Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Mecânica II
Terceira Lista de Exercícios
Data de entrega: 30 junho de 2022.

Prof. J. C. A. Barata

---

1) Considere o movimento de um corpo rígido na ausência de forças e torques externos e com seu centro de massa parado. Considere um sistema de referência fixo no corpo tendo como eixos seus eixos principais de inércia. Escreva seu correspondente Lagrangiano usando ângulos de Euler. Obtenha as correspondentes equações de Euler-Lagrange e, usando-as, reobtenha as equações de Euler. *Sugestão:* escreva as equações de Euler em termos dos ângulos de Euler e compare-as às correspondentes equações de Euler-Lagrange. **Sugestão:** faça uso dos resultados de Exercício 4 da lista 02.

---

2) Consideremos um *Pião de Lagrange*[1], um pião simétrico colocado sob a ação de um campo gravitacional uniforme, tendo um dos pontos de seu eixo de simetria fixo. Esse ponto fixo, em torno do qual o pião pode girar livremente, é denominado *pivô*. Adotaremos o eixo 3 como o eixo de simetria do pião e adotaremos a origem do sistema de coordenadas inercial coincidente com o pivô.

Mostre que o Lagrangiano desse sistema mecânico, expresso em termos de ângulos de Euler, é

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{I_1}{2}\Big(\dot\varphi_t^2 \operatorname{sen}(\theta_t)^2 + \dot\theta_t^2\Big) + \frac{I_3}{2}\Big(\dot\varphi_t \cos(\theta_t) + \dot\psi_t\Big)^2 - Mgl\cos(\theta_t)\;, \tag{1}$$

onde l é a distância do centro de massa do pião ao pivô e onde I_1 e I_3 são os momentos de inércia principais definidos em relação ao pivô. **Sugestão:** faça uso dos resultados de Exercício 4 da lista 02.

Obtenha as correspondentes equações de Euler-Lagrange e constate que

$$p_\psi \;:=\; I_3\Big(\dot\psi_t + \dot\varphi_t\cos(\theta_t)\Big) \tag{2}$$

e que

$$p_\varphi \;:=\; I_1\dot\varphi_t \operatorname{sen}(\theta_t)^2 + I_3\cos(\theta_t)\big(\dot\psi_t + \dot\varphi_t\cos(\theta_t)\big)\;, \tag{3}$$

ou seja,

$$p_\varphi \;=\; I_1\dot\varphi_t \operatorname{sen}(\theta_t)^2 + p_\psi\cos(\theta_t) \tag{4}$$

são constantes de movimento. Isso se deve ao fato que $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi} = 0$ para o Lagrangiano acima. Na Mecânica Clássica, coordenadas q com essa propriedade, ou seja, tais que $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q} = 0$, são denominadas *coordenadas cíclicas* e, por força das equações de Euler-Lagrange, seus momentos generalizados $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot q}$ são constantes de movimento. Os ângulos de Euler φ e ψ são, portanto, coordenadas cíclicas no problema do pião de Lagrange.

Mostre que a energia mecânica (cinética mais potencial) do pião de Lagrange é dada por

$$e_m \;=\; \frac{I_1}{2}\Big(\dot\varphi_t^2 \operatorname{sen}(\theta_t)^2 + \dot\theta_t^2\Big) + \frac{I_3}{2}\Big(\dot\varphi_t \cos(\theta_t) + \dot\psi_t\Big)^2 + Mgl\cos(\theta_t)$$

e é também uma constante de movimento. Escrevendo

$$\dot\varphi_t \;=\; \frac{p_\varphi - p_\psi\cos(\theta_t)}{I_1(\operatorname{sen}\theta_t)^2} \tag{5}$$

e definindo

$$e' \;:=\; e_m - \frac{p_\psi^2}{2I_3}$$

[1]Joseph-Louis Lagrange (1736–1813). Seu nome de nascimento foi Giuseppe Luigi Lagrangia.

que também é, obviamente, uma constante de movimento, mostre que

$$e' = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}_t^2 + \widetilde{V}(\theta_t) , \tag{6}$$

onde

$$\widetilde{V}(\theta) = Mgl\cos(\theta) + \frac{\big(p_\varphi - p_\psi\cos(\theta)\big)^2}{2I_1(\operatorname{sen}\theta)^2} . \tag{7}$$

Obtenha disso que

$$\int_{\theta_0}^{\theta_t} \frac{1}{\sqrt{e' - \widetilde{V}(\theta)}}\, d\theta = \sqrt{\frac{2}{I_1}}\, t . \tag{8}$$

Essa expressão fornece uma solução formal ao problema do Pião de Lagrange.

---

3) Seja um sistema mecânico descrito por um Lagrangiano $\mathscr{L}(q,\, \dot{q},\, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\|\dot{q}_i\|^2 - U(q_1,\, \ldots,\, q_n,\, t)$, com q_i sendo vetores em $\mathbb{R}^3$ e U sendo um potencial conservativo. Usando o formalismo lagrangiano e a covariância das equações de Euler-Lagrange por mudanças de coordenadas, obtenha as equações de movimento desse sistema mecânico em um sistema de referências não inercial, descrito por coordenadas $Q_i = Q_i(q,\, t) \equiv R_t^{-1}(q_i - c_t)$, $i \in \{1,\, \ldots,\, n\}$, com $R_t \in \mathrm{SO}(3)$. Identifique nelas as forças não inerciais.

---

4) [Modos normais de um sistema com duas massas] Considere o sistema unidimensional descrito na Figura 1, página 2, composto por duas massas m_1 e m_2 acopladas linearmente a molas de constantes de mola k_1, k_2 e k_3, todas positivas, a primeira mola acoplando a massa m_1 à parede da esquerda, a segunda mola acoplando as massas entre si e a terceira mola acoplando a massa m_2 à parede da direita. Suporemos também que as molas estão em equilíbrio quando não estão estendidas.

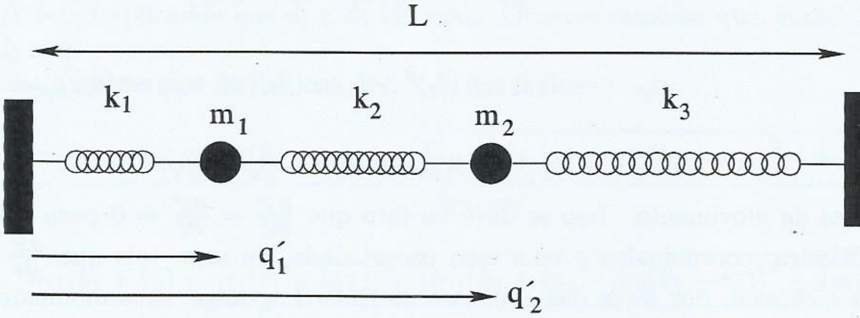

Figura 1: Massas pontuais m_1 e m_2 em movimento horizontal acopladas a molas de constantes de mola k_1, k_2 e k_3. As respectivas coordenadas q_1' e q_2' medem a distância à parede à esquerda. A distância entre as paredes é L.

Constate que o Lagrangiano desse sistema mecânico é

$$\mathscr{L} = \frac{m_1}{2}(\dot{q}_1')^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{q}_2')^2 - \frac{k_1}{2}(q_1')^2 - \frac{k_2}{2}(q_1' - q_2')^2 - \frac{k_3}{2}(L - q_2')^2 .$$

Constate que nesse caso temos

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} , \qquad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} , \qquad \ell = \begin{pmatrix} 0 \\ k_3 L \end{pmatrix} ,$$

e

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\langle \dot{q}', M\dot{q}'\rangle_R - \frac{1}{2}\langle q', Kq'\rangle_R + \langle \ell, q'\rangle_R - \frac{k_3L^2}{2}.$$

Como o último termo é uma constante, será omitido doravante.

Constate que $\det(K) = k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3 \equiv \kappa > 0$ e que

$$K^{-1} = \frac{1}{\kappa}\begin{pmatrix} k_2 + k_3 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}.$$

Definindo

$$q = q' - K^{-1}\ell = \begin{pmatrix} q_1' - \frac{k_2k_3L}{\kappa} \\ q_2' - \frac{(k_1+k_2)k_3L}{\kappa} \end{pmatrix},$$

obtemos o Lagrangiano canônico

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, M\dot{q}\rangle_R - \frac{1}{2}\langle q, Kq\rangle_R.$$

Verifique que a equação secular $\det\big(\lambda M - K\big) = 0$ fica nesse caso $m_1m_2\lambda^2 + b\lambda + \kappa = 0$, com $b = -\big(m_1(k_2+k_3) + m_2(k_1+k_2)\big)$. Verifique que as soluções são

$$d_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2m_1m_2}, \qquad d_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2m_1m_2},$$

onde $\Delta = b^2 - 4m_1m_2 = \big(m_1(k_2+k_3) + m_2(k_1+k_2)\big)^2 - 4m_1m_2\kappa$. Mostre que

$$\Delta = \big(m_1(k_2+k_3) - m_2(k_1+k_2)\big)^2 + 4m_1m_2k_2^2,$$

e, portanto, que $\Delta > 0$, implicando que d_1 e d_2 são reais. Observe também que, como $\Delta < b^2$ e $\sqrt{\Delta} < |b|$, tem-se $d_1 > 0$ e $d_2 > 0$.

De forma explícita em termos de m_1, m_2, k_1, k_2 e k_3, temos

$$d_1 = \frac{m_1(k_2+k_3) + m_2(k_1+k_2) + \sqrt{\big(m_1(k_2+k_3) - m_2(k_1+k_2)\big)^2 + 4m_1m_2k_2^2}}{2m_1m_2},$$

$$d_2 = \frac{m_1(k_2+k_3) + m_2(k_1+k_2) - \sqrt{\big(m_1(k_2+k_3) - m_2(k_1+k_2)\big)^2 + 4m_1m_2k_2^2}}{2m_1m_2}.$$

Vamos agora considerar o caso particular em que $m_1 = m_2 = m$ e $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Usando as fórmulas acima, mostre que para esse caso tem-se

$$d_1 = \frac{3k}{m}, \qquad d_2 = \frac{k}{m}.$$

Temos ainda

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = M^{-1/2}KM^{-1/2} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Constate que

$$B^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m}}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}$$

e constate que essa matriz é positiva. Assim,

$$\Omega = M^{-1/2}B^{1/2}M^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m}}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix} . \tag{9}$$

A matriz B pode ser diagonalizada pela matriz ortogonal $O = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Verifique que

$$O^T B O = \begin{pmatrix} 3k/m & 0 \\ 0 & k/m \end{pmatrix} .$$

A matriz à direita é a matriz D e seus autovalores são $d_1 = \frac{3k}{m}$ e $d_2 = \frac{k}{m}$, como deveria ser. Constate que os modos normais são dados por

$$\mathcal{Q} = O^T M^{1/2} q = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix} q_1 - q_2 \\ q_1 + q_2 \end{pmatrix} .$$

Dessa forma, temos as soluções

$$q_1(t) - q_2(t) = \alpha_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) + \beta_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) , \tag{10}$$

$$q_1(t) + q_2(t) = \alpha_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \beta_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) , \tag{11}$$

com α_1, α_2, β_1 e β_2 sendo constantes dependentes de condições iniciais.

Somando-se e subtraindo-se ambas as expressões uma da outra, vemos que as coordenadas q_1 e q_2 são combinações lineares de senos e cossenos das frequências $\sqrt{\frac{3k}{m}}$ e $\sqrt{\frac{k}{m}}$ vezes o tempo.

Se retornarmos às coordenadas originais usando $q' = q + K^{-1}\ell$, teremos $q_1' = q_1 + \frac{L}{3}$ e $q_2' = q_2 + \frac{2L}{3}$. Verifique! Assim, as posições de equilíbrio estático para as partículas 1 e 2 são $\frac{L}{3}$ e $\frac{2L}{3}$, respectivamente.

Com uso dos modos normais (10)-(11) vemos que:

1. $q_2'(t) - q_1'(t) = q_2(t) - q_1(t) + \frac{L}{3}$ e, portanto,

$$q_2'(t) - q_1'(t) = \frac{L}{3} - \alpha_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) - \beta_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) .$$

   Assim, vemos que diferença de posição $q_2'(t) - q_1'(t)$ entre as partículas 2 e 1 é dada por um movimento harmônico de frequência $\sqrt{\frac{3k}{m}}$ em torno do ponto $L/3$. Lembremos que $L/3$ é a distância entre partículas 2 e 1 na situação de equilíbrio estático.

2. A posição do centro de massa das duas partículas, $\big(q_1'(t) + q_2'(t)\big)/2 = \big(q_1(t) + q_2(t)\big)/2 + L/2$, é dada por

$$\frac{q_1'(t) + q_2'(t)}{2} = \frac{L}{2} + \frac{\alpha_2}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{\beta_2}{2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) .$$

   Assim o centro de massa do sistema de suas partículas de massa m é dado um movimento harmônico de frequência $\sqrt{\frac{k}{m}}$ em torno do ponto $L/2$. Lembremos que $L/2$ é a posição do centro de massas na situação de equilíbrio estático.

Esses dois pontos permitem uma interpretação mecânica do significado dos modos normais no caso considerado.

Os resultados acima também podem expressos como

$$q(t) = \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)^{2l} K^l\right] q_0 + \sqrt{m} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} \left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)^{2l+1} K^l\right] v_0 \,.$$

Verifique que os autovetores de K são $\gamma_1 := \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$, com autovalor $3k$, e $\gamma_2 := \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, com autovalor k. Escrevendo $q_0 = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2$ e $v_0 = (b_1/\sqrt{m})\gamma_1 + (b_2/\sqrt{m})\gamma_2$ (onde a_1, a_2, b_1 e b_2 são constantes), verifique que

$$q(t) = \left[a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) + b_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)\right]\gamma_1 + \left[a_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + b_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right]\gamma_2 \,,$$

donde as mesmas conclusões obtidas acima podem ser extraídas.

Constate que os projetores espectrais de Ω (vide (9)) são

$$F_1 = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2}\left(\Omega - \omega_2 \mathbb{1}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} ,$$

$$F_2 = \frac{1}{1-\sqrt{3}}\left(\Omega - \omega_1 \mathbb{1}\right) = \frac{1}{1-\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \sqrt{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Escrevendo $q_0 = \left(\begin{smallmatrix}q_{01}\\q_{02}\end{smallmatrix}\right)$ e $v_0 = \left(\begin{smallmatrix}v_{01}\\v_{02}\end{smallmatrix}\right)$, os dois modos normais serão

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)\begin{pmatrix} q_{01} - q_{02} \\ q_{02} - q_{01} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{3k}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)\begin{pmatrix} v_{01} - v_{02} \\ v_{02} - v_{01} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\begin{pmatrix} q_{01} + q_{02} \\ q_{02} + q_{01} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\begin{pmatrix} v_{01} + v_{02} \\ v_{02} + v_{01} \end{pmatrix} .$$

No primeiro vemos que $q_2(t) - q_1(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)(q_{02} - q_{01}) + \sqrt{\frac{m}{3k}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)(v_{02} - v_{01})$ e para o segundo vemos que $(q_1(t) + q_2(t))/2 = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)(q_{01} + q_{01})/2 + \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)(v_{01} + v_{02})/2$.