

Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Mecânica II
Primeira Lista de Exercícios
Data de entrega: 21 de abril de 2022

Prof. J. C. A. Barata

1) Verifique que as matrizes J_1 , J_2 e J_3 , os geradores do grupo $SO(3)$, satisfazem as relações de comutação

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{J}, \vec{\beta} \cdot \vec{J}] = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{J},$$

onde $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$, onde “ \times ” denota o produto vetorial em \mathbb{R}^3 e $\vec{\alpha} \cdot \vec{J}$ é uma abreviação sugestiva para $\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3$.

2) Demonstre a relação

$$\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) = \mathbb{1} + (1 - \cos(\theta)) (\vec{\eta} \cdot \vec{J})^2 + \sin(\theta) (\vec{\eta} \cdot \vec{J}),$$

e prove a validade das chamadas *fórmulas de Rodrigues*

$$\exp(\theta \vec{\eta} \cdot \vec{J}) \vec{\alpha} = \vec{\alpha} + (1 - \cos(\theta)) (\vec{\eta} \times (\vec{\eta} \times \vec{\alpha})) + \sin(\theta) \vec{\eta} \times \vec{\alpha} \quad (1)$$

$$= \cos(\theta) \vec{\alpha} + (1 - \cos(\theta)) (\vec{\eta} \cdot \vec{\alpha}) \vec{\eta} + \sin(\theta) \vec{\eta} \times \vec{\alpha}. \quad (2)$$

Acima $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ é arbitrário. Essa fórmula expressa o resultado da rotação de um vetor arbitrário $\vec{\alpha}$ por um ângulo θ em torno de um eixo definido por um versor $\vec{\eta}$.

3) Seja $R \in SO(3)$. Usando as fórmulas de Rodrigues verifique a validade da relação

$$R(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = (R\vec{\alpha}) \times (R\vec{\beta})$$

para todos $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$. Essa relação permanece válida caso $R \in O(3) \setminus SO(3)$? Se não for o caso, como ela deveria ser modificada nesse caso?

4) Descreva com detalhe o experimento conhecido como “pêndulo de Foucault”, deduzindo as equações necessárias à sua descrição, apresentando suas soluções e discutindo seu significado.

5) Considere um navio N de massa M em movimento ao longo de uma latitude θ , fixa, da Terra, sendo $\theta \in [0, \pi]$. Seja V sua velocidade no sistema de referência da Terra. V é suposta constante, ao longo dessa latitude e convençione que V é positiva se o navio mova-se no rumo leste e negativa no rumo oeste.

Determine a força centrífuga e a força de Coriolis sobre o navio N . Para qual valor de V a força de Coriolis supera a força centrífuga em magnitude? Para qual valor de V (positivo ou negativo) as duas forças são iguais e opostas.

Um navio de grande porte pode alcançar a velocidade de aprox. 28km/h. Para essa velocidade, compare em termos de porcentagens o valor da componente vertical da força centrífuga e da força de Coriolis em relação ao peso do navio N .

Em qual situação a linha-d’água do navio N (que é sempre medida de baixo para cima, a partir do fundo do navio) deve ficar mais alta: quando o navio se move em direção ao leste o ao oeste? Justifique.

6) Os EUA construíram seu maior centro de lançamento de foguetes no sul da Flórida e a França nas Guianas. Por que motivo prático, relacionado à economia de combustíveis dos foguetes, essas escolhas foram feitas? Justifique qualitativa e quantitativamente.

Referências para os Exercícios 1, 2 e 3: Cap. 21 e 44 das “Notas de Aula”.
