\omega t)}\right]$$

$\therefore \boxed{y = 2A\cdot\cos(kx)\cdot\cos(\omega t)}$ não está se propagando. ⇒ Ondas Estacionárias



$kx = \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ "ventres"

$kx = \frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z}$ "nós"

$A(x) = 2A\cdot\cos(kx)$ Amplitude

Batimentos: $\begin{cases} y_1 = A\cos(k_1x-\omega_1 t) \\ y_2 = A\cos(k_2x-\omega_2 t)\end{cases}$ $\begin{cases}\Delta\omega = \omega_1-\omega_2 \\ \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\end{cases}$ $\begin{cases}\Delta k = k_1-k_2 \\ \bar{k} = \frac{1}{2}(k_1+k_2)\end{cases}$

$\Delta\omega \ll \bar{\omega}$, $\Delta k \ll \bar{k}$

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A\left[\cos\left(\left(\bar{k}+\frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\bar{\omega}+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) + \cos\left(\left(\bar{k}+\frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\bar{\omega}+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right)\right]$$
$$= \dots = \boxed{2A\cdot\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cdot\cos(\bar{k}x-\bar{\omega}t)}$$

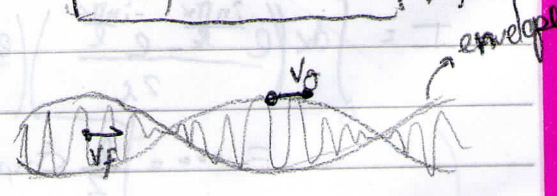
Velocidades: $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ { velocidade de fase; " de grupo

$\bar{\varphi} = \bar{k}x - \bar{\omega}t \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{\varphi}+\bar{\omega}t}{\bar{k}}\right) = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$ de

$\therefore \boxed{\text{Velocidade de fase} := \bar{\omega}/\bar{k}}$ (v_f)

$\Delta\varphi = \frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta\varphi + \frac{\Delta\omega}{2}t}{\frac{\Delta k}{2}}\right)$ de

$\therefore \boxed{\text{velocidade de grupo} := \Delta\omega/\Delta k}$ (v_g)



Moysés 5.6 → Leitura Individual

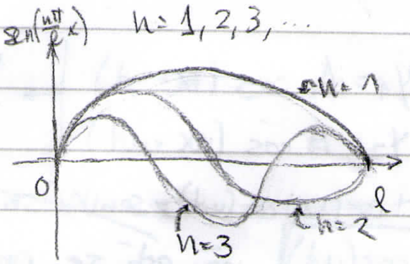
" 5.7 → Modo Normais ξ

x ξ $\xi(x,t) \rightarrow y(x,t)$ mesma equação de ondas

02/04/2013

$Y(0,t) = Y(l,t) = 0$ $\quad Y_n(x,t) = b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}vt + \delta_n\right)$ mesma coisa que fizemos para N molas

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2\pi}{K_n} = \frac{2l}{n}}$$



modos normais

Sistema em uma caixa
⇓
Número discreto de Modos Normais

Moysés 5.8:

Análise de Fourier:

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}vt + \delta_n\right)$$

Onda mais geral: soma dos modos normais

$$\begin{cases} Y(x,0) = Y_0(x) \\ \dot{Y}(x,0) = \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = Y_1(x) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \cdot \cos(\delta_n)\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ Y_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-b_n \frac{n\pi}{l} v \cdot \operatorname{sen}(\delta_n)\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned}}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cdot\frac{n\pi}{l}v\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}v + \delta_n\right)$$

Novas constantes:

$$\begin{cases} c_n := b_n \cdot \cos(\delta_n) \\ d_n := -b_n \cdot \frac{n\pi}{l} v \cdot \operatorname{sen}(\delta_n) \end{cases} \rightarrow b_n^2 = c_n^2 + \frac{l^2}{n^2\pi^2 v^2}\cdot d_n^2, \quad tg\,\delta_n = -\frac{d_n}{c_n}\frac{n\pi v}{l}$$

$$\therefore \begin{cases} Y_0(x) = \sum^{n} c_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ Y_1(x) = \sum^{n} d_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{cases}$$

SÉRIE DE FOURIER:

Ou seja, qualquer função $Y(x)$ pode ser expandida em uma série de senos com coef. arbitrários

"funções ortogonais"

$$\int_0^l \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\cdot Y_0\,dx = \int_0^l dx\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^l dx\left(\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)}_{I}$$

$$I = \int_0^l dx\left(\frac{e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}}}{2i}\right)\left(\frac{e^{\frac{im\pi x}{l}} - e^{-\frac{im\pi x}{l}}}{2i}\right) = \frac{1}{(2i)^2}\int_0^l dx\left(e^{\frac{i(n+m)\pi x}{l}} - e^{\frac{i(n-m)\pi x}{l}} - e^{\frac{-i(n-m)\pi x}{l}} + e^{\frac{-i(n+m)\pi x}{l}}\right.$$

$$= \dots = \boxed{\frac{l}{2}\delta_{n,m}} \quad \text{onde } \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \frac{l}{2}\delta_{n,m} = \frac{l}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \delta_{n,m} = \boxed{\frac{l}{2}c_m}$$

06 / 05 / 2013

Física II

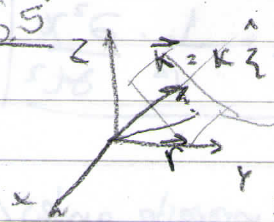
$$\therefore \boxed{C_m = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} dx \left[\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)\cdot \psi_0(x)\right]}$$

Posso incluir mais modos normais dependendo da aproximação que desejo

06/05:

Capítulo 6: 6.1 – 6.4 Leitura individual

6.5



→ plano ortogonal a $\hat{z}$

ondas planas

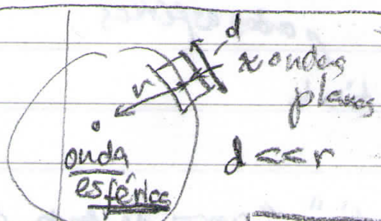
$\vec{K}$ = vetor de onda

$$A\cos(\underbrace{\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta}_{\text{cte em um plano } \perp \hat{z}}) = \psi(\vec{r}, t)$$

$\vec{K}\vec{r} = K\, r \cos\theta$

I := Energia que atravessa uma unidade de área ortogonal à propagação da onda $= I\,|A|^2$

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}}$$ Eq. Ondas 3D (Coord. Cartesianas)



$d \ll r$

$$I = \frac{|A|^2}{4\pi r^2} \longrightarrow \psi = \frac{A}{r}\cos(Kr - \omega t + \delta)$$

vai-se provar isso

Coord. Cartesianas

$\vec{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ Nabla	$\nabla^2 := \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Laplaciano

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \text{derivadas nos ângulos}}$$

sim. central (derivadas ângulos → 0)

$$\psi(\vec{r}, t) \stackrel{!}{=} \psi(r, t)$$

(r, θ, ϕ)

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi = \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}}$$

06/05/2013

truque geral p/ eliminar a derivada 1ª

$$\varphi := \frac{\chi}{r} \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\chi'}{r} - \frac{\chi}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \frac{\chi''}{r} - \frac{\chi'}{r^2} - \frac{\chi'}{r^2} + \frac{2\chi}{r^3}$$

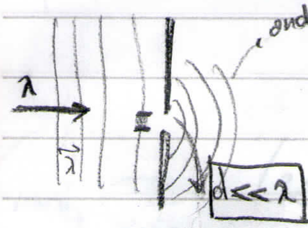
$$\therefore \frac{\chi''}{r} - \cancel{\frac{2\chi'}{r^2}} + \cancel{\frac{2\chi}{r^3}} + \frac{2}{r}\left(\cancel{\frac{\chi'}{r}} - \cancel{\frac{\chi}{r^2}}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \frac{\chi}{r}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\chi''}{\cancel{r}} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\chi}{r}\right) = \frac{1}{v^2 \cancel{r}}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \qquad \therefore \boxed{\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}}$$

$\therefore \chi = A\cos(kr - \omega t + \delta)$

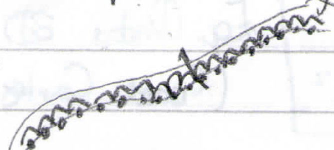
$\therefore \varphi = \frac{A}{r}\cos(kr - \omega t + \delta)$ → exatamente o que fora proposto antes //

Princípio de Huygens:



ondas circulares c/ centros no orifício

⇒ cada ponto de uma frente de onda produz uma onda esférica



nova frente de onda

frente de onda no tempo t → posso construir a frente de onda p/ $t'>t$

ondas esféricas

$\Psi(\vec{x}',t') :=$ "forma da frente de onda em t'", "função de onda do sistema em t'"

→ depende de $\Psi(\vec{x},t)$ e de como a onda se propaga de $(\vec{x},t)$ p/ $(\vec{x}',t')$

→ "envoltória" p/ todo x

$\therefore \Psi(\vec{x}',t') = \int d^3\vec{x}\left[G(\vec{x}',t';\vec{x},t)\cdot\Psi(\vec{x},t)\right]$ mas precisa definir que $t'>t$

$\therefore \boxed{\Psi(\vec{x}',t') = \int d^3\vec{x}\left[\theta(t'-t)\, G(\vec{x}',t';\vec{x},t)\cdot\Psi(\vec{x},t)\right]}$

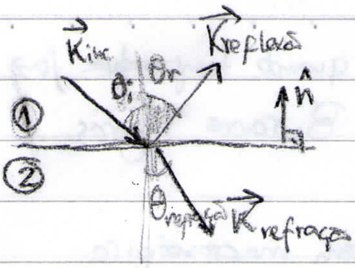
G: Função de Green / Propagador / Kernel de Feynman

onde $\theta(t'-t) = \begin{cases} 1, & t'>t \\ 0, & t'<t \end{cases}$

07/05/2013

Física II

07/05: 6.7:

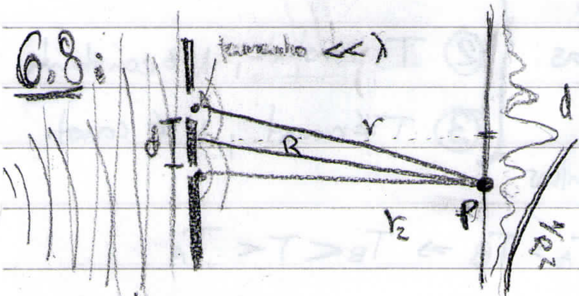


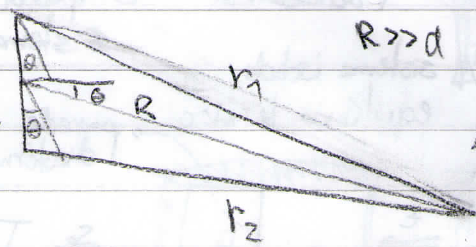
Π plano q contém $\vec{K_i}$ e $\hat{n}$ ($\vec{K_{rfl}}$, $\vec{K_{rfr}}$)

$$\boxed{\frac{sen(\theta_{inc})}{sen(\theta_{refr})} = n_{12} = \frac{V_1}{V_2}}$$

$V_1 < V_2 \Rightarrow sen(\theta_{inc}) < sen(\theta_{refr})$

6.8:





$r_1 \approx R + \frac{d}{2} sen\theta$

$r_2 \approx R - \frac{d}{2} sen\theta$

onda plana (*) $\approx$ onda esférica de mt longe

$$\varphi = \frac{A}{r_1}\cos(Kr_1 - \omega t + \varphi) + \frac{A}{r_2}\cos(Kr_2 - \omega t + \varphi) =$$

$$= (\dots) \approx \boxed{\underbrace{\frac{2A\cdot\cos}{R}\left(\frac{K}{2}(r_2 - r_1)\right)}_{\text{Amplitude da onda}} \cdot \cos(KR - \omega t)}$$

$I \propto \frac{A^2}{R^2}\cos^2\left(\frac{K}{2}(r_2 - r_1)\right)$

$0 \leq I^2 \lesssim \frac{A^2}{R^2}$

$\frac{K}{2}(r_2 - r_1) = \frac{\pi}{2} + n\pi \longrightarrow \underline{\underline{I = 0}}$, $\frac{K}{2}(r_2 - r_1) = \pi n \longrightarrow \underline{\underline{I = max}}$ (em particular, no centro $r_1 = r_2$)

14/05:

Termodinâmica:

$10^{23} \neq 1$ ... $3N$ (3d. esp.; Nº avogadro)

grãos areia $\to 10^8$

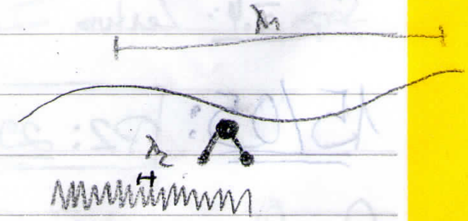
estrelas visível $\to 10^{18}$ (?)

* Organização de fenômenos em escalas de energia

UV (ultraviolet) - microscópico $O(10^{23})$

Escalas de Energia — "Energética": os graus de liberdade microscópicos vão se reorganizando em graus macroscópicos

IR (infrared) - macroscópico $O(1)$ — P, T, V



Energia maior $\Rightarrow$ "Sondas" melhores

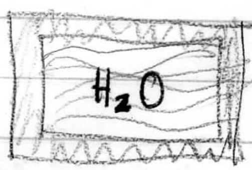
Exceção: Fractais (não muda a organização c/ mudança de escala) $\Rightarrow$ Sistemas "Conformes" (invariantes de escala)

14/05/2013

- Limite Termodinâmico $N \to \infty$ (quando temperatura faz sentido)
- Exemplo de sist. termodinâmico ⇒ Buracos Negros

Equilíbrio Térmico: P, T, V : ordem macroscópica

sistema maior que absorve a pequena muda

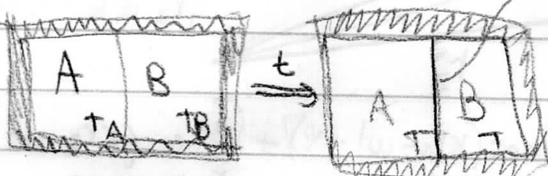


paredes adiabáticas

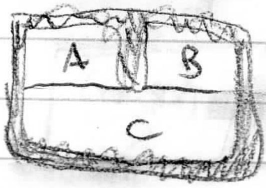
sistema isolado equilíbrio térmico

3 tipos de sistemas:
① isolado: $T = cte$, $N = cte$.
② $T =$ constante, $N \neq$ constante
③ $T \neq$ const., $N \neq$ const.

parede diatérmicas

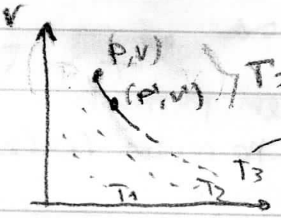


Se $T_A > T_B \Rightarrow T_B < T < T_A$



$T_A = T_C$ && $T_B = T_C$ ⇓ $\boxed{T_A = T_B}$ ⇒ Definição de Temperatura

$\boxed{\text{Lei Zero da Termodinâmica}}$



curva isoterma

Diagramas de Fase (...)

Definição de Temperatura
$f(P,V) = T = cte.$ → equação de estado

Temperatura é um número c/ alguma dimensão, não é um "número puro"
↳ com que comparar? Arbitrariedade da medição
∴ convenção: °C

Seção 7.4: Leitura Individual

15/05: $\boxed{\text{P2: 29 Maio / Cap. 6,7,8}}$

Cap. 8 ⇒ 8.1 - Individual (história), 8.2 - Caloria: qtd de calor p/ esquentar 1g de H_2O de 14,5°C → 15,5°C

8.2 - Calor específico: qtd de calor necessário p/ 1g mudar de $\Delta T = 1°C$
da subst.

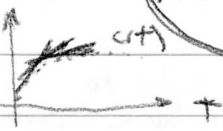
FII-21

15/05/2013

Física II

$C_v :=$ calor específico a volume constante
$C_p :=$ " " a pressão "

$c(T) \rightarrow \Delta Q = m \int_{t_i}^{t_f} c(T)\,dT$

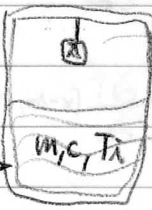


Capacidade Térmica:

$\Delta Q = m\,c \cdot \Delta T = \underbrace{C}_{\text{cap. Térm.}} \cdot \Delta T$

"parametriza a nossa ignorância"

Ex.:



m_A, c_A, T_A

$T_A > T_i$

$T_i, C \rightarrow$ m, c, T_i

Conser. Energia:
$\Delta Q = m_A c_A (T_A - T_f)$
$\Delta Q = (C + mc)(T_i - T_f)$

$\therefore m_A c_A (T_A - T_f) = (mc + C)(T_i - T_f)$
$\hookrightarrow \ldots T_f = ?$

Reservatório Térmico:

$\Delta Q = C \cdot \Delta T \rightarrow \Delta T = \Delta Q / C$

$T = cte \rightarrow \Delta T \approx 0 \Leftrightarrow \boxed{C \rightarrow \infty}$

Condução × Convecção × Radiação
transp. momento / transp. partículas / ondas eletromag.

Lei de Fourier:

1) Calor: Quente → Frio (indica o sinal)
2) ΔQ em Δt: $\propto$ à Temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$
$\overset{-1}{\propto}$ à espessura Δx
$\propto$ à área disponível

$\Delta Q \propto \frac{A \cdot \Delta T}{\Delta x} \cdot \Delta t$

$\therefore$ Lei de Fourier: $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -KA\frac{\Delta T}{\Delta x} \Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} = -K \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}}$

cte. de condutividade térmica

$K(T, x)$ — mat. não-homog.

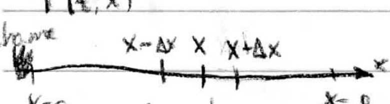
*** Temperatura é o campo mais simples que há ***

$T = T(t, x, y, z)$

só um número p/ cada ponto do espaço $\Rightarrow$ Campo Escalar

$\frac{dQ}{A\,dt} \equiv q :=$ "fluxo de calor" (local) $\rightarrow q = -K \frac{\partial T(t,x)}{\partial x}$

$T(t, x)$



$\Delta Q = mc\Delta T \longrightarrow Q = mcT$

$T = 0K \rightarrow Q = 0$: referencial em 0K

15/05/2013

O aumento de Energia (= calor) no intervalo $x-\Delta x \le x' \le x+\Delta x$ no tempo $t-\Delta t \le t' \le t+\Delta t$

constantes

$$dQ_1 = m\cdot c \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} \left[T(x', t+\Delta t) - T(x', t-\Delta t)\right] dx'$$

$$dQ_1 = mc \cdot \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} dx' \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} dt' \frac{\partial T(x',t')}{\partial t'}$$

pois $\int_a^b dx \frac{df(x)}{dx} = f(b) - f(a)$

$A=1$

Voltando:

$$dQ_2 = -K \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} dt' \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x+\Delta x, t') - \frac{\partial T}{\partial x}(x-\Delta x, t')\right)$$

$$dQ_2 = -K \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} dt' \int_{x-\Delta t}^{x+\Delta x} dx' \frac{\partial^2}{\partial x'^2} T(x', t')$$

variação da T em 2 ptos do espaço implica numa variação da energia pelo tempo (?)

Pq. Conservação de Energia?
Pq. não há poços ou fontes de calor no nosso fio

Mas $dQ_1 = -dQ_2$

$$\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} dt' \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} dx' \left(K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - mc\frac{\partial T}{\partial t}\right) = 0 \quad \forall [x-\Delta x, x+\Delta x] \quad \forall [t-\Delta t, t+\Delta t]$$

$$\Rightarrow \therefore \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{mc}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Eq. do Calor

PDE Parabólica (grande interesse p/ matemática)

Em 3D: $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z) = -K\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) = -K\,\vec{\nabla} T$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{mc}\nabla^2 T} \qquad \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

Obs1:

$t \to it$, $T \to \Psi$ (função de onda) $\therefore$ $\boxed{i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi}$ Eq. Schröedinger (part. livre)

Obs2:

$T \leftrightarrow g_{ij}$ $\therefore$ $\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$ Ricci Flow

$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$

$R_{ij} \to$ tensor de Ricci "$\partial^2 g_{ij}$"

Grigory Perelman
Conjetura de Poincaré

FII-22

16/05/2013

Física II

(10)

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t,x) = \alpha \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(t,x)$$

$T(t,x)$

$x=0$ — $x=L$

Como p/ a corda dos ondas, devemos impor cond. iniciais e cond. de contorno:

Supomos $T(t,0)=0$, $T(t,L)=0$ (Cond. Contorno) $\forall t$

$T(0,x) = f(x)$ (Cond. Inicial) $\forall x$

Similar à Eq. Laplace de Eletro 1

<u>Chute</u>: Separação de Variáveis

$$T(t,x) = f(t)\cdot g(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t)\cdot g(x) = \alpha \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t)\cdot g(x) \Rightarrow g(x)\cdot \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \alpha \cdot f(t) \cdot \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}$$

$\frac{1}{f(t)g(x)}$

$$\frac{\cancel{g(x)}}{f(t)\cancel{g(x)}} \frac{\partial f(t)}{\partial t} - \alpha \cdot \frac{\cancel{f(t)}}{\cancel{f(t)}g(x)} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial^2 x} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{f(t)} \cdot \frac{\partial f(t)}{\partial t}}_{F(t)} - \underbrace{\frac{\alpha}{g(x)} \cdot \frac{\partial^2 g(x)}{\partial^2 x}}_{G(x)} = 0$$

$F(t) = C_1$, $G(x) = C_2$ tq $C_1 - \alpha \cdot C_2 = 0$ (<u>único modo</u>)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(t) = C_1 \cdot f(t) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x) = \frac{C_1}{\alpha} g(x) \end{cases}$$

O Ansatz foi pq $\nexists \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} T(t,x) \Rightarrow T(t,x) = f(t)\cdot g(x)$

<u>Separação de Variáveis</u>

<u>16/05</u>:

Condições: $\begin{cases} T(0,t) = T(L,t) = 0 \ \forall t \\ T(x,0) = \tau(x) \ \forall x \end{cases}$

$$f = Re[\gamma e^{pt}] \rightarrow \frac{df}{dt} = Re[\gamma p\, e^{pt}] \Rightarrow Re[\cancel{\gamma} p \cancel{e^{pt}} - C_1 \cancel{\gamma} \cancel{e^{pt}}] = 0$$

$\therefore \boxed{p = C_1}$

$\therefore \boxed{f = Re[\gamma \cdot e^{C_1 t}]}$

$$g = Re(\delta \cdot e^{px}) \rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x} = Re(\delta p^2 e^{px}) \Rightarrow Re\left(\cancel{\delta} p^2 \cancel{e^{px}} - \frac{C_1}{\alpha} \cancel{\delta} \cdot \cancel{e^{px}}\right) = 0$$

$\therefore \boxed{p^2 = C_1/\alpha}$

$\therefore \boxed{g = Re[\delta e^{\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}} x}]}$

ele falou algo sobre periodicidade e que seria nos valores nas cond. iniciais...

$C_1 < 0$

$C = -C_1$

$C > 0$

$\therefore g = Re(\delta \cdot e^{i\sqrt{\frac{-C_1}{\alpha}} x})$

16/05/2013

$g = A\cdot e^{i\beta} \Rightarrow \therefore \boxed{g = A\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{-c_1}{\alpha}}\,x+\beta\right)} \quad \therefore \boxed{T(t,x) = \tilde{\gamma}\, e^{-ct}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{\alpha}}\,x+\beta\right)}$

$T(t,0)=0 \rightarrow \beta = \pi/2 \;\; \forall t$

$T(t,L)=0 \rightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{c}{\alpha}}L+\pi/2\right) = -\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{c}{\alpha}}L\right)=0 \rightarrow \sqrt{\frac{c}{\alpha}}\,L = n\pi, \; n\in\mathbb{Z}$

$\therefore c = \frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}$

$\therefore \boxed{T_n(t,x) = \tilde{\gamma}_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}t}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}x+\frac{\pi}{2}\right)} \; n\in\mathbb{Z}$

$T(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_n(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\gamma}_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha t}{L^2}}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}+\frac{\pi}{2}\right)$

Análise de Fourier

mas $T(x,0) = \tau(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\gamma}_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\tau(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -\tilde{\gamma}_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$

$\delta_{n,m} = \begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$

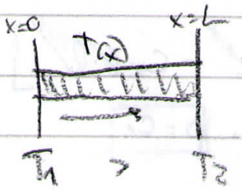
$\int_0^L dx\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\tau(x) = -\int_0^L dx \sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{\gamma}_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \overset{?}{=} -\frac{L}{2}\sum_n \tilde{\gamma}_n\,\delta_{n,m} = -\frac{L}{2}\tilde{\gamma}_m$

$\therefore \boxed{\tilde{\gamma}_m = \frac{-2}{L}\int_0^L dx\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cdot\tau(x)}$

$\therefore \boxed{T(t,x) = \frac{2}{L}\sum_n\left(\int_0^L dx\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cdot\tau(x)\right)\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}t}\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$

P.ex.: $\tau(x)=\tau_0$: $\tau_0\int_0^L dx\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -\tau_0\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Big|_0^L = -\tau_0\frac{L}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)$

Outro Caso:



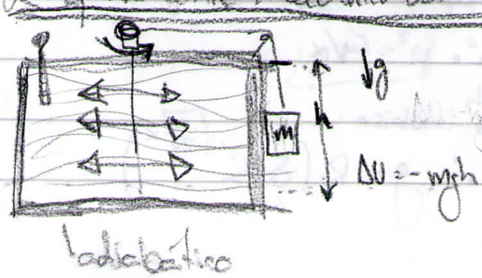
Depois de um transiente

$\frac{\partial T}{\partial t}=0 \quad \frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2}=0 \qquad \therefore T = \alpha x+\beta$

$T(x=0,t) = \beta = T_1$

$T(x=L) = \alpha L + T_1 = T_2 \qquad \alpha = \frac{T_2-T_1}{L}$

Equivalente Mecânico da Caloria:



$\boxed{1\,cal = 4{,}186\,J}$

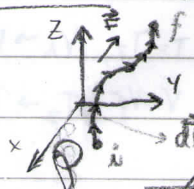
FII-23

20/05/2013

Física II

20/05: 1ª Lei Termodinâmica: Conservação da Energia

Cons. Gerais: Trabalho: "força x deslocamento"



$d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$

Projeção da Força na direção do deslocamento, somando cada pedaço do deslocamento pelo caminho $\wp$:

$$\boxed{W_{i \to f} = \int_{i,\wp}^{f} \vec{F} \cdot d\vec{l}}$$

Normalmente $W_{i\to f}$ depende do $\wp$, mas, para "Forças Conservativas" não há essa dependência

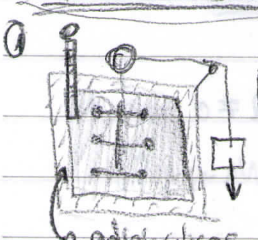
$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ ex.: força gravitacional, Coulomb ("potencial") × força de atrito

Para uma força conservativa,

$$W_{i\to f} = \int_{i}^{f} -\vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = -V(f) + V(i)$$ → Teorema do Gradiente (generalização do T.F.Cálculo)

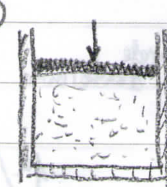
Função de Estado: Função que depende do estado do sistema mas não de como o sistema chegou naquele estado.

1º) Sistemas Adiabáticos: (isolador, sem troca de calor c/ o ambiente)



① | V = cte, trabalho ↓ $\Delta T > 0$ | Trabalho Adiabático

p. adiabáticas

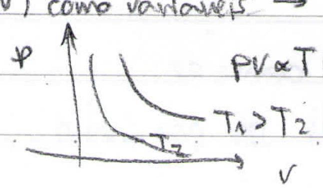


② | V ≠ cte, trabalho ↓ $\Delta V < 0$, $\Delta T > 0$

Rep. Gráfica: $f(P,T,V) = 0$ Eq. do Estado (ex.: $PV = nRT$ gases ideais)

(P,V), (P,T), (T,V) → 3 escolhas p/ descrever o sistema

(P,V) como variáveis → T é determinado pela Eq. de Estado

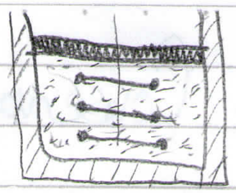


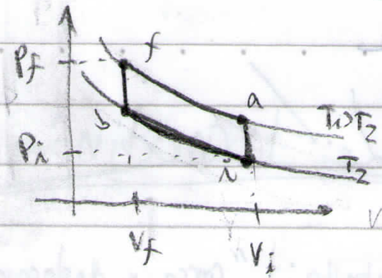
$PV \propto T$ (caso gases ideais)

$T_1 > T_2$ $T = cte \Rightarrow PV = cte$

20/05/2013

Juntando (1) e (2):





Palheta ⇒ método α
Compressão ⇒ " β

$i \to a \to f$: (α) $V = V_i$, $T_2 \to T_1$
(β) $T = T_1$, $V_i \to V_f$

$i \to b \to f$: (β) $T = T_2$, $V_i \to V_f$
(α) $V = V_f$, $T_2 \to T_1$

$W_{i\to f}(a) = W_{i\to f}(b)$: Resultado da experiência generalizada de Joule, pois o trabalho era adiabático

∴ $\boxed{\text{Trabalho Adiabático não depende do caminho}}$ // ∃ função de estado U: "energia interna" tq

$\Delta U = U_f - U_i = -W_{i\to f}$, W trabalho adiabático

↳ arbitrariedade do sinal,

Convenção: $\Delta U > 0$, eu faço trabalho sobre o sistema ⇒ $W < 0$

(W: trabalho feito pelo sistema)

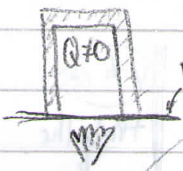
$$\boxed{\Delta U = U(f) - U(i) = -W_{i\to f} \quad (\text{adiabático})}$$

1ª Lei da Termodinâmica no caso de Trabalho adiabático

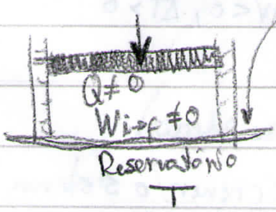
∴ $U(P,T,V)$, $f(P,T,V) = 0$ } ⇒ $U(P,T)$, $U(P,V)$, $U(T,V)$

2º) Incluindo trocas de calor c/ o ambiente:

$W_{i\to f} = 0$
$V = cte$



$T_i \to T_f$ é consequência de $Q \neq 0$, não de trabalho mecânico ($W_{i\to f} = 0$)



$V \neq cte$
$T = cte$

1ª Lei

$$\boxed{\Delta U = U(A) - U(B) = Q - W_{i\to f}}$$

(convenção sobre Q: calor fornecido para o sistema)

// Q = 0 ⇒ Def. de Processo Adiabático //

A dependência do caminho entre Q e W vai se cancelar p/ poder igualar a U que não depende do caminho

FII-24

21/05/2013

Física II

21/05:

escolhe

$U(T,V)$; $\boxed{U(P,V)}$; $U(P,T)$

1ª Lei da Termodinâmica

$$\boxed{\Delta U = U(f) - U(i) = Q - W_{i\to f}}$$

ΔU: não depende do caminho no diagrama de fase

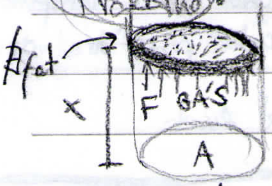
Q, $W_{i\to f}$: dependem do caminho

Processos Reversíveis:

$\left\{\begin{array}{l}\bullet \text{ quasi-estático} \underset{\not\rightarrow}{\leftarrow} \text{reversível} \\ \bullet \text{ não há atrito}\end{array}\right.$

Trabalho em proc. reversíveis ?
Calor " " " ?

Trabalho: (trabalho feito pelo sistema)



$V = A\cdot x$
$F = P\cdot A$

tirando um grão de areia → $x + dx$

$V' = A(x+dx) = V + dV$ $(dV = A\,dx)$

$$dW' = F\cdot dx = P\cdot A\cdot dx = P\cdot dV \neq d(P\cdot V)$$

↖ não é uma diferencial exata

$$W_{i\to f} = \int_{V_i}^{V_f} dW' = \int_{V_i}^{V_f} P\cdot dV$$

– 2 grãos, – ..., – N grãos: $x + N\cdot dx = x_f$

N = grande

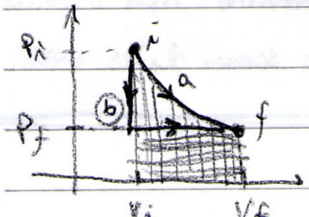
$V_f = A x_f$

P não pode sair da integral pq não é constante (não é dif. exata pq. P depende do caminho)

Expansão Livre (= contrário de processo reversível)

Só sabemos P, V, T no início e no fim pq não é um processo inteiramente termodinâmico, há outros graus de liberdade (hidrodinâmicos, p. ex.)

Rep. Gráfica: Cada passo de um processo reversível é um ponto em um diagrama de fase



$$W_{i\to f} = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV$$

ⓐ: isotérmico |||||

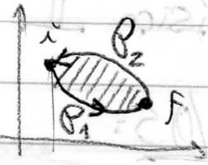
ⓑ: isocórico → isobárico ≡

$\Big\}$ $\int ⓐ \neq \int ⓑ$

∴ W depende do caminho!

21/05/2013

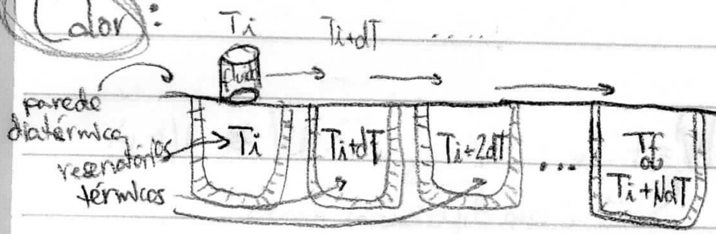
Colocando de volta os grãos de areia: $W_{f \xrightarrow{\mathcal{P}} i} = -W_{i \xrightarrow{\mathcal{P}} f}$



$$W = W_{i \to f}^{\mathcal{P}_1} + W_{f \to i}^{\mathcal{P}_2} = \int_{V_i,\ \mathcal{P}_1}^{V_f} P\,dV + \int_{V_f,\ \mathcal{P}_2}^{V_i} P\,dV = \left(\int_{V_i,\ \mathcal{P}_1}^{V_f} - \int_{V_i,\ \mathcal{P}_2}^{V_f} \right) P\,dV = \int_{V_i,\ \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}^{V_f} P\,dV = \underbrace{\oint P\,dV}_{\text{integral de laço fechado}}$$

sentido anti-horário: $W < 0$
" horário: $W > 0$

Calor:



$dQ' = C\,dT$ (qtd. calor que é transferida a cada "passo" do cilindro)

de novo, não é uma diferencial exata

$$\boxed{dU = dQ' - dW' = C\,dT - P\,dV}$$

dif. exata

U: função de estado

Q, W: ñ são " "

1ª Lei p/ Processos Reversíveis

xdy, ydx não são dif. exatos pq não posso dizer d(...), mas xdy + ydx é uma dif. exata, pois temos d(xy + const.)

$$\int (x\,dy + y\,dx) = \int d(xy + \dots) = xy \Big|_{\text{inicial}}^{\text{final}}$$

∴ Os pedaços individuais xdy e ydx dependem do caminho mas o resultado da soma deles não.

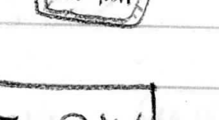
Exemplos:

1) Ciclos: $f = i \Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow \boxed{Q = W}$

calor fornecido ao sist. = trabalho feito pelo sist.

2) Isobáricos: $P = cte$

$\Delta U = Q - P(V_f - V_i)$



3) Adiabáticos: $Q = 0$

$\Delta U = -W$ (adiabático) (W é dif. exata)

Sem Aula: 27/05 → 06/06

29/05 = P2

FII - 25

22/05/2013

Física II

22/05: Gases Ideais: • baixa pressão
• temperatura longe de $T_{liq.}$

microscópico: Gás como um conjunto de partículas fracamente acopladas

(P,T,V), $f(P,T,V)=0$ Eq. de Estado $\Rightarrow$ (P,T); $\boxed{(P,V)}$; (V,T)

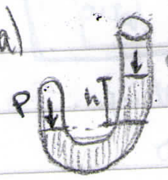
$f(P,T,V)$ para um Gás Ideal: $\boxed{PV - kT = 0}$ k = cte.

Sabendo isso e $dU = dQ' - dW' = C\,dT - p\cdot dV$ é possível derivar td do cap. 9

Eq. Estado: → Relação Experimental $\begin{cases}\text{Boyle a)}\\ \text{Charles b)}\end{cases}$

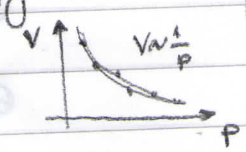
Ideia: i) fixar 1 das 3 variáveis
ii) mudar a 2ª variável
iii) medir a 3ª "

a)



$P_{atm} + \rho g h = P$

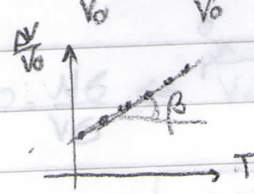
T = cte
P = variando



$\therefore \underline{PV = k = cte.}$

b) P = cte → relação entre V e T

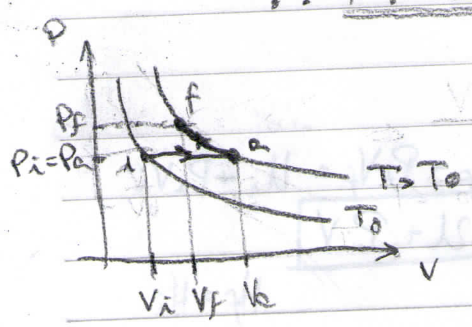
$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_\theta - V_0}{V_0} = \beta\theta$ ← coef. de dil. volumétrica



$\beta = \frac{1}{273}\,°C^{-1}$

$\therefore V_\theta = V_0(1+\beta\theta)$

$\frac{V_\theta}{V_0} = \frac{273+\theta}{273} = \frac{T_{(K)}}{T_{0(K)}}$



i→a (Charles): $\frac{V_a}{V_i} = \frac{T_a}{T_i} = \frac{T}{T_i}$

a→f (Boyle): $P_i V_a = P_f V_f = PV$

$T_f = T$
$P_f = P$
$V_f = V$

$\begin{cases}\frac{V_a}{V_i} = \frac{T}{T_i}\\ P_i V_a = PV\end{cases}$ $V_a = \frac{PV}{P_i} \Rightarrow \frac{V_a}{V_i} = \frac{PV}{V_i P_i} = \frac{T}{T_i} \rightarrow \boxed{\frac{PV}{T} = \frac{P_i V_i}{T_i}}$

$\therefore \boxed{K = \frac{P\cdot V}{T}}$

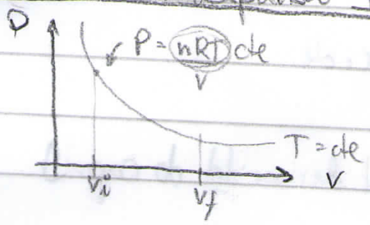
22/05/2013

Lei de Avogadro: CNTP (NPT) $\Rightarrow P_i = 1\,atm,\ T_i = 273\,K \Rightarrow \boxed{\dfrac{V_i}{mol} = 22{,}4\ L}$

$L = 10^{-3}\,m^3$

Para 1 mol: $\dfrac{K}{mol} = \dfrac{1atm \cdot 22{,}4 \cdot 10^{-3} m^3}{273\,K} \Rightarrow \boxed{\dfrac{K}{mol} = 8\ J/K\,mol \equiv R}$

Trabalho na Expansão Isotérmica de um Gás Ideal:



$$W_{i\to f} = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV = nRT\int_{V_i}^{V_f}\frac{dV}{V} = nRT\,\log\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$\therefore \boxed{W_{i\to f} = -W_{f\to i} = n\cdot R\cdot T\cdot \log\left(\frac{V_f}{V_i}\right)}$$

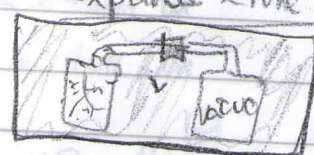
Energia Interna de um Gás Ideal:

$U(P,V);\ U(P,T),\ U(T,V)$

$U(T,V) \rightarrow \Delta U(T,V) = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T \Delta V$

var. indep.

Expansão Livre



(a) $0 = \dfrac{\partial U}{\partial T}\underbrace{\Delta T}_{=0\ (b)} + \dfrac{\partial U}{\partial V}\underbrace{\Delta V}_{\neq 0} \Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial V} = 0$

(a) $\Delta U = \cancel{Q} - \cancel{W_{i\to f}}$

$\therefore \Delta U = 0$

(b) Medição $\Rightarrow \Delta T = 0$

$\therefore \boxed{U = U(T)}$

Definição: $Q = 0,\ \Delta U = -W_{i\to f}$ (adiab.)

$$U_f - U_i = P_iV_i - P_fV_f \Rightarrow U_f + P_fV_f = U_i + P_iV_i$$

$$\therefore \boxed{H := \text{"Entalpia"} = U + P\cdot V}$$

$H_f = H_i$

$H = U + PV$

$$\begin{cases} dH = dU + PdV + VdP \\ dU = dQ' - dW' = dQ' - PdV \end{cases} \Rightarrow \boxed{dH = dQ' + VdP}$$

Se $P = const. \rightarrow dP = 0$

$\hookrightarrow dH = dQ'$

FII-26

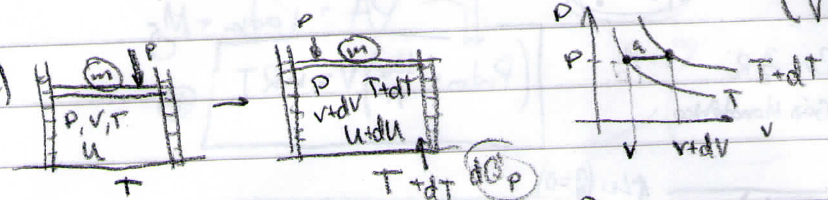
22/05/2013

Física II

$dQ' = C\,dT$

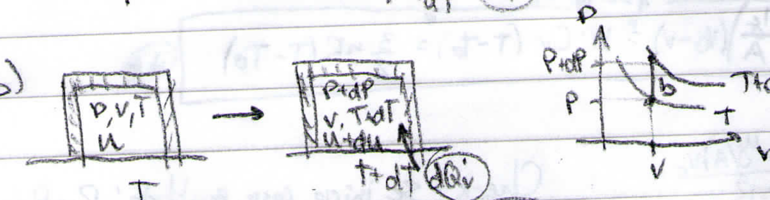
↳ não é diferencial exat → depende de como faço δT

$$\begin{cases} P=\text{const.}: dQ'_P = C_P\,dT & (a) \\ V=\text{const.}: dQ'_V = C_V\,dT & (b) \end{cases}$$

a) 

$T \to U(T)$

$T+dT \to U + dU = U(T+dT)$

b) 

$\boxed{dU_V = dU_P} = dQ'_P - dW' = C_P dT - PdV$

$dQ'_V = C_V dT$ (*)

$\therefore \boxed{C_V dT = C_P dT - PdV}$

$PV = nRT$

$VdP + PdV = nRdT$ (**)

$\boxed{C_P = C_V + n\cdot R}$ (***)

$C_P > C_V$

$\frac{C_P}{C_V} = \gamma > 1$

Processos Adiabáticos p/ Gases Ideais: $dQ' = 0 \to dU = -pdV$, $dU = n\,C_V dT$ (*)

(**) $PdV + VdP = nRdT$

$VdP = -PdV + nRdT$

$= n(C_V+R)dT = \ldots = \int \frac{dP}{P} = -\gamma \int \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{P_f}{P_i} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma} \Rightarrow \boxed{P_f V_f^{\gamma} = \text{cte}}$

(***)

23/05: "Cheat Sheet" Gases Ideais

- $PV = nRT$, $\Delta U = Q - W_{i\to f}$
- $dQ' = CdT$ $\begin{cases} dQ'_P = C_P dT \\ dQ'_V = C_V dT \end{cases}$ $C_P = C_V + R$, $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$
- $dW = PdV$
- $U = U(T) \Rightarrow C_V = \frac{dU}{dT} \Rightarrow U(T) = U_0 + n\int_{T_0}^{T} C_V(T')dT'$

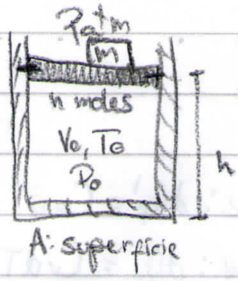
  $C_V = \text{const}$: $\boxed{U(T) = U_0 + n\cdot C_V T}$

- Processos Adiabáticos ($Q=0$):

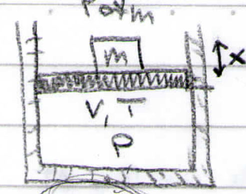
  $PV^{\gamma} = \text{cte}$, $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$, $T/P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \text{cte}$.

23/05/2013

Ex. 1:



soltando os parafusos →



V, T = ?

$PV = nRT$

Cond. Equilíbrio ⇒ forças verticais iguais sobre o pistão

$PA = P_{atm} + Mg$

$$\boxed{\left(P_{atm} + \frac{Mg}{A}\right)V = nRT} \quad (*)$$

$C_V = \frac{3}{2}R$ Gás Monotômico

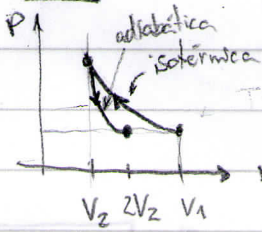
$$\begin{cases} \Delta U = n \cdot C_V (T - T_0) \\ W = (P_{atm}A + Mg)x \\ x = \dfrac{V_0 - V}{A} \end{cases}$$

$$W = \boxed{\left(P_{atm} + \frac{Mg}{A}\right)(V_0 - V) \overset{\text{1ª Lei } (Q=0)}{=} n \cdot C_V \cdot (T - T_0) = \frac{3}{2} nR (T - T_0)} \quad (**)$$

$$\therefore \begin{cases} T = \dfrac{3}{5}T_0 + \dfrac{2}{5}\dfrac{(P_{atm} + Mg/A)V_0}{nR} \\ V = \dfrac{2}{5}V_0 + \dfrac{3}{5}\dfrac{nRT_0}{P_{atm} + Mg/A} \end{cases}$$

Check: Se início fosse equilíbrio: $P_0 = P_{atm} + Mg/A$
$\Downarrow$
$T = T_0$, $V = V_0$ ✓

Ex. 2:



a) $W = ?$, $Q = ?$ } Comp. isotérmica

b) $T_f = ?$] dps da adiabática

a) $W_{V_1 \to V_2} = \displaystyle\int_{V_1}^{V_2} P\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,dV = nRT \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

→ negativo por causa da coisa toda de trabalho "do sistema" / "no sistema"

$Q = \cancel{\Delta U} + W_{V_1 \to V_2}$ ($\Delta U = 0$, $U(T) = $ cte)

$\therefore \; Q = nRT \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

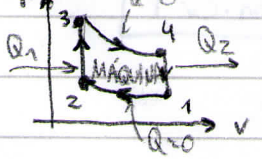
b) $dU = -p\,dV = C_V\,dT \Rightarrow -P\,dV = C_V\,dT$ ($Q = 0$ (adiab.))

mas $P = \dfrac{nRT}{V}$ } $-\dfrac{dV}{V} nRT = C_V\,dT$

$$\therefore \int_{V_2}^{2V_2} -\frac{dV}{V} nR = \int_{T}^{T_f} C_V \frac{dT'}{T'} \Rightarrow \log\left(\frac{2V_2}{V_2}\right) = -\frac{C_V}{nR} \log\left(\frac{T_f}{T}\right)$$

$$2 = \left(\frac{T_f}{T}\right)^{-\frac{C_V}{nR}} \Rightarrow \boxed{T_f = T \cdot 2^{\frac{C_V}{nR}}}$$

Ex. 3: Ciclo de Otto.



1→2, 3→4 } Adiabáticos ($Q = 0$)

2→3, 4→1 } Isocóricos ($V = $ const.)

a) Eficiência

b) Trabalho feito 1→2

$\gamma = 1{,}4$

$\dfrac{V_i}{V_f} = 10$

a) Ciclo: $U(i) = U(f) \Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow \boxed{Q = W_{i \to f}}$

$\therefore W = Q = Q_1 - Q_2$

$$\boxed{\eta = \frac{W}{Q_1}} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}}$$

$Q_1 = ?$, $Q_2 = ?$

FII-27

10 / 06 / 2013

Física II

Volume = cte. $Q_1 = \int_2^3 dQ_v = C_v \int_2^3 dT = C_v(T_3 - T_2)$ $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$

$Q_2 = -\int_4^1 dQ_v = -C_v \int_4^1 dT = C_v(T_4 - T_1)$

$\therefore \boxed{\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \left(\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}\right)}$ $\begin{cases} T_1 V_i^{\gamma-1} = T_2 V_f^{\gamma-1} \\ T_3 V_f^{\gamma-1} = T_4 V_i^{\gamma-1} \end{cases} \rightarrow \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \rightarrow \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \frac{T_1}{T_2}$

$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma-1} \longrightarrow \eta = 1 - \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma-1} = 1 - (0{,}1)^{0{,}4}$ $\therefore \boxed{\eta = 0{,}6}$

b) $W = \int_1^2 p\,dV = \int_1^2 P_1 V_i^{\gamma} V^{-\gamma} dV = P_1 V_i^{\gamma} \int_1^2 V^{-\gamma} dV$

$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$

$P = P_1 V_1^{\gamma} V^{-\gamma}$

$= -\frac{P_1 V_i^{\gamma}}{1-\gamma} V^{1-\gamma} \Big|_{V=1}^{V=2}$ $\therefore \boxed{W = -\frac{P_1 V_i^{\gamma}}{1-\gamma}\left(V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}\right)}$

10/06: P, V, T ⇒ descrições macroscópicas médias

S(entropia) ⇒ macroscópica / microscópica → conceito de qtd. informação pode ser armazenada no sistema

$S = -K \cdot \log w$ (Boltzmann)

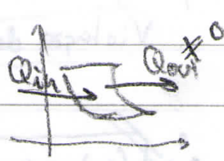
⇓ flecha (unilateral) do tempo

↳ não é possível a volta por processos físicos

2ª Lei Termodinâmica (2 enunciações)

① Kelvin: É impossível realizar um processo cujo ÚNICO efeito seja transformar calor em trabalho

ou seja, queremos um ciclo e queremos voltar no estado inicial



$\eta = \frac{W}{Q_{in}} = 1 - \frac{Q_{out}}{Q_{in}} < 1$ ↳ Como $Q_{out} \neq 0$

$\Delta U = 0 \Rightarrow W = Q = Q_{in} - Q_{out}$

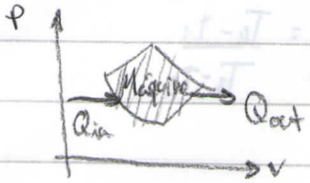
ex.: Eq. de Difusão de Calor

② Clausius: É impossível realizar um processo cujo ÚNICO efeito seja transferir calor de um corpo frio p/ um corpo quente

11 / 06 / 2013

11/06: Máquinas → ciclos : $\Delta U = 0$ → $\boxed{Q = W}$

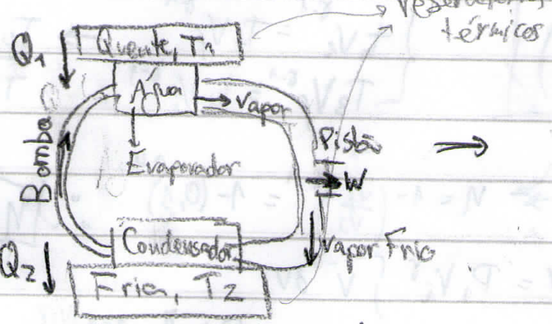
- W: trabalho total
- Q: calor trocado entre ambiente e a máquina

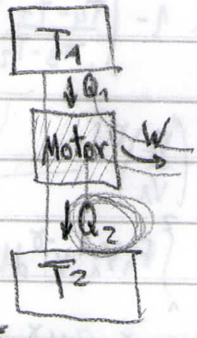


curvas: isobáricas, isocóricas, isotermas, adiabáticas

Motor Térmico:
(Enunciado K)

Água ⇒ Agente





$\boxed{Q_1 = W + Q_2}$

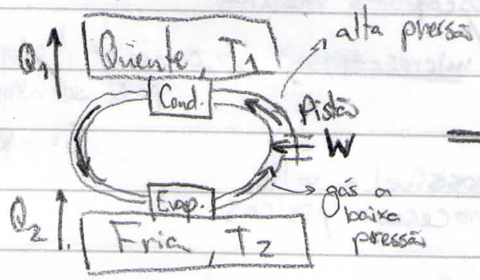
Kelvin: o motor, necessariamente, tem que ter Q_2

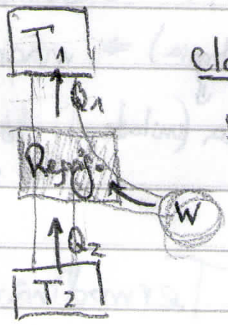
* O "vapor" não pode virar água no pistão, só em Q_2 *

η := eficiência $= \dfrac{W}{Q_1}$ (W: output; Q_1: input) $= \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ ∴ $\boxed{\eta = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1}}$ $Q_2 > 0$ ($Q_2 \neq 0$) ⟹ $\boxed{\eta < 1}$ (K)

Refrigerador:
(Enunciado C)

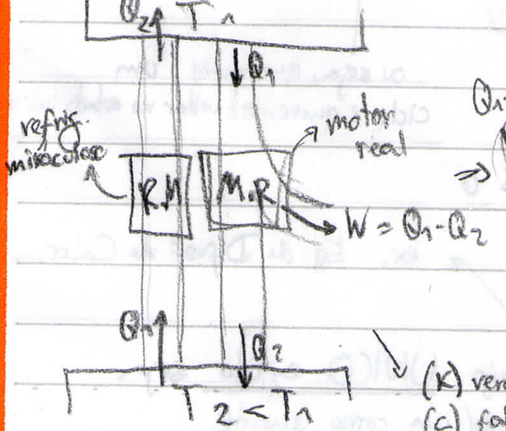
Agente: Freon





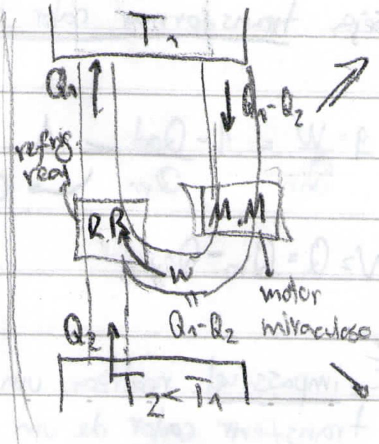
Clausius: o refrigerador, necessariamente, tem que ter W

Vai-se provar que (K) ⟺ (C)



$Q_1 - Q_2 \rightarrow W = Q_1 - Q_2$ ⇒ Violação de (K)

↘ (K) verdadeiro, (C) falso



↗ Q_2 fonte fria → Q_2 fonte quente: Violação de (C)

↘ (K) falso, (C) verdadeiro

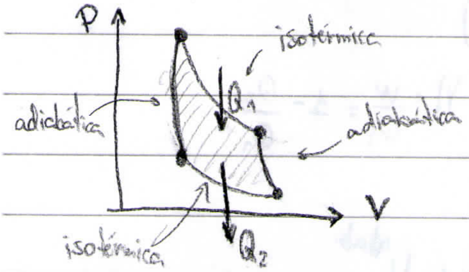
∴ $\boxed{(K) \Leftrightarrow (C)}$ enunciados equivalentes

11 / 06 / 2013

Física II

Então, qual é o ciclo mais eficiente (com maior η)? Ciclo de Carnot (Joule tem?)

Reversível



Gás Ideal

Isoterma:

$PV = nRT \Rightarrow \boxed{PV = \text{const.}}$

Adiabática ($Q=0$):

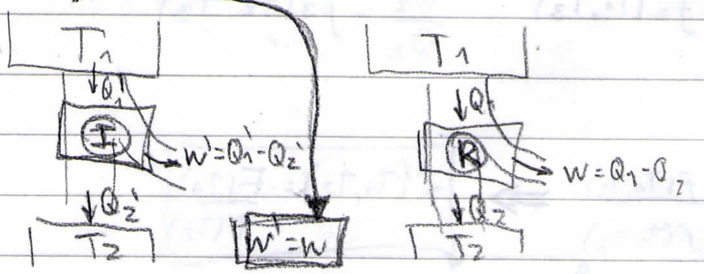
$\boxed{PV^{\gamma} = \text{const}}$ onde $\gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1$

Teorema de Carnot:

a) Ciclo de Carnot entre T_1 e T_2 tem a η máxima possível

b) Todos os Ciclos de Carnot entre T_1 e T_2 tem a mesma η

Comparação entre (R) reversível e um ciclo (I) irreversível



$$\eta_R = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{W}{Q_1}$$

$$\eta_I = \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1'} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1'} = \frac{W}{Q_1'}$$

Suponha $\eta_I > \eta_R \Rightarrow \frac{W}{Q_1'} > \frac{W}{Q_1} \Rightarrow Q_1 > Q_1' \Rightarrow Q_2' < Q_2$

$Q_2' = Q_1' - W$

$Q_2 = Q_1 - W$

Revertendo (R) e conectando com (I):

$(Q_1 - Q_1' =) Q_2 - Q_2' > 0$ sendo transferido de T_2 p/ T_1, violando (C)

$$\therefore \boxed{\eta_I \leq \eta_R} \text{ cqd a)}$$

b) $I \to R_2$, $R \to R_1$: $\eta_{R_2} \leq \eta_{R_1}$, $I \to R_1$, $R \to R_2$: $\eta_{R_1} \leq \eta_{R_2}$

$$\therefore \boxed{\eta_{R_1} = \eta_{R_2}} \text{ cqd b)}$$

12 / 06 / 2013

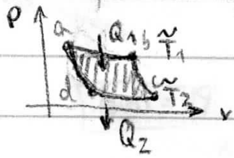
12/06:

Ciclo Carnot → reversível (★ irreversibilidade vai ↓η pois há gasto desnecessário de

→ máx. eficiência $(\eta_I < \eta_R)$ $(\eta_R = \eta_{R'})$

↓

"universalidade" (indep. dos sistemas) →



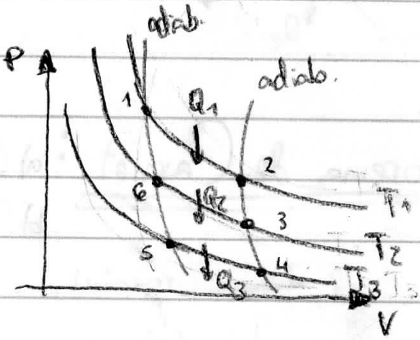
$\Delta U = 0 = Q - W$

$W = Q = Q_1 - Q_2$

$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

Escala (Absoluta) Termodinâmica de Temperatura:

$\frac{Q_1}{Q_2} = f(T_1, T_2)$ para um Ciclo de Carnot



Máquinas: $\begin{cases} 1236 \\ 1245 \\ 6345 \end{cases}$ $\quad \frac{Q_1}{Q_2} = f_1(T_1, T_2)$

$\frac{Q_1}{Q_3} = f_2(T_1, T_3)$ $\quad \frac{Q_2}{Q_3} = f_3(T_2, T_3)$

Universalidade: $f_1 = f_2 = f_3 \equiv f$

$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q_1/Q_3}{Q_2/Q_3} \Rightarrow f(T_1, T_2) = \frac{f(T_1, T_3)}{f(T_2, T_3)} \Longrightarrow \boxed{f(T_1, T_2) = \frac{F(T_1)}{F(T_2)}}$

$\therefore \frac{F(T_1)}{F(T_2)} = \frac{F(T_1)/\cancel{F(T_3)}}{F(T_2)/\cancel{F(T_3)}}$ ☑

$\therefore \boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{F(T_1)}{F(T_2)}, \quad \forall F}$

Definir a escala absoluta (= universal) usando a máquina de Carnot (Arbitrariedade):

$\boxed{F(T_1) := T_1}$ $\quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$

termômetros a gás — escala absoluta

Para demonstrar que $\tilde{T} = T$, usa-se uma máquina de Carnot cujo agente seja um gás

Ao longo de uma isoterma: $\Delta U = 0 \to Q = W$

$Q_1 = W_{a\to b} = nR\tilde{T}_1 \log\left(\frac{V_b}{V_a}\right)$, $\quad Q_2 = W_{c\to d} = nR\tilde{T}_2 \cdot \log\left(\frac{V_c}{V_d}\right)$

$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\tilde{T}_1 \log\left(\frac{V_b}{V_a}\right)}{\tilde{T}_2 \cdot \log\left(\frac{V_c}{V_d}\right)} = \frac{T_1}{T_2}$, mas ao longo de adiabáticas vale: $V_b^{\gamma-1}\tilde{T}_1 = V_c^{\gamma-1}\tilde{T}_2$

$V_a^{\gamma-1}\tilde{T}_1 = V_d^{\gamma-1}\tilde{T}_2$

FII-29

12/06/2013

Física II

Assim $\left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_c}{V_d}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \log\left(\frac{V_b}{V_a}\right) = \log\left(\frac{V_c}{V_d}\right)$

$\therefore \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\tilde{T}_1 \cdot \cancel{\log\left(\frac{V_b}{V_a}\right)}}{\tilde{T}_2 \cdot \cancel{\log\left(\frac{V_c}{V_d}\right)}} = \frac{T_1}{T_2}$ $\therefore \boxed{\frac{\tilde{T}_1}{\tilde{T}_2} = \frac{T_1}{T_2}}$

Corolário: $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \longrightarrow \boxed{T_2 = \left(\frac{T_1}{Q_1}\right) Q_2}$ $T_2 \to 0 \Rightarrow Q_2 \to 0$: impossível, viola 2ª Lei (K)!!

Ou 3ª Lei da Termodinâmica

para um Ciclo de Carnot!! (revers.)

Teorema de Clausius: $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$, $Q_1 > 0$: entrando na máquina
$Q_2 > 0$: saindo da "

Mas, voltando às convenções originais ($Q > 0$ entrando) $\Rightarrow$ Q_2 precisa ser trocado de sinal

$\therefore \boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0}$

$\therefore \frac{Q_{ab}}{T_{ab}} + \frac{Q_{cd}}{T_{cd}} + \overset{0}{\frac{Q_{bc}}{T_{bc}}} + \overset{0}{\frac{Q_{da}}{T_{da}}} = 0 \Rightarrow \sum \frac{Q}{T} = 0$

$\therefore$ $\forall$ ciclo reversível (ñ necs. Carnot)
$$\boxed{\oint \frac{d'Q_R}{T} = 0}$$
Teorema de Clausius

Fator Integrante:

$d'W = p \cdot dV \neq d(\cdot\cdot)$

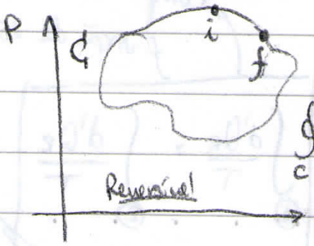
Mas para um gás ideal em uma isoterma:

$p = \frac{nRT}{V}$: é um FATOR INTEGRANTE p/ dV

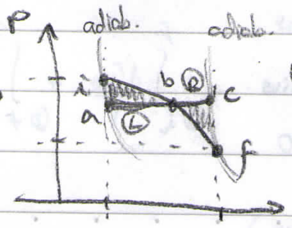
$pdV = nRT \frac{dV}{V} = d(nRT \log V)$ → agora diferencial exata

$d'W \Rightarrow$ dif. inexata

$\frac{d'W}{p} \Rightarrow$ " exata → fator integrante



$\oint_c \frac{dQ}{T} = 0$ ⇒



(Área das 2 curvas é igual)

Ⓛ = Ⓡ por construção

$\therefore \Delta W_{i\to b\to f} = \Delta W_{i\to a\to b\to c\to f}$

$\Delta U_1 = U_f - U_i = \Delta U_2$

①: curva $i \to b \to f$

②: " $i \to a \to b \to c \to f$

12/06/2013

$\Delta U = \Delta Q - \Delta W$ $\qquad \Delta Q_{ibf} - \cancel{\Delta W_{ibf}} = \underbrace{\Delta Q_{iabcf}}_{\Delta Q_{abc}} - \cancel{\Delta W_{iabcf}}$

calor transf. na isoterma

$\therefore \boxed{\Delta Q_{ibf} = \Delta Q_{abc}}$

∴ Construir qqr curva a partir de curvas isotérmicas e adiabáticas

(tomando numa máq. de Carnot)

Tomando agora uma isoterma $T = T_0$ mais elevada q todas as isotermas da curva ζ:

Calor fornec. pelo sistema a T_0 → $\Delta Q' = T_0 \left(\frac{\Delta Q}{T} \right)$ ← depende do ponto na curva ζ

Agora, somando sobre todos os ciclos possíveis das curvas isotermas de ζ:

calor removido da fonte T_0

$$Q' = \oint T_0 \frac{d'Q}{T} = T_0 \oint_{\zeta} \frac{d'Q}{T} \Rightarrow \oint \frac{d'Q}{T} = \frac{Q'}{T} \leq 0$$ por causa de (c)

$(T_0?)$

Se ζ for reversível: $d'Q \to -d'Q$ (invertendo o ciclo)

Ou seja $\oint -\frac{d'Q}{T} \leq 0$ devido a (c) → $\therefore \boxed{\oint_{\zeta} \frac{d'Q}{T} = 0, \text{ p/ ciclo reversível}}$

irreversível: $<$

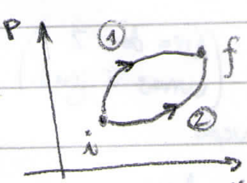
Para ciclos reversíveis: $\frac{d'Q}{T} \to$ dif. exata

$$\oint_{\zeta} \frac{d'Q}{T} = \lim_{f \to i} \int_i^f \frac{d'Q}{T} = 0$$

Posso definir uma nova função de estado, que assim como U, NÃO depende do caminho, mas somente do estado

$$\therefore \boxed{S_f - S_i = \int_i^f \frac{d'Q_R}{T}} , \quad S := \text{ENTROPIA}$$

grandeza extensiva como U



①, ② reversíveis

Teorema Clausius

$$\oint_{\zeta} \frac{d'Q_R}{T} = 0$$

$(\zeta = ① - ②$, p.ex.)

$$\int_{① i}^{f} \frac{d'Q_R}{T} + \int_{② f}^{i} \frac{d'Q_R}{T} = 0$$

comprova ser uma função de estado

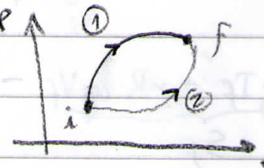
$$\therefore \boxed{\int_{①} \frac{d'Q_R}{T} = \int_{②} \frac{d'Q_R}{T}}$$

13/06/2013

Física II

$\{P, V, T\}$, $f(P,V,T) = 0 \Rightarrow \begin{cases} S(P,V) \\ S(P,T) \\ S(V,T) \end{cases}$ $\quad dS = \frac{d'Q_R}{T}$

$\oint_C \frac{d'Q}{T} \begin{cases} = 0, \text{ reversível} \\ < 0, \text{ irreversível} \end{cases}$



① reversível
② irreversível

Conceito puramente macroscópico

$②\int_i^f \frac{d'Q}{T} + ①\int_f^i \frac{d'Q_R}{T} = ②\int_i^f \frac{d'Q}{T} - \underbrace{①\int_i^f \frac{d'Q_R}{T}}_{S_f - S_i} < 0$ $\quad \therefore \boxed{S_f - S_i > ②\int \frac{d'Q}{T} > 0}$

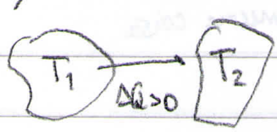
Reversível: $\Delta S = 0$

13/06:

2ª Lei Termodinâmica $\Rightarrow$ $\underset{\text{único efeito}}{(K)\; Q \rightarrow W} \Leftrightarrow \underset{\text{único efeito}}{(C)\; Q: \text{frio} \rightarrow \text{quente}}$

$\boxed{\Delta S \geq 0 \text{ isolado}} \Rightarrow (C)$ falta provar

$\Delta S \geq 0 \Rightarrow (C)$



"saindo de T_1"

$\Delta S = -\frac{\Delta Q}{T_1} + \frac{\Delta Q}{T_2} = \frac{\Delta Q(T_1 - T_2)}{T_1 T_2}$

Se $T_1 < T_2 \Rightarrow \Delta S < 0 \Rightarrow$ Absurdo! Violação da hipótese

$\therefore T_1 > T_2$

(C) cqd

Fórmulas Úteis:

Gases Ideais

$\boxed{dP \cdot V + P \cdot dV = nR \cdot dT}$ (*)

$\begin{cases} dU \cdot C_V(T) = dT \\ PV = nR \cdot T \\ dU = d'Q - pdV \\ dS \cdot T = d'Q_R \end{cases} \Rightarrow \boxed{dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = \frac{C_V(T)\,dT}{T} + \frac{PdV}{T}}$ (**)

13/06/2013

a) $\underline{S = S(V,T)}$ $\quad dS = \frac{C_V(T)}{T}dT + \frac{P\,dV}{T} = \frac{C_V(T)}{T}dT + \frac{nR\,dV}{V}$

$$\therefore S_f - S_i = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_V(T)}{T}dT + nR\int_{V_i}^{V_f}\frac{dV}{V} \overset{C_V(T)=\text{const}}{=} C_V \cdot \log\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\cdot\log\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$= \underbrace{C_V \cdot \log T_f + nR\cdot \log V_f}_{S_f} - \underbrace{(C_V\cdot \log T_i + nR\cdot\log V_i)}_{S_i}$$

$$\therefore \boxed{S(V,T) = C_V\cdot \log T + n\cdot R\cdot \log V + K_i}$$

→ essa constante vai deixar os argumentos dos logs adimensionais (= bem definidos)

b) $\underline{S = S(P,T)}$ $\quad P\,dV = -V\,dP + nR\,dT$

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P\,dV}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{nR\,dT}{T} - \frac{V\,dP}{T} = \frac{C_V(T)}{T}dT + \frac{nR}{T}dT - \frac{V\,dP}{T}$$

$$= \frac{\overbrace{(C_V(T) + nR)}^{C_P(T)}}{T}dT - \frac{nR\,dP}{P}$$

$$\therefore S_f - S_i = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_P(T)}{T}dT - nR\int_{P_i}^{P_f}\frac{dP}{P} \overset{C_P=\text{const}}{=} C_P\cdot\log\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR\cdot\log\left(\frac{P_f}{P_i}\right)$$

$$\therefore \boxed{S(P,T) = C_P\cdot\log T - nR\cdot \log P + K_i}$$

→ mesma coisa

c) $\underline{S = S(P,V)}$ $\quad$ a) + eq. estado: $S(P,V) = C_V\cdot\log(P,V) + nR\cdot\log V + \text{const}$

$$= C_V\cdot\log P + \underbrace{C_V\cdot\log V + nR\cdot\log V}_{\log V\,(C_V + nR) = C_P} + \text{const}$$

$$\therefore \boxed{S(P,V) = C_V\cdot\log P + C_P\cdot\log V + K_i}$$

→ mesma coisa

Mecânica Estatística:

Microscópicas ⟷ Macroscópicas

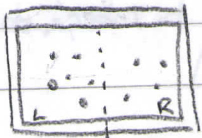
(graus de liberd. fundamentais) (graus de lib. efetivos + funções de estado)

FII-31

13 / 06 / 2013

Física II

Caso simples: $N = 10$ partículas



barreira imaginária

Possíveis conf. microscópicas (# de possíveis configurações de $\boxed{\text{microestados}}$)

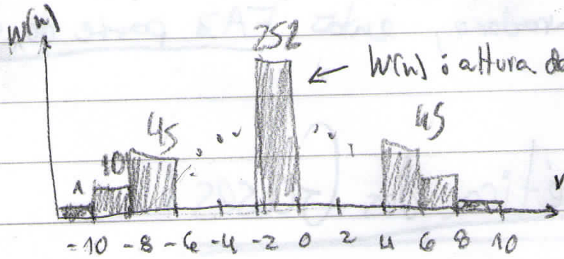
2^{10} possibilidades (diferenciando LLLLLLLLLR de LLLLLLLLRL)

$n = N_L - N_R$

$\left.\begin{matrix} N_L = 10 \\ N_R = 0 \end{matrix}\right\} n = 10$

$\left.\begin{matrix} N_L = 0 \\ N_R = 10 \end{matrix}\right\} n = -10$

$\left.\begin{matrix} N_L = 9 \\ N_R = 1 \end{matrix}\right\} n = 8$



W(n) é altura do histograma

$$\boxed{W(n) = \frac{N!}{N_L!\,N_R!} = \frac{N!}{\left(\frac{N-n}{2}\right)!\left(\frac{N+n}{2}\right)!}}$$

N grande ⇒ Fórmula de Stirling ($N!$)

$$\boxed{W(n) \approx 2^N e^{-n^2/2N}}$$

Gaussiana

Todos os microestados são igualmente prováveis

$p = 1/2^N$

Mas os macroestados com mais microestados correspondentes serão mais prováveis!!

($n = 0 \Rightarrow \max(p(n))$)

Ideia de Boltzmann: (interpretação microscópica probabilística da entropia)

$$\boxed{S = k_B \log W}$$

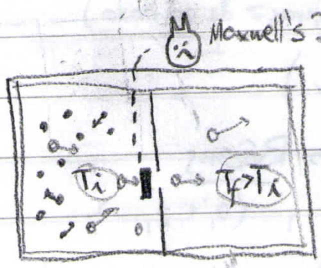
k_B: const. de Boltzmann

log: compensa os números absurdamente grande

Entropia é extensiva ⇒ $S_1 + S_2 = k_B \log W_1 + k_B \cdot \log W_2$

$\therefore S_T = k_B \log W_T$, $W_T = W_1 W_2$

Demônio de Maxwell:

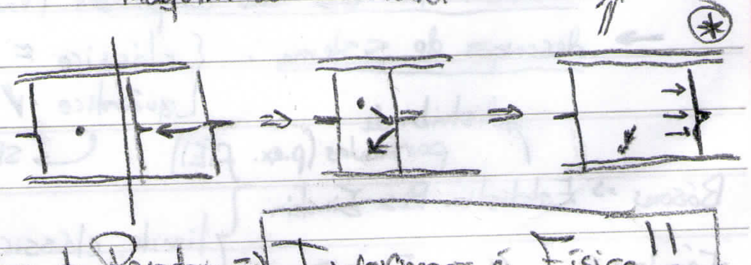


⇒ Violação de (c)

T = média das energias cinéticas das moléculas

"Encarnação" mais moderna:

Máquina de Szilard



Viola (K)

Solução do Paradoxo ⇒ $\boxed{\text{Informação é Física!!}}$

18/06/2013

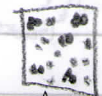
Cancelar a informação cresce a entropia!

→ (*) não é o fim do ciclo! Ainda é preciso remover o bit de informação da cabeça do demônio (sistema = partículas + informação que eu tenho!)
não foi apagada

→ Eu preciso da informação (x(t), v(t)) da partícula para realizar o paradoxo, então FAZ parte do SISTEMA!

18/06: Teoria Cinética dos Gases:

$10^{24} \to 1$: descrição microscópica de variáveis macroscópicas



mistura de partículas

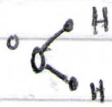
constituintes elementares do gás: → pontos matemáticos (s/ graus de lib. internos) ; → pequenas bolinhas

pontos materiais

$K = \frac{1}{2}mv^2$ — m, $\vec{v}$

m, $\vec{v}$, ω: $\frac{1}{2}mv^2$, $\frac{1}{2}I\omega^2$

→ estruturas



$\vec{v}$, I_x, I_y, I_z
Outros graus de liberdade (flexões, estir.)

Interações entre os constituintes:

→ Única interação : CONTATO

b:= "parâmetro de impacto"

"Teoria de Espalhamento"

colisão $\begin{cases} b < R, ✓ \\ b > R, ✗ \end{cases}$ (def. de interação de contato)

→ introduzir interações mais complicadas (Van der Waals, p.ex.)

→ descrição do sistema: $\begin{cases} \text{clássico} \approx \\ \text{quântico} ✓ \end{cases}$

distrib. de partículas (p.ex. $f(E)$)

SPIN := $\begin{cases} \text{inteiro} \to \text{Bósons}, \{0, 1, 2, \dots\} \\ \text{semi-inteiro} \to \text{Férmions}, \{1/2, 3/2, \dots\} \end{cases}$

"computação"

Bósons ⇒ "Estatística Bose-Einstein"
Férmions ⇒ " Fermi-Dirac"
} limite clássico ⇒ "estatística" de Maxwell-Boltzmann

F.II - 32

18 / 06 / 2013

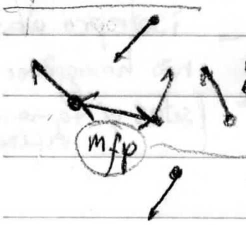
Física II

Teorema de spin-estatístico

Spin 0, 1, 2, ... → Bósons "Simétricos" $\Psi(1,2) = \Psi(2,1)$

" 1/2, 3/2, ... → Férmions "Antissimétricos" $\Psi(1,2) = - \Psi(2,1)$

Equilíbrio (térmico):

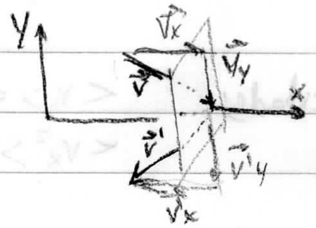


mfp → : mean free path

Colisões Elásticas ⇒ ∄ transf. de $\vec{p}$ ou E p/ graus internos ((o q aconteceria se fosse Estrutura) ‖ modos de vibração)

Pressão (expressando grandezas macroscópicas através de microscópicas) média

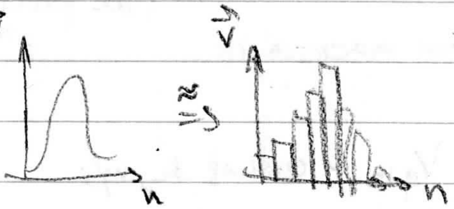
$$P = \left\langle \frac{\text{Força}}{\text{Superfície}} \right\rangle \sim \left\langle \frac{\text{momento}}{\text{tempo} \cdot \text{superfície}} \right\rangle$$



$$\begin{cases} V_y = V_y' \\ V_x' = -V_x \end{cases}$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = m(\vec{V}' - \vec{V}) = -2mV_x$$ → momento sendo transf. à parede

$$\Delta p_{x\,parede} = 2mV_x$$



⇒

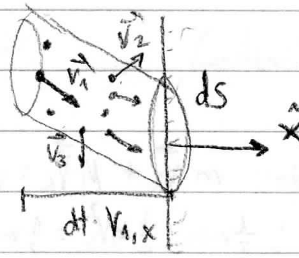
$n_1 : V_{1,x}$

$n_2 : V_{2,x}$

⋮

$n = n_1 + n_2 + \ldots$

↳ # total de partículas



partículas $\vec{V}_1$ de dentro do cilindro batem em dS no tempo dt

$$dn_1 = n_1 \cdot \underbrace{V_{1x} \cdot dt \cdot dS}_{\text{Volume cilindro}} \Rightarrow dp_{1x} = dn_1 \, \Delta p_{1,x} = 2mp...$$

$$\therefore \boxed{dp_{1,x} = 2mV_{1,x}^2 \cdot n_1 \cdot dt \cdot dS}$$

$$\therefore \boxed{P_1 = 2m \cdot n_1 \cdot V_{1x}^2}$$

$$\therefore \boxed{\sum_i P_i = \sum_{i=1} m \cdot n_i \cdot V_{ix}^2}$$

↳ sumiu o 2 por causa das velocidades negativas

$\langle V_x \rangle^2 = 0$

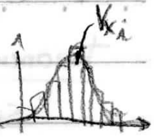
$$\langle V_x^2 \rangle = \frac{\sum_i n_i \cdot V_{ix}^2}{\sum ...} \Longrightarrow P = \sum_i P_i = m \langle V_x^2 \rangle \Longrightarrow \therefore \boxed{P = m \langle V_x^2 \rangle \cdot n}$$

19/06/2013

<u>19/06</u> $P = n \cdot m \cdot \langle v_x^2 \rangle$ onde $\langle V_x^2 \rangle = \dfrac{\sum_i n_i \cdot \langle v_{xi}^2 \rangle}{\sum_i n_i}$

massa

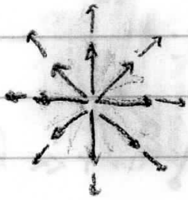
total de partículas



$\sum_i \rightarrow \int$

Homogeneidade $\rightarrow$ dist. uniforme

Isotropia: não tem uma direção especial privilegiada



isotrópico mas não homogêneo (setas c/ tamanhos diferentes)

↑↑↑↑↑ Homogêneo
↑↑↑↑↑ mas não isotrópico (tem uma dir. privilegiada)

Isotropia $\not\Leftrightarrow$ Homogeneidade mas Isotrópico em todos os pontos $\Rightarrow$ Homogêneo

• Isotropia das velocidades $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$

$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \neq 0$

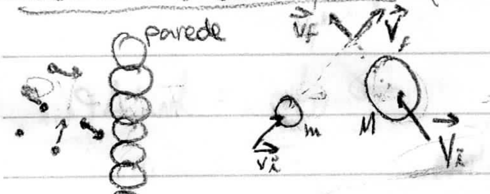
$\therefore P = \frac{1}{3} n \cdot m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \cdot \underbrace{\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle}$ $\rightarrow$ $\dfrac{\langle \epsilon \rangle}{nV}$ $\Rightarrow$ implica na Lei de Dalton (na soma de pressões)

$\therefore \sqrt{\langle v^2 \rangle} = V_{q.m.} = \sqrt{\dfrac{3P}{nm}} = \sqrt{\dfrac{3P}{\rho}}$ $\rightarrow$ parâmetros macroscópicos

densidade

$V_{q.m.} \sim$ centenas de m/s

<u>Lei dos Gases Perfeitos</u>: (achar $PV = nRT$ através da teoria Cinética)



$M \gg m$

$\begin{cases} \text{cons. de momento: } m \cdot \vec{v}_i + M \cdot \vec{V}_i = m\vec{v}_f + M\vec{V}_f \\ \text{cons. de energia: } \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} M V_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} M V_f^2 \end{cases}$

A(B) componentes de $\vec{v}_i, \vec{v}_f, \vec{V}_i, \vec{V}_f$ ao longo de AB: u_i, u_f, U_i, U_f

$$\frac{1}{2} M \langle \vec{V}_f^2 - \vec{V}_i^2 \rangle = \frac{1}{2} M \langle U_f^2 - U_i^2 \rangle = \frac{4mM}{(m+M)^2} \left\{ \frac{1}{2} m \langle u_i^2 \rangle - \frac{1}{2} M \langle U_i^2 \rangle + \frac{1}{2} (M-m) \langle u_i U_i \rangle \right\}$$

19/06/2013

Física II

Como $\langle AB \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle$ na ausência de correlações entre A e B

$$\therefore \frac{1}{2} M \langle \vec{V}_f^2 \rangle - \frac{1}{2} M \langle \vec{V}_i^2 \rangle = \frac{4mM}{(m+M)^2} \frac{1}{2}\left(m\langle u_i^2\rangle - M \langle U_i^2 \rangle\right)$$

sem translado $\leftarrow$ $\overset{\#}{0}$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{2} m \langle u_i^2 \rangle = \frac{1}{2} M \langle U_i^2 \rangle} \Rightarrow$$ equilíbrio térmico: energias cinéticas do gás e da parede são iguais

$$P = \frac{2}{3}\frac{\langle \varepsilon \rangle}{V} \rightarrow PV = \frac{2}{3}\langle \varepsilon \rangle \longrightarrow \langle \varepsilon \rangle = f(T)$$

$$\therefore PV = \frac{2}{3} f(T) = \text{const. se } T \text{ é const.} \circledast$$

$\circledast$: Lei de Boyle

Ainda precisamos demonstrar que $f(T) \propto T$

Considerando um gás livre de moléculas monoatômicas (únicos g.d.l. são TRANSLACIONAIS)

$\hookrightarrow$ Energia $\rightarrow$ Energia Cinética $\Rightarrow U = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} nVm \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} Nm \langle v^2 \rangle$

devido ao gás ser livre, soma das energias individuais $= N\left(\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle\right)$

$$\therefore \boxed{\frac{2}{3}\frac{U}{V} = P} \Rightarrow U = U(T) \longrightarrow$$ pq a parede e o gás só tem em comum a temperatura

$$dS = \frac{C_V(T)}{T} dT + \frac{P dV}{T} = \boxed{\frac{C_V(T)}{T} dT + \frac{2}{3}\frac{U(T)}{TV} dV}$$

$$dU = TdS - PdV \Rightarrow TdS = dU + PdV \Rightarrow \boxed{dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T}} \quad dU = C_V(T)\, dT$$

$$S = S(T,V) \Rightarrow dS = \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V}_{\frac{C_V(T)}{T}} dT + \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T}_{\frac{2}{3}\frac{U(T)}{TV}} dV$$

Como $\frac{\partial}{\partial V}\frac{\partial}{\partial T} S = \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial}{\partial V} S$, temos que:

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{C_V(T)}{T}\right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{2}{3}\frac{U(T)}{TV}\right) = 0$$

19 / 06 / 2013

$\therefore \frac{\partial}{\partial_T}\left(\frac{u(T)}{T}\right) = 0 \Rightarrow \frac{u(T)}{T} = cte \qquad \therefore u(T) = \left(\underbrace{\tfrac{3}{2} const.}_{\text{universal}: R}\right) T$

Agora, $\frac{2}{3}\frac{u}{V} = P$, ou seja: $PV = \frac{2}{3}u = \frac{2}{3}\frac{3}{2}RT$

$\therefore \boxed{PV = RT}$

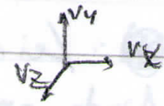
Implica também que $\frac{3}{2}RT = N\left(\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle\right)$

$\Downarrow$

$\boxed{\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}\frac{R}{N}T}$ $\frac{R}{N} \to K_B \rightsquigarrow$ Boltzmann

Origem do "3/2": $③ \to \langle v_x^2\rangle = \frac{1}{3}\langle v^2\rangle$

$\to$ # de graus de liberdade translacionais



$② \to$ é da energia cinética: $\frac{1}{2}mv^2$

Teorema da Equipartição: termos na Lagrangeana quadráticos em posições ou em suas derivadas contribuem à energia total num fator $\frac{1}{2}K_B T$ por molécula

Ex.: $\mathcal{L}_{1\,moléc.} = \underbrace{\alpha_x x^2 + \alpha_y y^2 + \alpha_z z^2}_{\text{potenciais (posição)}} + \underbrace{\beta_x \dot{x}^2 + \beta_y \dot{y}^2 + \beta_z \dot{z}^2}_{\text{cinéticos (derivada)}}$

Gás Ideal: $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0$, $\beta_x = \beta_y = \beta_z = \frac{1}{2}m \Rightarrow 3N$ graus de liberdade

$\frac{1}{2}K_B \cdot T \cdot 3N = \frac{3}{2}RT$; $\frac{3}{2} \to C_V$; $K_B = \frac{R}{N}$

Gases Mais Complicados: H_2 (rígida) $\;$ 5 g.d.l. (3 do CM + 2 do vínculo (rotação))

$\therefore \boxed{C_V = \frac{5}{2}R}$

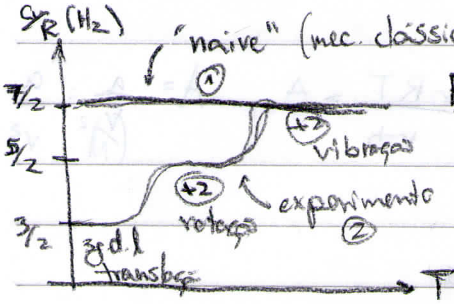
não rígida

vibrar / sim. / antissim.

$\therefore \boxed{C_V = \frac{7}{2}}$

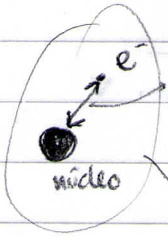
19 / 06 / 2013

Física II



Explic.: momento angular e vibrações são quantizados, enquanto translação é contínua

②: parte contínua do espectro + parte discreta dos g.d.l. internos (do estado ligado)



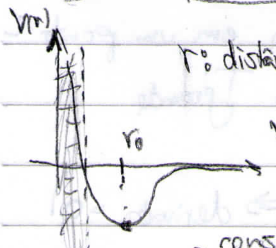
discreto (cond. de contorno do "bound state")

contínuo, sempre posso transladar o sistema

Lei de Van der Waals:

Gás ideal = pontos matemáticos ⊕ não interagem

Gás de Van der Waals = esferas impenetráveis ⊕ interação entre elas

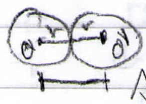


r: distância entre 2 moléculas

considerando um muro vertical e impenetrável

não é mais o volume todo acessível, pois tem essa barreira impenetrável de outras moléculas

$V_{eff} = V - V_{exc}$



$d = 2r$: dist. máxima de proximidade

$\Rightarrow V_{exc} = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 =$

$= 8\,\frac{4}{3}\pi r^3 =$

$= 8\,V_0$

volume de uma molécula

esferas imp.

$PV = nRT \longrightarrow P.V_{eff} = nRT$

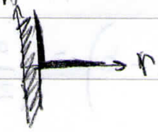
$V_{eff} = V - (N-1)\,8V_0 \approx V - N8V_0$

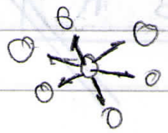
não conta essa parte

$\therefore V_{eff} = V - \underbrace{4NV_0}_{Nb}$

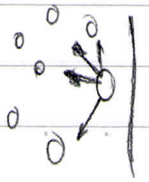
$\therefore P(V-b) = nRT$

Gás Livre $\Rightarrow V(r) = 0$, Gás Livre (Bolas) $\Rightarrow V(r) =$





$\Rightarrow$ para uma bolinha no centro da garrafa: atração = 0



$\Rightarrow$ vai reduzir a pressão da esfera na parede $\Delta P = \frac{-a}{(V/N)^2}$

$$\therefore \boxed{\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT}$$

$v = \frac{V}{N}$

20/06/2013

20/06:

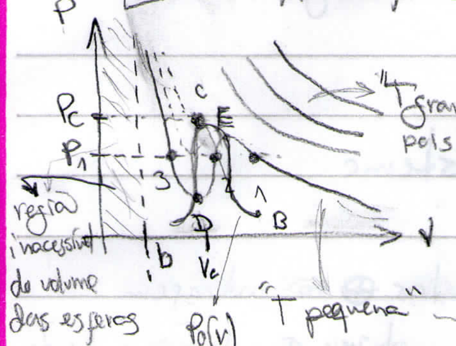
$P = \frac{nRT}{v-b}$, $b = 4\boxed{V_0}$ "covolume" $\xrightarrow[\text{devido à atração}]{P_{ef}<P}$ $P = \frac{nRT}{v-b} - A$, $A = \frac{a}{(\frac{V}{N})^2} = \frac{a}{v^2}$

$V_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3$

$\therefore \boxed{\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = nRT}$ Eq. de Vander Waals

$\therefore (v^2 P + a)(v-b) = nRTv^2$

Eq. Cúbica em v



$\boxed{P = \frac{nRT}{v-b} - \frac{a}{v^2}}$

$\frac{a}{v^2} \ll \frac{nRT}{v-b}$ efeito da interação é desprezível

T crítica: 3, 2, 1 se unem em um ponto C

↳ $T_{pequeno} < T_c < T_{grande}$

Curva BCD: curva dos máximos e mínimos como funções de T (D, E sobem com T↑ p/ o pto C ⇒ derivada = 0)

$$0 = \frac{dP}{dv} = \frac{d}{dv}\left(\frac{nRT}{v-b} - \frac{a}{v^2}\right) = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} = -\frac{(P+\frac{a}{v^2})}{v-b} + \frac{2a}{v^3}$$

$\therefore \boxed{P_0 = \frac{a}{v^2} - \frac{2ab}{v^3}}$ eq. da curva BCD

$P_c = P_0(v=v_c) = \frac{a}{9v_c^2} - \frac{2ab}{27v_c^3}$

C: $0 = \frac{dP_0}{dv} = \frac{2a}{v^4}(3b - v)$ $\therefore \boxed{V_c = 3b}$

$\boxed{P_c = a/27b^2}$

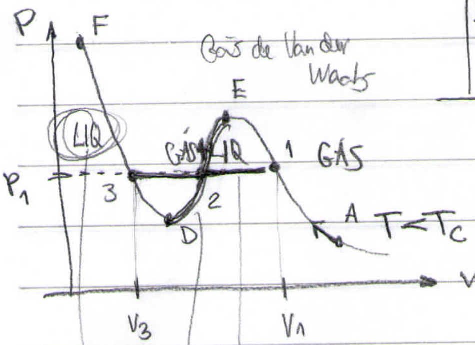
$nRT_c = \left(P_c + \frac{A}{v_c^2}\right)(v_c - b) = \left(\frac{a}{27b^2} + \frac{a}{9b^2}\right)(2b) = \frac{8a}{27b}$ $\therefore \boxed{T_c = \frac{8a}{27b}\frac{1}{R}}$

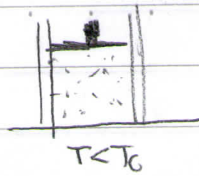
$\left(\frac{d^2P}{dv^2}\right)_{v=v_c} = 0$: C é ponto de Inflexão

FII-35

20 / 06 / 2013

Física II





Estado/Equilíbrio Metaestável:

Qualquer imperfeição ou perturbação perturbam a ordem.

Líquidos Incompressíveis

coexistência do gás com o líquido (Transição de Fase)

$\frac{dP}{dV} > 0$: Instabilidade (não tem sentido físico)